

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ИТЕРАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ НА СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ШВАРЦА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОНТАКТА УПРУГИХ ТЕЛ

М.П. ГАЛАНИН^{1,2}, П.В. ГЛИЗНУЦИНА¹, В.В. ЛУКИН^{1,2}, А.С. РОДИН^{1,2}

¹ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
Москва, Россия
e-mail: galan@keldysh.ru

² Московский государственный университет им. Н.Э. Баумана
Москва, Россия
e-mail: galan@keldysh.ru

Ключевые слова: Контактное взаимодействие, метод Шварца, метод множителей Лагранжа, метод конечных элементов

Аннотация. Учет контактного взаимодействия является важным этапом оценки напряженно-деформированного состояния различных конструкций, включающих в себя соприкасающиеся детали. В большинстве практически важных ситуаций аналитическое решение для рассматриваемой контактной задачи получить невозможно, поэтому необходимо численное моделирование. Наиболее популярными методами, позволяющими учесть условия на контактной поверхности, являются метод штрафных функций, метод множителей Лагранжа, а также их различные комбинации.

В работе приведена постановка двумерной задачи механического контактного взаимодействия двух упругих тел. Дано описание альтернирующего метода Шварца (одного из вариантов метода декомпозиции), предназначенного для численного решения контактной задачи. Суть метода состоит в следующем: на нулевом шаге на контактных поверхностях тел задается начальное приближение для компонент вектора перемещений (приближение выбирают из диапазона ожидаемых значений для зоны контактного взаимодействия). После решения данной задачи кинематическое условие (условие непроникания одного тела в другое) на контактной поверхности будет выполнено, но вычисленные контактные давления для взаимодействующих тел оказываются различными. На следующем шаге с помощью специальным образом выполненной коррекции добиваются равенства контактных напряжений, но полученные перемещения не удовлетворяют условию непроникания. Далее, на очередной итерации снова используют скорректированные кинематические условия (совмещают контактирующие поверхности). Чередование силовых и кинематических итераций выполняется до достижения сходимости, когда и кинематические и силовые условия на контакте выполнены с заданной точностью. В формулах, которые используются для коррекции перемещений и напряжений на контактных поверхностях, присутствуют итерационные параметры, которые можно задавать различными способами. Одним из главных преимуществ метода Шварца является сведение решения

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q74, 74B05, 74M15.

Key words and Phrases: Contact interaction, Schwartz method, Lagrange method of multipliers, finite element method

общей задачи контактного взаимодействия нескольких тел к последовательности решений стандартных задач механики для каждого тела по отдельности. Но конкурентность данного метода по сравнению с методами штрафных функций и множителей Лагранжа во многом определяется скоростью сходимости рассмотренного итерационного процесса.

В работе представлены результаты решения ряда двумерных тестовых задач, в которых модули Юнга материалов контактирующих тел значительно отличаются друг от друга (до 100 раз). Во всех расчетах использовались равномерная прямоугольная сетка и конечные элементы первого порядка. Проведено исследование зависимости сходимости метода Шварца от выбора итерационных параметров, от выбора начального приближения, от расчетных сеток на контактной поверхности (характерные размеры сеток в различных телах отличаются до 1.5 раз). Показано, что в каждой из рассмотренных ситуаций характер сходимости итерационного процесса в значительной степени определялся выбранными значениями итерационных параметров. При этом существует диапазон значений, для которых наблюдалась расходимость итерационного процесса. На основании выполненных расчетов предложена эмпирическая формула для определения значений итерационных параметров, которые обеспечивают быструю сходимость итераций для рассмотренного класса задач.

Проведено сравнение результатов, полученных с помощью метода Шварца, и результатов, полученных с помощью реализации метода множителей Лагранжа с использованием независимой контактной поверхности. Сравнение показало, что результаты близки друг к другу, что может служить подтверждением правильности полученных величин.

INVESTIGATION OF INFLUENCE OF ITERATION PARAMETERS ON CONVERGENCE OF SCHWARTZ METHOD FOR PROBLEM SOLUTION OF ELASTIC BODIES CONTACT

M.P. GALANIN^{1,2}, P.V. GLIZNUTSINA¹, V.V. LUKIN^{1,2}, A.S. RODIN^{1,2}

¹ Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS,
Moscow, Russia
e-mail: galan@keldysh.ru

² Bauman Moscow State Technical University
Moscow, Russia
e-mail: galan@keldysh.ru

Summary. Accounting of contact interaction is an important evaluation stage of the stress and strain state of various designs including the adjoining details. In the majority of important situations the analytical decision for the considered contact problem can't be received therefore numerical modeling is necessary. The most popular methods allowing to consider conditions on a contact surface are the method of penalty functions, a method of multipliers of Lagrange and also their various combinations.

Statement of a two-dimensional problem of mechanical contact interaction of two elastic bodies is given in work. The description of an alternating method of Schwartz (one of the decomposition method options) intended for the numerical solution of a contact problem is given. The essence of this method is as follows: on a zero step on the contact surfaces of bodies initial approach for normal displacements is set (approach is chosen from the range of the expected values for a zone of contact interaction). After the solution of this task the kinematic condition (a condition of not penetration of one body in another) on a contact surface will be executed, but the calculated contact pressures for the interacting bodies are various. On the following step by means of special correction equalities of contact stresses will be executed, but the received displacements don't meet not penetration condition. Further, on the next iteration use the corrected kinematic conditions again (combine the contact surfaces). Alternation of stress and kinematic iterations is carried out before achievement of convergence when both kinematic and stress conditions on contact surface are satisfied with the planned accuracy. At formulas which are used for correction of displacements and stresses on contact surfaces there are iterative parameters which can be defined in various ways. One of the main advantages of Schwartz method is the reduction of the solution of the general problem of contact interaction of several bodies to the sequence of solutions of standard mechanics problems for each body separately. But the competition of this method in comparison with methods of penalty functions and Lagrange's multipliers in many respects is defined by the convergence rate of the considered iterative process.

In this work results of the solution of a number of two-dimensional test problems are demonstrated. In calculations Jung's module of one contacting body material considerably differ from Jung's module of another body material (up to 100 times). In all calculations the uniform rectangular grid and first order finite elements were used. The research of dependence of Schwartz method convergence from the choice of iterative parameters, from the choice of initial approach, from grids on contact surface (the characteristic sizes of grids in various bodies differ up to 1.5 times) is conducted. It is shown that in each of the considered situations the behavior of iterative process convergence substantially was defined by the chosen values of iterative parameters. At the same time there is a range of values for which the divergence of iterative process was observed. On the basis of the executed calculations the empirical formula for determination of «good» values of iterative parameters is offered. These values provides rapid iterations convergence for the considered class of problems.

Comparison of the results received by means of Schwartz method, and results received by means of method of multipliers of Lagrange (variant in which we use independent contact surface) is carried out. Comparison has shown that results are close to each other that can serve as confirmation of received values correctness.

1 ВВЕДЕНИЕ

Исследование механики контактного взаимодействия является важным этапом анализа характера деформирования и прочности инженерных конструкций в рамках предположений механики сплошных сред¹. В машиностроении контактному взаимодействию тел уделяют особое внимание, поскольку контактное давление является одним из часто встречающихся видов силовой нагрузки на элементы конструкции, который приводит к износу деталей, возникновению в конструкции концентраторов напряжений и ряду других важных с инженерной точки зрения эффектов.

Аналитические решения контактных задач получены для весьма ограниченного набора видов контактного взаимодействия. В подавляющем большинстве практически важных ситуаций для решения необходимо применять численные методы. Для задач механики деформируемого твердого тела (МДТТ) можно использовать метод конечных разностей², метод разностных потенциалов³, но лидирующее положение занимает метод конечных элементов (МКЭ)^{4, 5}. Для учета контактного взаимодействия применяют метод штрафных функций, метод множителей Лагранжа, комбинированный метод штрафов и Лагранжа, метод псевдосреды, альтернирующий метод Шварца (один из вариантов метода декомпозиции^{6, 7}) и некоторые другие методы^{5, 8}.

В данной работе приведена достаточно общая постановка задачи контактного взаимодействия двух упругих тел, описаны численные алгоритмы на основе метода Шварца и метода множителей Лагранжа, представлены результаты решения ряда прикладных задач.

2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРУГИХ ТЕЛ

Рассмотрим в трехмерном пространстве \mathbb{R}^3 с декартовой системой координат $Ox_1x_2x_3$ два тела A и B , занимающих область $G = G_A \cup G_B$, ограниченную кусочно-гладкой границей $\partial G = \partial G_A \cup \partial G_B$. Предполагаем, что тела находятся в плоском деформированном состоянии (деформации относительно оси x_3 отсутствуют), поэтому можно ограничиться сечением, параллельным плоскости Ox_1x_2 (рис. 1).

Математическая формулировка квазистатической задачи МДТТ в рассматриваемой постановке включает следующие соотношения (для каждого тела $\alpha \in \{A, B\}$, $i, j = \overline{1, 2}$)⁹:

уравнения равновесия

$$\sigma_{ji,j}(\mathbf{u}) = 0, \mathbf{x} \in G_\alpha, \quad (1)$$

граничные условия (кинематические и силовые)

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{S_1^\alpha} = \mathbf{u}_0^\alpha(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in S_1^\alpha \subset \partial G_\alpha, \quad (2)$$

$$\sigma_{ji}(\mathbf{u})n_j|_{S_2^\alpha} = p_i^\alpha(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in S_2^\alpha \subset \partial G_\alpha, \quad (3)$$

соотношения Коши для компонент тензора деформации ($i, j = \overline{1, 2}$, $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

определяющие уравнения (в данном случае закон Гука) для компонент тензора напряжений ($i, j = \overline{1, 3}$)

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (4)$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ – вектор перемещения точки, определяемой радиусом-вектором $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{u}_0^\alpha(\mathbf{x}, t)$ – вектор перемещения точки, расположенной на поверхности S_1^α , $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = p_i(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_i$ – вектор внешней нагрузки, действующей на поверхности S_2^α , C_{ijkl} – компоненты тензора коэффициентов упругости.

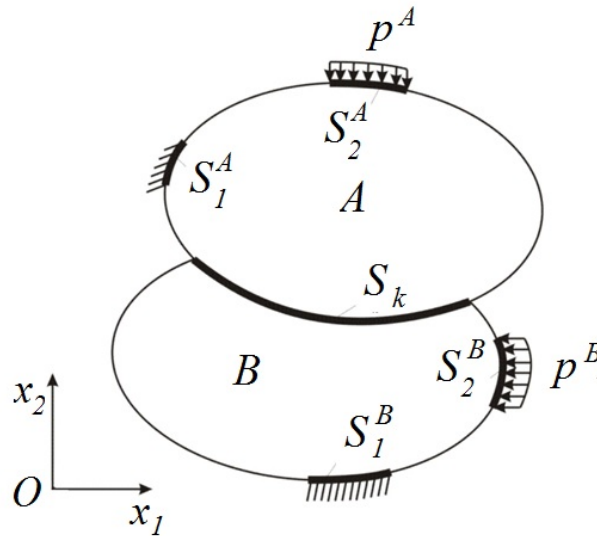


Рис. 1. Схема контактного взаимодействия двух тел

При решении контактной задачи на поверхностях контакта тел $S_k = S_k^A = S_k^B$ (см. рис. 1) дополнительно должны быть выполнены условия контактного взаимодействия по перемещениям и напряжениям^{1, 8, 10}.

Для случая, когда тела могут двигаться относительно друг друга в касательном направлении условия сопряжения по перемещениям (кинематическое условие) задаются формулой

$$u_n^A(\mathbf{x}, t) - u_n^B(\mathbf{x}, t) = \partial_n(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in S_k, \quad (5)$$

а по напряжениям (силовое условие) соотношением

$$\sigma_n^A(\mathbf{x}, t) = \sigma_n^B(\mathbf{x}, t) \leq 0, \mathbf{x} \in S_k. \quad (6)$$

Здесь u_n^A, u_n^B – проекции векторов перемещений граничных точек на направление внешней нормали \mathbf{n}_A к границе тела А, δ_n – начальное расстояние (зазор) по нормали между граничными точками тел А и В, σ_n^A, σ_n^B – проекции векторов напряжений $\boldsymbol{\sigma}^A$ и $\boldsymbol{\sigma}^B$ на направления внешних нормалей \mathbf{n}_A и \mathbf{n}_B соответственно, $S_1^\alpha \cup S_2^\alpha \cup S_k^\alpha = \partial G_\alpha$, $\text{mes}(S_1^\alpha \cap S_2^\alpha) = 0$, $\text{mes}(S_1^\alpha \cap S_k^\alpha) = 0$, $\text{mes}(S_2^\alpha \cap S_k^\alpha) = 0$, $\alpha \in \{A, B\}$.

Часть прикладных задач требует учета сил трения на контактных поверхностях, для этого обычно используют закон Амонтона-Кулона, который связывает касательные контактные напряжения с нормальными.

В данной работе рассмотрено контактное взаимодействие, при котором в касательном направлении тела двигаются без трения, а начальный зазор δ_n всегда равен нулю.

Совокупность соотношений (1) – (6) составляет математическую формулировку контактной задачи МДТТ. Предполагается, что все функции, входящие в данную формулировку, обладают достаточной гладкостью.

3 ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ

3.1 Альтернирующий метод Шварца

Для численного решения задачи в работе использован МКЭ в варианте, описанном в ^{10, 11}. В результате применения МКЭ задача МДТТ (1)-(6) сводится к решению линейного матричного уравнения:

$$[K]\{U\} = \{R\}. \quad (7)$$

Здесь $[K]$ - глобальная матрица жесткости, $\{U\}$ - глобальный вектор перемещений, $\{R\}$ - глобальный вектор нагрузки.

Альтернирующий метод Шварца является итерационным методом, более подробно данный метод описан в ^{11, 12, 13}. Его суть в рамках конечно-элементной технологии состоит в следующем. На первом шаге (нулевой итерации) задаются компоненты векторов перемещений (нормальных к поверхности) контактных узлов $\{U_k\}_{(A)}$ и $\{U_k\}_{(B)}$ (приближение выбирают из диапазона ожидаемых значений для зоны контактного взаимодействия таким образом, чтобы контактные поверхности тел совпадали)

$$\{U_k\}_{(A),m}^0 = \{U_k^0\}_{(A),m}, \quad (8)$$

где m ($1 \leq m \leq M_A$) – номер текущего узла, лежащего на контактной поверхности S_k^A тела A , M_A – количество контактных узлов на поверхности S_k^A (для тела B справедлива аналогичная формула).

После нулевой итерации в узлах на контактных поверхностях перемещения совпадают (выполнено условие (5)), но не совпадают контактные давления (условие (6)).

В дальнейшем на нечетных итерациях выполняется коррекция компонент векторов, задающих контактные силы, $\{P_k\}_{(A)}$ и $\{P_k\}_{(B)}$ тел A и B (для выполнения условия (6)). Для тела A корректирующие выражения имеют вид

$$\{P_k\}_{(A),m}^{2n+1} = \{P_k\}_{(A),m}^{2n} - \alpha_{(A),m}^{2n} \left(\{P_k\}_{(B),s}^{2n} + \{P_k\}_{(A),m}^{2n} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Здесь $\alpha_{(A),m}^{2n}$ – итерационный параметр, $\{P_k\}_{(B),s}^{2n}$ – вектор контактной силы в сходственной относительно узла m точке s , лежащей на контактной поверхности S_k^B тела B . Аналогичное соотношение используется для коррекции компонент векторов контактных сил, возникающих в контактных узлах тела B . Далее выполняется решение двух подобных задач теории упругости, в которых на контактных поверхностях ставятся силовые условия с новыми значениями контактного давления.

В данной работе для аппроксимации контактных давлений использованы линейные базисные функции (заданные на поверхностных элементах), а контактная сила $\{P_k\}_{(A),m}$ в узле m вычислялась путем интегрирования по ячейке Дирихле, соответствующей данному узлу. Более подробно варианты вычисления контактных давлений и сил рассмотрены в ^{14, 15}.

На четных итерациях выполняется коррекция компонент векторов перемещений (по нормали к поверхности) контактных узлов $\{U_k\}_{(A)}$ и $\{U_k\}_{(B)}$ тел A и B (для выполнения условия (5)). Для тела A корректирующие выражения имеют вид

$$\{U_k\}_{(A),m}^{2n} = \{U_k\}_{(A),m}^{2n-1} + \alpha_{(A),m}^{2n-1} \left(\{U_k\}_{(B),s}^{2n-1} - \{U_k\}_{(A),m}^{2n-1} \right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

Здесь $\alpha_{(A),m}^{2n-1}$ – итерационный параметр, $\{U_k\}_{(B),s}^{2n-1}$ – вектор перемещения сходственной точки s , лежащей на контактной поверхности S_k^B тела B .

Аналогичные соотношения используются для коррекции компонент векторов перемещений контактных узлов тела B . Далее выполняется решение двух подобных задач теории упругости, в которых векторы $\{U_k\}_{(A)}$ и $\{U_k\}_{(B)}$ выполняют роль дополнительных кинематических граничных условий.

Для узла m , относящегося к телу A , и сходственной для данного узла точке s , лежащей на контактной поверхности S_k^B тела B , из условия равенства перемещений ($\{U_k\}_{(A),m}^{2n} = \{U_k\}_{(B),s}^{2n}$) получаем следующее соотношение для итерационных параметров:

$$\alpha_{(A),m}^{2n-1} + \alpha_{(B),s}^{2n-1} = 1. \quad (11)$$

В работах ^{6, 12, 13} приведены доказательства сходимости метода Шварца (его аналитического варианта). Но постановка задачи в этих работах отличается от постановки задачи (1)-(6) отсутствием у тел поверхностей, на которых заданы силовые условия (3). Т.е. предполагается, что на других участках поверхности, кроме контактной, заданы только кинематические условия (2). Кроме того, в качестве контактных условий выступают не условия проскальзывания (в касательном направлении), а условия прилипания.

Для указанной постановки задачи из условия минимума соответствующего функционала получена следующая связь оптимальных значений итерационных параметров на кинематической и силовой итерациях ^{12, 13} (и для тела A и для тела B):

$$\alpha_*^{2n-2} + \alpha_*^{2n-1} = 1. \quad (12)$$

В аналитическом случае для стационарных процессов ($\alpha^{2n-2} = \alpha$, $\alpha^{2n-1} = 1 - \alpha$) из условия минимума функционала получена формула, в которой оптимальное значение α_* выражается через нормы операторов Фредгольма, которые устанавливают соответствие между векторами перемещений и напряжений на поверхности контакта тел ^{12, 13}. Но вычисление указанных операторов в многомерном случае представляет весьма нетривиальную задачу (поскольку информации о ядрах операторов почти нет), поэтому на практике обычно используют более простые формулы для вычисления итерационных параметров (при этом полученные значения чаще всего не являются оптимальными).

В ¹⁶ предложена и обоснована следующая формула:

$$\alpha_A^{2n-1} = 1 - \frac{K_A}{K_A + K_B}, \quad (13)$$

где K_A и K_B - жесткости тел.

Если обозначить через $C_\alpha = 1/K_\alpha$ ($\alpha = A, B$) податливость тела (величину, обратную жесткости), то (13) можно переписать в следующем виде:

$$\alpha_A^{2n-1} = \frac{C_A}{C_A + C_B}. \quad (14)$$

В ¹⁶ отмечено, что выбор величин податливости (или жесткости) в качестве локальных, а не интегральных, характеристик делает алгоритм более универсальным. В ¹⁷ предложено задавать зависимость перемещения от давления на контактной поверхности с помощью следующего оператора:

$$u(\tau)|_{S_k} = \int_{S_k} G(\rho, \tau) p(\rho) d\rho, \quad (15)$$

где p – контактное давление, а ядро оператора $G(\rho, \tau)$ представляется в виде

$$G(\rho, \tau) = \tilde{C}(\tau) f(|\rho - \tau|). \quad (16)$$

Здесь ρ , τ – координаты точек, $\tilde{C}(\tau)$ – функция, которая зависит от геометрии зоны контакта, механических характеристик материала, состояния поверхности (она является локальной характеристикой), а $f(|\rho - \tau|)$ – функция влияния других точек, расположенных на контактной поверхности, на перемещение рассматриваемой точки ($f(0) = 1$).

С учетом (16) выражение (15) можно переписать следующим образом

$$u(\tau)|_{S_k} = \tilde{C}(\tau) \int_{S_k} f(|\rho - \tau|) p(\rho) d\rho. \quad (17)$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{C}(\tau) = u(\tau) / \int_{S_k} f(|\rho - \tau|) p(\rho) d\rho. \quad (18)$$

Выражение (18) означает, что $\tilde{C}(\tau)$ имеет смысл перемещения точки поверхности тела, вызванного единичной силой, приложенной к рассматриваемой точке, т.е. $\tilde{C}(\tau)$ можно использовать в качестве функции, задающей локальную податливость¹⁷.

Если подставить выражения для податливости, соответствующие (20), в выражение (16), то получится следующая формула для итерационного параметра тела A в узле m :

$$\alpha_{A,m}^{2n-1} = \frac{\gamma_{A,m}^{2n-1} \{U_k\}_{(A),m}^{2n-1}}{\gamma_{A,m}^{2n-1} \{U_k\}_{(A),m}^{2n-1} + \{U_k\}_{(B),s}^{2n-1}}, \quad (19)$$

$$\gamma_{A,m}^{2n-1} = \int_{S_k^{B(2n-1)}} f_B(|\rho - \tau_s|) p_B^{2n-1}(\rho) d\rho / \int_{S_k^{A(2n-1)}} f_A(|\rho - \tau_m|) p_A^{2n-1}(\rho) d\rho. \quad (20)$$

Для тела B можно записать аналогичные формулы для итерационных параметров, причем

$$\gamma_{B,s}^{2n-1} = \frac{1}{\gamma_{A,m}^{2n-1}}. \quad (21)$$

В¹⁷ сделано предположение, что поскольку на силовых итерациях выполнено равенство $p_A^{2n-1}(\rho) = p_B^{2n-1}(\rho)$, то можно приближенно считать, что $\gamma_{A,m}^{2n-1} = \gamma_{B,s}^{2n-1} = 1$. Тогда выражение для итерационного параметра упрощается и принимает вид

$$\alpha_{A,m}^{2n-1} = \frac{\{U_k\}_{(A),m}^{2n-1}}{\{U_k\}_{(A),m}^{2n-1} + \{U_k\}_{(B),s}^{2n-1}}. \quad (22)$$

Формула (19) является более общей и универсальной, чем (22), но, поскольку выражения для функций влияния f_A и f_B неизвестны, то нужно, используя имеющуюся информацию, оценить значения параметров $\gamma_{A,m}^{2n-1}$ и $\gamma_{B,s}^{2n-1}$.

Отметим, что поскольку на начальных итерациях перемещения на контактных поверхностях тел могут иметь разные знаки, то для выполнения неравенств (14) в выражениях для итерационных параметров (19), (22) целесообразно брать абсолютные величины перемещений $\{U_k\}_{(A),m}^{2n-1}$ и $\{U_k\}_{(B),s}^{2n-1}$.

Для определения итерационных параметров $\alpha_{A,m}^{2n}$ чаще всего берут аналог уравнения (12) и получают¹⁷

$$\alpha_{A,m}^{2n} = 1 - \alpha_{A,m}^{2n-1}. \quad (23)$$

Для рассматриваемой постановки задачи (1)-(6) метод Шварца имеет некоторые дополнительные особенности.

На рис. 2 продемонстрированы силовые и кинематические условия, накладываемые на два тела, вступающие в контактное взаимодействие. В этом случае на нечетных итерациях на верхней части S^A поверхности тела A требуется заменить распределенную нагрузку на эквивалентные кинематические граничные условия. Необходимость такой замены объясняется тем, что каждое контактирующее тело должно быть закреплено, т.е. должны быть исключены свободные перемещения каждого контактирующего тела как целого.

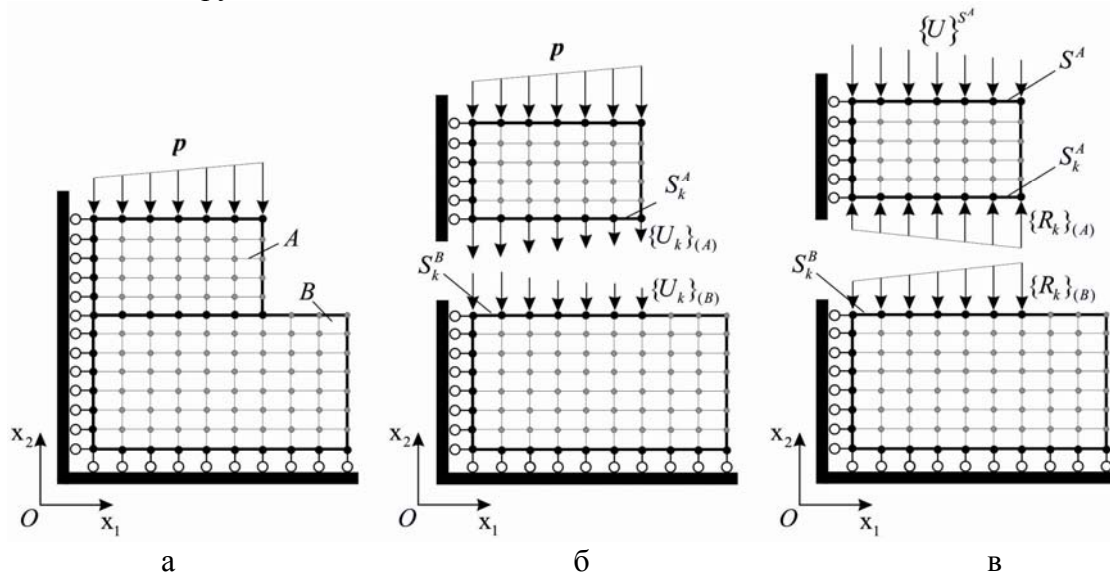


Рис. 2. Контактное взаимодействие двух тел: а – исходная схема взаимодействия, б – схема задания кинематических и силовых условий на кинематической итерации, в – схема задания кинематических и силовых условий на силовой итерации

В качестве подобных дополнительных кинематических условий могут быть приняты следующие (рис. 2в)

$$\{U\}_{(S),m}^{2n+1} = \{U\}_{(S),m}^{2n}, n = 1, 2, \dots, \quad (24)$$

где m ($1 \leq m \leq M_S$) – номер текущего узла, лежащего на внешней поверхности S^A тела A , $\{U\}_{(S),m}^{2n}$ – вектор перемещения (по нормали к поверхности) узла m , вычисленный на предыдущей (четной) итерации.

В ряде задач выражение (24) оказывается неудачным и может существенно замедлить сходимость итерационного процесса. Более выгодной оказывается формула

$$\{U\}_{(S),m}^{2n+1} = \beta_m^{2n+1} \{U\}_{(S),m}^{2n}, n = 1, 2, \dots, \quad (25)$$

где коэффициенты β_m^{2n+1} равны отношению интегральных контактных сил на поверхности S_k^A на предыдущей ($2n$) и текущей ($2n + 1$) итерациях.

3.2 Метод множителей Лагранжа с независимой контактной поверхностью

Для сравнения с методом Шварца решения контактных задач рассмотрим метод множителей Лагранжа. Согласно этому методу к потенциальной энергии системы двух тел, входящих в контакт, добавляется потенциал контактных сил вида^{5, 8}

$$W_C = - \int_{S_k} \mathbf{L} \cdot (\mathbf{x}^{(A)} - \mathbf{x}^{(B)}) dl, \quad (26)$$

где \mathbf{L} – вектор-функция множителей Лагранжа, имеющая смысл вектора поверхностных контактных сил, $\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{X}^{(i)} + \mathbf{u}^{(i)}$ – актуальные положения соответствующих сходственных точек тел $i = A, B$ на поверхности контакта, $\mathbf{X}^{(i)}$ и $\mathbf{u}^{(i)}$ – исходные координаты и получаемые перемещения сходственных точек соответственно. В дальнейшем полученная энергия варьируется и ее первая вариация приравнивается 0. Переменные \mathbf{u} и \mathbf{L} независимы.

Для вычисления интеграла (26) необходимо его дискретизировать. При этом дискретизируется и непрерывная функция \mathbf{L} . В таком случае в систему линейных алгебраических уравнений, полученную с помощью метода конечных элементов, добавляются новые неизвестные, соответствующие слагаемому⁵

$$\widetilde{W}_C = - \int_{S_k} \mathbf{L}^T \cdot (\mathbf{x}^{(A)} - \mathbf{x}^{(B)}) dS, \quad (27)$$

где \mathbf{L}^T – вектор дискретизированных множителей Лагранжа.

Предлагаемый вариант метода заключается в построении независимой контактной границы S_k – средней линии, которая не привязана жестко к сеточным границам контактирующих тел. В таком случае можно отойти от обязательного определения активного и пассивного тела, использующегося во многих методах для решения контактных задач, которое часто является искусственным и, как правило, случайным.

Кроме того независимая контактная граница позволяет произвольно выбирать способ и точность аппроксимации множителей Лагранжа.

Для данного подхода используется следующий алгоритм. Для начала выбираются все точки, которые вступают в контакт - контактные точки. По ним строится некоторая средняя линия, являющаяся по сути независимой контактной границей. Вдоль этой средней линии вводятся множители Лагранжа, причем в любом количестве. Далее находятся сходственные точки для каждого тела по нормали к средней линии и по ним осуществляется взятие контактного интеграла (27).

4 РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

В данном разделе для координат будут использованы следующие обозначения $x_1 \rightarrow x$, $x_2 \rightarrow y$. Все величины приведены в безразмерном виде. Если это не оговорено особо, в расчете применялся метод Шварца.

Рассмотрим следующую тестовую двумерную задачу (она схематично изображена на рис. 2.а): второе тело с шириной (размер по оси x) 3 и высотой (размер по оси y) 3 стоит на первом теле с шириной 6 и высотой 3. С левой стороны тела закреплены по горизонтали, а нижнее тело снизу закреплено по вертикали. На верхнее тело действует равномерно распределенная нагрузка, равная 10.

Приведем результаты решения серии контактных задач, в которых свойства материалов тел меняются в широком диапазоне. Базовый материал имеет следующие параметры: модуль Юнга $E_0=70000$, коэффициент Пуассона $\nu=0.3$. В дальнейшем материал второго тела всегда совпадал с базовым, а модуль Юнга материала первого тела варьировался.

При решении задач контактного взаимодействия двух тел часто рассматриваемую пару разделяют на активное и пассивное тело (критерии разделения могут быть разными). В рамках данной работы будем использовать указанные термины, ориентируясь на следующие рассуждения: второе тело, к которому непосредственно приложена силовая нагрузка, и которое под действием этой нагрузки вдавливаются в первое тело, будем называть активным; а первое тело, на которое действует только контактное давление со стороны второго тела, будем называть пассивным.

Значительное влияние на скорость сходимости метода Шварца оказывает выбранное начальное приближение. Во всех расчетах (если это не оговорено особо) начальное приближение строилось по принципу¹⁸, который для рассматриваемой задачи заключается в следующем: на первом этапе нулевой итерации на контактную поверхность нижнего тела проецируется давление, приложенное к верхней поверхности второго тела. После этого для первого тела решаются уравнения равновесия и рассчитывается поле перемещений. На втором этапе нулевой итерации в узлах сетки, расположенных на контактной поверхности второго тела, ставятся кинематические условия, причем значения перемещений соответствуют величинам перемещений в сходственных (для данных узлов) точках на контактной поверхности первого тела. После этого применяется алгоритм метода Шварца с чередованием силовых и кинематических условий.

Во всех расчетах, если это не оговорено особо, использовались равномерная прямоугольная сетка с шагом $h=0.125$ и конечные элементы первого порядка.

Основная цель проводимых расчетов состоит в исследовании влияния параметров $\gamma_{1,m}^{2n-1}$ и $\gamma_{2,m}^{2n-1}$ на сходимость итерационного процесса. В рамках данной работы принималось, что данные параметры являются постоянными для каждого тела, т.е. $\gamma_{1,m}^{2n-1} = \gamma_1$, $\gamma_{2,m}^{2n-1} = \gamma_2$. Согласно (21) $\gamma_2 = 1/\gamma_1$, поэтому в дальнейшем приведены данные только для γ_1 (для пассивного тела). Итерационные параметры $\alpha_{1,m}^0$ задавались с помощью формулы

$$\alpha_{1,m}^0 = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1}. \quad (28)$$

В данной работе моделировалось контактное взаимодействие более твердого тела, вдавливаемого в более мягкое тело. В¹⁹ рассмотрена обратная ситуация, когда более мягкое тело вдавливается в более твердое (модули Юнга отличаются в диапазоне от 1 до 1000).

4.1 Исследование зависимости сходимости от отношения модулей Юнга контактирующих тел

В первой серии расчетов модуль Юнга материала второго тела совпадает с базовым $E_2 = E_0$, а модуль Юнга материала первого тела принимает следующие значения: $E_1 = E_0$, $E_1 = E_0/3$, $E_1 = E_0/5$, $E_1 = E_0/10$, $E_1 = E_0/100$.

В таблице 1 приведены максимальные относительные изменения u_y на двух соседних итерациях (в дальнейшем будем употреблять термин «ошибка u_y ») для различных значений параметра γ_1 после различного количества проведенных итераций (каждый раз – после силовой итерации). Поскольку процесс начинается с нулевой итерации, то количество итераций на единицу больше текущего номера.

На рис. 3 показаны соответствующие графики зависимости ошибки u_y от номера итерации для первой серии расчетов. Для большей наглядности по оси ординат отложено значение не самой ошибки, а десятичного логарифма ошибки.

Анализ данных, приведенных в таблице 1 и на рис. 3, показывает, что для всех вариантов расчета скорость сходимости итерационного процесса существенно изменялась для разных значений γ_1 , причем для определенного диапазона значений наблюдалась расходимость итераций.

Во всех сходящихся расчетах после определенного числа итераций наступала насыщаемость, т.е. ошибка больше не уменьшалась, а стабилизировалась на определенном уровне.

Для расчетов 1.1 ($E_1 = E_0$) быстрее всего стабилизация ошибки на уровне 10^{-4} наступала для значений $\gamma_1 = 0.5$ и $\gamma_1 = 0.25$ (после 12 итераций), для значения $\gamma_1 = 2$ наблюдалась самая медленная скорость сходимости.

Для расчетов 1.2 ($E_1 = E_0/3$) быстрее всего стабилизация ошибки на уровне 10^{-4} наступала для значений $\gamma_1 = 1$ и $\gamma_1 = 2$ (после 12 итераций), для значения $\gamma_1 = 10$ наблюдалась очень медленная сходимость, для значений $\gamma_1 \leq 0.25$ и $\gamma_1 \geq 25$ фиксировалась расходимость итерационного процесса.

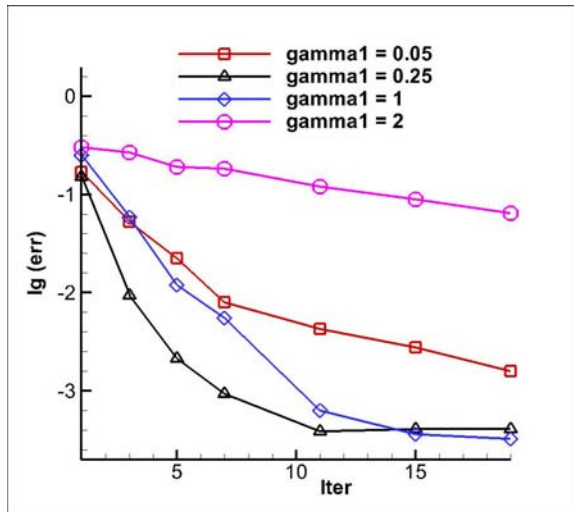
Для расчетов 1.3 ($E_1 = E_0/5$) быстрее всего стабилизация ошибки на уровне 10^{-4} наступала для значения $\gamma_1 = 2$ (после 12 итераций), для значений $\gamma_1 = 1$ и $\gamma_1 = 10$ скорость сходимости существенно уменьшалась, для значений $\gamma_1 \leq 0.5$ фиксировалась расходимость итерационного процесса.

Для расчетов 1.4 ($E_1 = E_0/10$) быстрее всего стабилизация ошибки на уровне 10^{-5} наступала для значений $\gamma_1 = 5$ и $\gamma_1 = 10$ (после 16 итераций), для значения $\gamma_1 = 2$ скорость сходимости существенно уменьшалась, для значений $\gamma_1 \leq 1$ фиксировалась расходимость итерационного процесса.

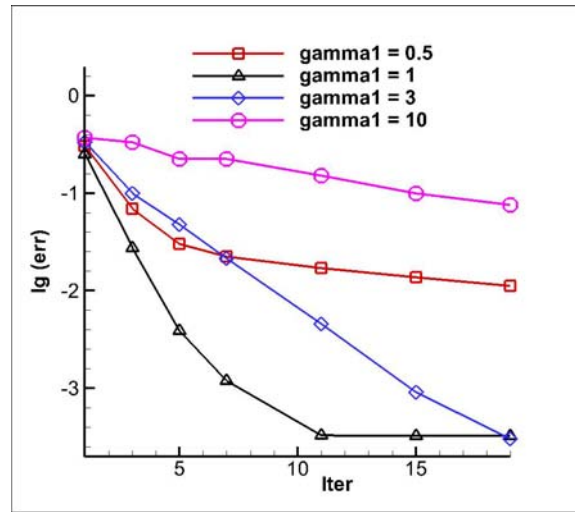
γ_1	Максимальные относительные изменения u_y					
	1-я итер.	3-я итер.	5-я итер.	7-я итер.	11-я итер.	19-я итер.
расчет 1.1 $E_1 = E_0$						
0.05	0.17	$5.3 \cdot 10^{-2}$	$2.2 \cdot 10^{-2}$	$8.0 \cdot 10^{-3}$	$4.3 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$
0.25	0.15	$9.9 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$9.2 \cdot 10^{-4}$	$3.9 \cdot 10^{-4}$	$4.1 \cdot 10^{-4}$
0.5	0.18	$9.3 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$9.3 \cdot 10^{-4}$	$3.6 \cdot 10^{-4}$	$4.6 \cdot 10^{-4}$
1	0.25	$5.9 \cdot 10^{-2}$	$1.2 \cdot 10^{-2}$	$5.5 \cdot 10^{-3}$	$6.1 \cdot 10^{-4}$	$3.2 \cdot 10^{-4}$
2	0.30	0.27	0.19	0.18	0.12	$6.5 \cdot 10^{-2}$
расчет 1.2 $E_1 = E_0/3$						
0.25	0.34	0.21	0.15	0.18	0.34	1.05
0.5	0.30	$6.9 \cdot 10^{-2}$	$3.0 \cdot 10^{-2}$	$2.2 \cdot 10^{-2}$	$1.7 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$
1	0.25	$2.7 \cdot 10^{-2}$	$3.9 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$3.3 \cdot 10^{-4}$	$3.2 \cdot 10^{-4}$
3	0.33	$9.9 \cdot 10^{-2}$	$4.7 \cdot 10^{-2}$	$2.1 \cdot 10^{-2}$	$4.5 \cdot 10^{-3}$	$3.0 \cdot 10^{-4}$
10	0.37	0.33	0.22	0.22	0.15	$7.5 \cdot 10^{-2}$
50	0.39	0.60	0.39	0.69	0.82	1.16
расчет 1.3 $E_1 = E_0/5$						
0.5	0.42	0.26	0.22	0.28	0.80	0.44
1	0.35	$5.1 \cdot 10^{-2}$	$2.5 \cdot 10^{-2}$	$1.9 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$3.9 \cdot 10^{-3}$
2	0.30	$4.6 \cdot 10^{-2}$	$6.3 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-4}$	$2.6 \cdot 10^{-4}$
3	0.33	$5.8 \cdot 10^{-2}$	$1.4 \cdot 10^{-2}$	$2.3 \cdot 10^{-3}$	$2.3 \cdot 10^{-4}$	$2.2 \cdot 10^{-4}$
10	0.37	0.15	$7.0 \cdot 10^{-2}$	$3.5 \cdot 10^{-2}$	$8.0 \cdot 10^{-3}$	$4.4 \cdot 10^{-4}$
100	0.39	0.31	0.17	0.13	$6.0 \cdot 10^{-2}$	$1.2 \cdot 10^{-2}$
расчет 1.4 $E_1 = E_0/10$						
1	0.52	0.38	0.34	0.42	0.67	0.47
2	0.42	$4.9 \cdot 10^{-2}$	$3.2 \cdot 10^{-2}$	$2.1 \cdot 10^{-2}$	$9.7 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$
5	0.35	$6.8 \cdot 10^{-2}$	$7.8 \cdot 10^{-3}$	$2.2 \cdot 10^{-3}$	$8.9 \cdot 10^{-5}$	$2.0 \cdot 10^{-5}$
10	0.37	$7.7 \cdot 10^{-2}$	$1.6 \cdot 10^{-2}$	$3.3 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-5}$
100	0.39	0.13	$4.8 \cdot 10^{-2}$	$1.7 \cdot 10^{-2}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$3.3 \cdot 10^{-5}$
расчет 1.5 $E_1 = E_0/100$						
5	165	0.99	29	0.99	1.62	0.53
10	1.31	0.22	0.10	$5.6 \cdot 10^{-2}$	$2.6 \cdot 10^{-2}$	$4.8 \cdot 10^{-3}$
100	0.39	$8.8 \cdot 10^{-2}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$	$3.9 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-4}$	$2.2 \cdot 10^{-4}$
1000	0.40	$9.0 \cdot 10^{-2}$	$1.3 \cdot 10^{-2}$	$3.5 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-4}$	$2.3 \cdot 10^{-5}$

Таблица 1: Максимальные ошибки u_y для расчетов из первой серии.

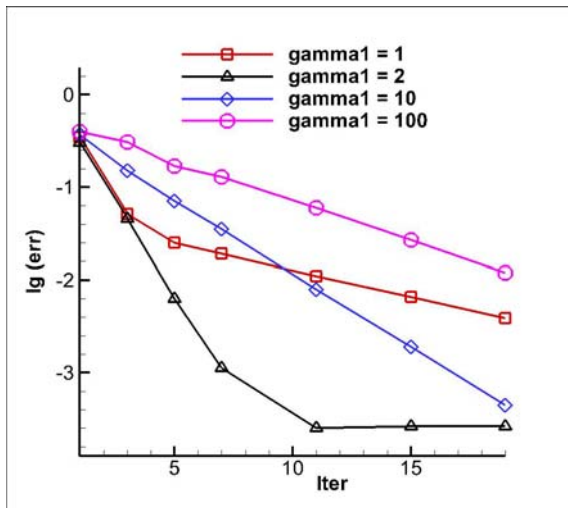
Для расчетов 1.5 ($E_1 = E_0/100$) для значения $\gamma_1 = 100$ стабилизация ошибки на уровне 10^{-4} наступало после 12 итераций, а для значения $\gamma_1 = 1000$ – на уровне 10^{-5} после 16 итераций, для значения $\gamma_1 = 10$ скорость сходимости существенно уменьшалась, для значений $\gamma_1 \leq 5$ фиксировалась расходимость итерационного процесса.



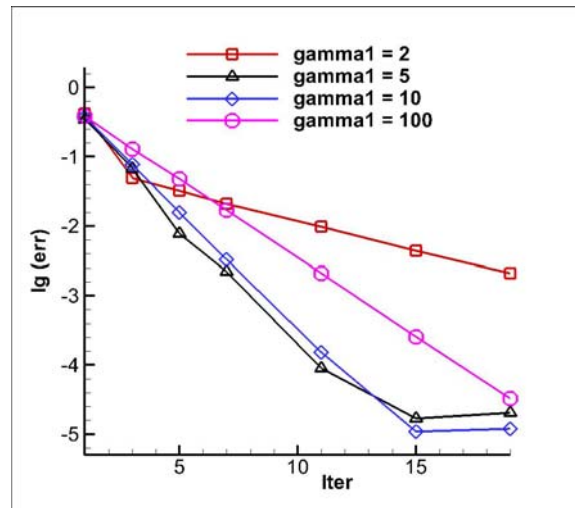
а: $E_1 = E_0$



б: $E_1 = E_0/3$



в: $E_1 = E_0/5$



г: $E_1 = E_0/10$

Рис. 3. Графики зависимости десятичного логарифма ошибки от номера итерации для расчетов 1.1-1.4

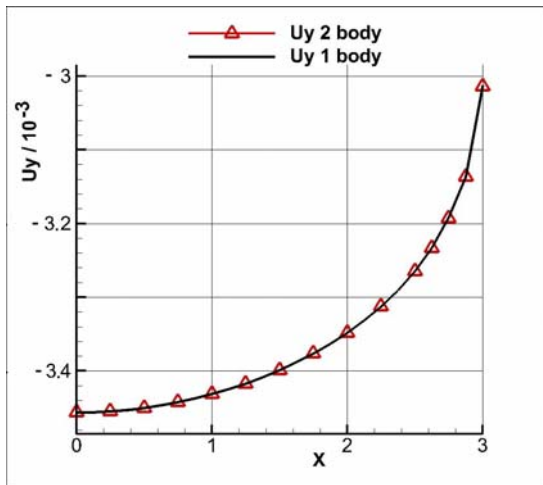
Следует отметить, что для всех соотношений модулей Юнга контактирующих тел, находились такие значения γ_1 , для которых ошибка u_y за первые 6 итераций уменьшалась до величины порядка 10^{-2} .

Для всех проведенных расчетов (на совпадающих сетках) итоговые распределения перемещений и напряжений, полученные при использовании разных значений γ_1 (после стабилизации ошибки), визуально неотличимы друг от друга.

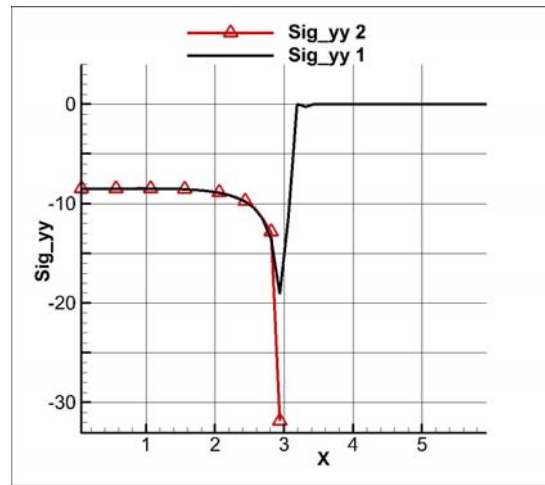
По итогам проведенной серии расчетов для пассивного тела можно вывести следующую формулу для параметра γ_1 , обеспечивающую достаточно быструю сходимость для случая, когда активное тело является более жестким по сравнению с пассивным (для всего рассмотренного диапазона значений модуля Юнга):

$$\gamma_1 = 0.25 \left(\frac{E_2}{E_1} \right)^{1.5}. \quad (29)$$

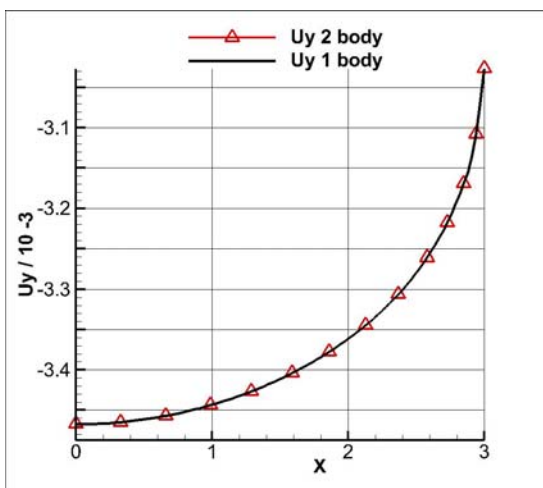
В ¹⁹ показано, что формула (29) является подходящей и для случая, когда активное тело является более мягким по сравнению с пассивным.



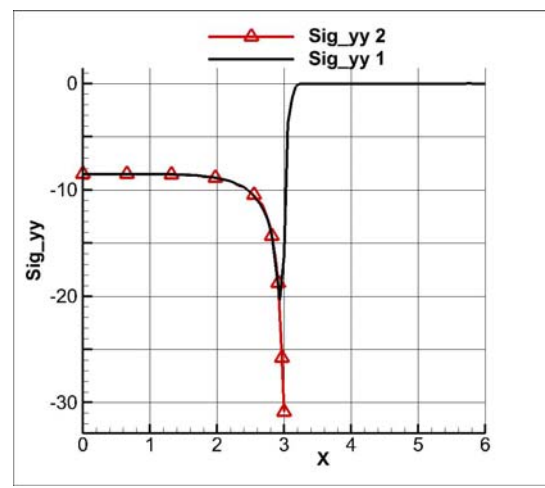
а: метод Шварца



б: метод Шварца



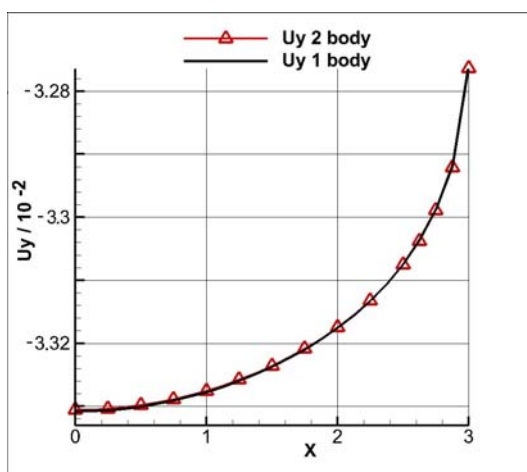
в: метод множителей Лагранжа



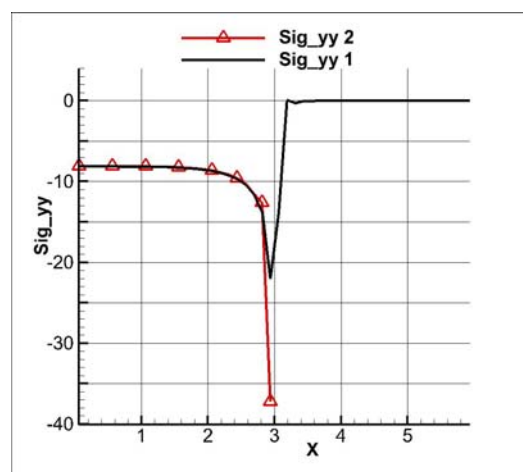
г: метод множителей Лагранжа

Рис. 4. Графики перемещения u_y (а, в) и напряжения σ_{yy} (б, г) вдоль контактной границы ($E_1 = E_0/10$)

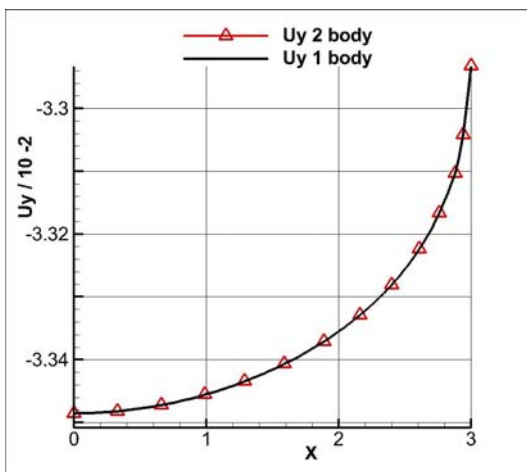
Для всех расчетов первой серии проведено сравнение результатов, полученных с помощью метода Шварца и с помощью реализации метода множителей Лагранжа, описанной в параграфе 2.2. В расчетах методом множителей Лагранжа использовалась треугольная сетка (шаг сетки 0.125) с конечными элементами 2 порядка. Во всех случаях результаты, полученные двумя методами, оказывались практически идентичными, что может служить подтверждением правильности полученных величин. Отличия наблюдались только в напряжениях вблизи угловой точки, что связано с тем, что напряжение в этой зоне очень чувствительно к используемой расчетной сетке.



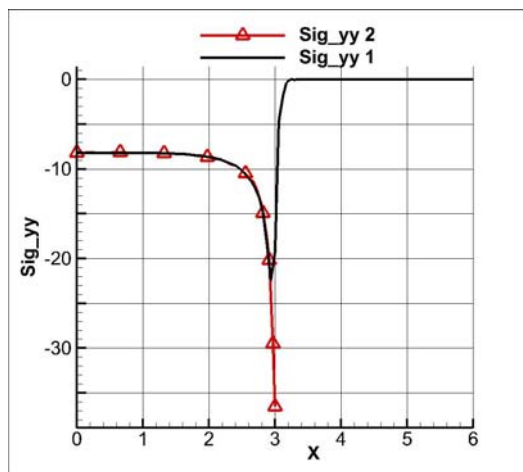
а: метод Шварца



б: метод Шварца



в: метод множителей Лагранжа



г: метод множителей Лагранжа

Рис. 5. Графики перемещения u_y (а, в) и напряжения σ_{yy} (б, г) вдоль контактной границы ($E_1 = E_0/100$)

На рис. 4 показаны графики перемещения u_y вдоль контактной границы и графики напряжения σ_{yy} (брались величины, относящиеся к центрам ячеек, примыкающих к верхней границе первого тела или нижней границе второго тела) для расчетов с $E_1 =$

$E_0/10$. Графики с маркером соответствуют величинам, относящимся ко второму телу, а графики без маркера – величинам, относящимся к первому телу. На рис. 5 показаны аналогичные графики для расчетов с $E_1 = E_0/100$.

На рис. 6 показаны графики перемещений u_x и u_y для расчетов 1.1 – 1.4 (методом Шварца). Из графиков видно, что максимальные перемещения увеличиваются (по сравнению с расчетом 1.1) пропорционально тому, насколько уменьшается модуль Юнга материала нижнего тела.

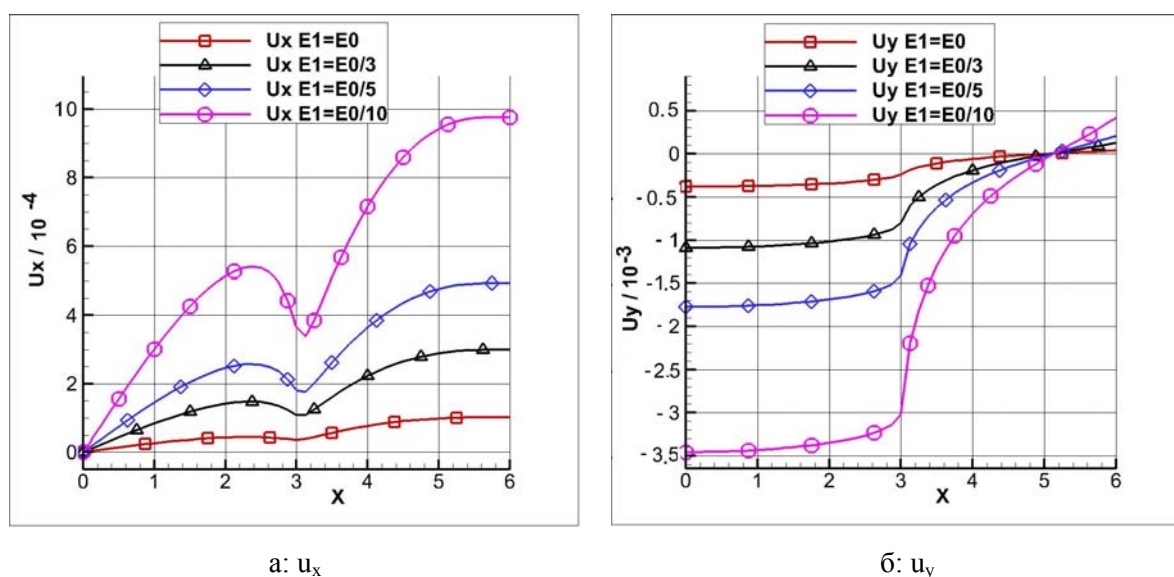


Рис. 6. Графики перемещений u_x и u_y вдоль верхней границы первого тела для расчетов 1.1-1.4

4.2 Исследование зависимости сходимости от расчетных сеток

Во второй серии расчетов выбрано значение модуля Юнга материала первого тела $E_1 = E_0/5$. Известно, что используемые сетки оказывают существенное влияние на результаты расчетов^{14, 20}. Проведено исследование сходимости итерационного процесса в зависимости от использованных расчетных сеток в телах. Сетка в первом теле оставалась неизменной ($h_1 = 0.125$), в расчете 2.1 во втором теле построена сетка с шагом $h_2 = 0.115$ (размеры сеток близки, но узлы на контактной поверхности уже не совпадают), в расчете 2.2 – сетка с шагом $h_2 = 0.08$ (в 1.5 раз меньше, чем в первом теле), в расчете 2.3 – сетка с шагом $h_2 = 0.18$ (в 1.5 раз больше, чем в первом теле). В таблице 2 приведены максимальные относительные изменения u_y на двух соседних итерациях для различных значений параметра γ_1 после различного количества проведенных итераций.

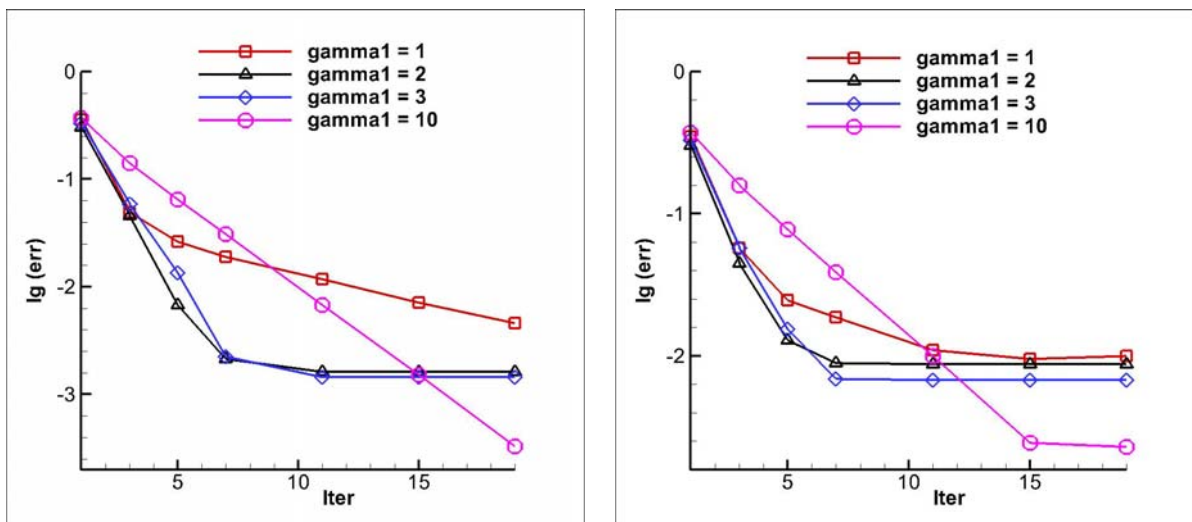
На рис. 7 показаны соответствующие графики зависимости ошибки u_y от номера итерации для расчетов 2.2 и 2.3 (по оси ординат – десятичный логарифм от ошибки).

Как и раньше в расчетах 1.3 (контакт «узел в узел»), быстрее всего стабилизация ошибки наступала для значения $\gamma_1 = 2$ (после 8 итераций), но итоговый уровень ошибки в зависимости от шага h_2 возрастал до 10^{-3} ($h_2 = 0.08$) или до 10^{-2} ($h_2 = 0.18$). Это связано с ошибками интерполяции. Для значения $\gamma_1 = 10$ скорость сходимости ниже, но

итоговый уровень ошибки меньше: 10^{-4} ($h_2 = 0.08$) или 10^{-3} ($h_2 = 0.18$). Для значений, $\gamma_1 \leq 0.5$ как и в расчетах 1.3, фиксировалась расходимость итерационного процесса.

γ_1	Максимальные относительные изменения u_y					
	1-я итер.	3-я итер.	5-я итер.	7-я итер.	11-я итер.	19-я итер.
расчет 2.1						
1	0.35	$5.0 \cdot 10^{-2}$	$2.6 \cdot 10^{-2}$	$1.9 \cdot 10^{-2}$	$1.2 \cdot 10^{-2}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$
2	0.30	$4.5 \cdot 10^{-2}$	$6.3 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$7.0 \cdot 10^{-4}$	$7.0 \cdot 10^{-4}$
3	0.33	$5.8 \cdot 10^{-2}$	$1.4 \cdot 10^{-2}$	$2.3 \cdot 10^{-3}$	$5.1 \cdot 10^{-4}$	$5.0 \cdot 10^{-4}$
10	0.37	0.15	$6.9 \cdot 10^{-2}$	$3.4 \cdot 10^{-2}$	$7.8 \cdot 10^{-3}$	$4.1 \cdot 10^{-4}$
расчет 2.2						
1	0.36	$4.9 \cdot 10^{-2}$	$2.6 \cdot 10^{-2}$	$1.9 \cdot 10^{-2}$	$1.2 \cdot 10^{-2}$	$4.5 \cdot 10^{-3}$
2	0.30	$4.6 \cdot 10^{-2}$	$6.7 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$1.9 \cdot 10^{-3}$	$1.9 \cdot 10^{-3}$
3	0.33	$5.8 \cdot 10^{-2}$	$1.4 \cdot 10^{-2}$	$2.2 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-3}$
10	0.37	0.14	$6.5 \cdot 10^{-2}$	$3.1 \cdot 10^{-2}$	$6.8 \cdot 10^{-3}$	$3.3 \cdot 10^{-4}$
расчет 2.3						
1	0.34	$5.7 \cdot 10^{-2}$	$2.4 \cdot 10^{-2}$	$1.9 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$9.9 \cdot 10^{-3}$
2	0.30	$4.5 \cdot 10^{-2}$	$1.3 \cdot 10^{-2}$	$8.9 \cdot 10^{-3}$	$8.7 \cdot 10^{-3}$	$8.7 \cdot 10^{-3}$
3	0.33	$5.7 \cdot 10^{-2}$	$1.6 \cdot 10^{-2}$	$6.9 \cdot 10^{-3}$	$6.7 \cdot 10^{-3}$	$6.7 \cdot 10^{-3}$
10	0.37	0.16	$7.6 \cdot 10^{-2}$	$3.9 \cdot 10^{-2}$	$9.8 \cdot 10^{-3}$	$2.3 \cdot 10^{-3}$

Таблица 2: Максимальные ошибки u_y для расчетов из второй серии.



а: $h_2 = 0.08$

б: $h_2 = 0.18$

Рис. 7. Графики зависимости десятичного логарифма ошибки от номера итерации для расчетов 2.2 и 2.3

4.3 Исследование зависимости сходимости от начального приближения

В третьей серии расчетов выбрано значение модуля Юнга материала первого тела $E_1 = E_0/5$. Построены сетки с шагами $h_1 = h_2 = 0.125$ (контакт «узел в узел»). Проведено

исследование сходимости итерационного процесса в зависимости от начального приближения. В расчете 1.3 для итогового поля перемещений получено, что на контактной границе среднее значение $u_y = -1.6 \cdot 10^{-3}$. В расчете 3.1 на нулевой итерации на контактных границах тел ставится кинематическое условие $u_y^0 = -1.6 \cdot 10^{-4}$ (на порядок меньше итогового перемещения), а в расчете 3.2 – $u_y^0 = -1.6 \cdot 10^{-2}$ (на порядок больше итогового перемещения).

В таблице 3 приведены максимальные относительные изменения u_y на двух соседних итерациях для различных значений параметра γ_1 после различного количества проведенных итераций.

Для расчетов 3.2 на первых итерациях на контактной поверхности получают растягивающие напряжения, что приводит к смене знака перемещений и большим значениям ошибки. Но после определенного переходного периода (первых 6-8 итераций) характер сходимости становится качественно аналогичным характеру сходимости в расчетах 3.1.

Как и для расчетов 1.3, быстрее всего стабилизация ошибки на уровне 10^{-4} наступала для значения $\gamma_1 = 2$ (для расчетов 3.1 – после 12 итераций, для расчетов 3.2 – после 20 итераций), для значений $\gamma_1 = 1$ и $\gamma_1 = 10$ скорость сходимости существенно уменьшалась, для значений $\gamma_1 \leq 0.5$, как и раньше, фиксировалась расходимость итерационного процесса.

γ_1	Максимальные относительные изменения u_y					
	1-я итер.	3-я итер.	5-я итер.	7-я итер.	11-я итер.	19-я итер.
расчет 3.1						
1	0.97	0.40	$9.6 \cdot 10^{-2}$	$3.7 \cdot 10^{-2}$	$2.0 \cdot 10^{-2}$	$7.2 \cdot 10^{-3}$
2	0.97	0.32	$2.2 \cdot 10^{-2}$	$3.1 \cdot 10^{-3}$	$2.3 \cdot 10^{-4}$	$2.6 \cdot 10^{-4}$
3	0.97	0.24	$4.8 \cdot 10^{-2}$	$6.5 \cdot 10^{-3}$	$2.8 \cdot 10^{-4}$	$2.2 \cdot 10^{-4}$
10	0.97	0.49	0.17	$9.0 \cdot 10^{-2}$	$4.9 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$
расчет 3.2						
	7-я итер.	11-я итер.	15-я итер.	19-я итер.	27-я итер.	39-я итер.
1	1.69	0.24	0.14	$9.1 \cdot 10^{-2}$	$3.8 \cdot 10^{-2}$	$1.0 \cdot 10^{-2}$
2	0.88	0.10	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$2.4 \cdot 10^{-4}$	$2.5 \cdot 10^{-4}$	$2.5 \cdot 10^{-4}$
3	1.46	0.34	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$5.8 \cdot 10^{-4}$	$2.2 \cdot 10^{-4}$	$2.2 \cdot 10^{-4}$
10	3.27	216	0.78	$8.3 \cdot 10^{-2}$	$4.7 \cdot 10^{-3}$	$8.6 \cdot 10^{-5}$

Таблица 3: Максимальные ошибки u_y для расчетов из третьей серии.

5 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведена достаточно общая постановка задачи механического контактного взаимодействия двух упругих тел. Дано описание конечно-элементной реализации итерационного метода Шварца. Приведены аналитические соотношения, которые можно использовать для вычисления итерационных параметров. Продемонстрированы результаты нескольких серий расчетов, в которых менялись соотношения модулей

Юнга контактирующих тел, характерные размеры сеток и выбранные начальные приближения. Показано, что в каждой из рассмотренных ситуаций характер сходимости итерационного процесса в значительной степени определялся выбранными значениями итерационных параметров. При этом существует диапазон значений, для которых наблюдалась расхожимость итерационного процесса. На основании выполненных расчетов предложена эмпирическая формула для определения значений итерационных параметров, которые обеспечивают достаточно быструю сходимость итераций для рассмотренного класса задач.

Проведено сравнение результатов, полученных с помощью метода Шварца, и результатов, полученных с помощью реализации метода множителей Лагранжа с использованием независимой контактной поверхности. Сравнение показало, что результаты близки друг к другу, что может служить подтверждением правильности полученных величин.

Благодарности: Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00252).

REFERENCES

- [1] L.A. Galin, *Development of contact problems theory*, M.: Nauka, (1976).
- [2] M.P. Galanin and E.B. Savenkov. *Procedures of numerical analysis of mathematical models*, M.: BMSTU, (2010).
- [3] V.S. Riabenskii, *Procedure of difference potentials and its applications*, M.: Fithmathlit, (2002).
- [4] O.C. Zienkiewicz, *The finite element method in engineering science*, McGraw Hill, (1971).
- [5] K. - J. Bathe, *Finite element procedures*, Prentice Hall, (1996).
- [6] G.I. Marchuk, *Methods of computational mathematics*, M.: Nauka, (1989).
- [7] A. Toselli and O. Widlund, *Domain Decomposition methods – Algorithms and Theory*, Springer Berlin Heidelberg New York, (2005).
- [8] N.G. Burago and V.N. Kukudzhyanov, “Review of contact algorithms”, *Mechanika Tverdogo Tela*, **1**, 45-87, (2005).
- [9] V.S. Zarubin and G.N. Kuvyrkin, *Mathematical models of mechanics and electrodynamics of continuous media*, M.: BMSTU, (2008).
- [10] M.P. Galanin, A.V. Krupkin, V.I. Kuznetsov, V.V. Lukin, V.V. Novikov, A.S. Rodin and I.V. Stankevich, “Mathematical modeling thermal elastoplastic contact interaction system of bodies”, *Mathematica Montisnigri*, **30**, 99 – 114, (2014).
- [11] I.V. Stankevich, M.E. Yakovlev and Si Tu Htet, “Design of algorithm of contact interaction based on alternating Schwarz method”, *Herald of the BMSTU. "Natural sciences" series. Special issue: Applied Mathematics*, 134-141, (2011).
- [12] L.B. Zwick, “The principle of alternating continuity at solving of problems of field theory in parts”, *Rep. of USSR Academy of sciences*, **1**, 74-77, (1978).
- [13] L.B. Zwick, “The principle of rotational in problems of interfacing and solid contact of deformable bodies”, *Journal of applied mechanics*, Vol. 16, **1**, 13-18, (1980).
- [14] A.S. Rodin, “Solution of problem of two elastic bodies contact by means of Schwartz method for meshes with rather different steps”, *Preprint of KIAM*, **120**, 3 – 28, (2017).
- [15] M.P. Galanin, V.V. Lukin and A.S. Rodin, “Use of various options of Schwarz method for the solution of a problem of contact interaction of elastic bodies”, *Journal of Physics: Conference*

- Series, Institute of Physics (IOP), (In press).*
- [16] L.B. Zwick, L.M. Pinchuk and V.K. Pogodin, “Choice of iteration methods parameters for coupling of solutions in contact bodies”, *Strength problems*, **9**, 112-115, (1985).
- [17] N.S. Mozarovskii, A.B. Ovseenko and K.N. Rudakov, “Solution of contact problems by finite element method. Part 1. Description of procedure”, *Proceedings of higher educational establishments. Engineering*, **6**, 3-8, (1989).
- [18] M.P. Galanin, V.V. Lukin, A.S. Rodin and I.V. Stankevich, “Use the Schwartz method for modeling of contact interaction for system of bodies”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Vol. 55, **8**, 1393-1406, (2015).
- [19] M.P. Galanin, P.V. Gliznutsina, V.V. Lukin and A.S. Rodin, *Investigation of convergence of Schwartz method for solution of contact plane problem*, M.: RAN, (2017).
- [20] P.V. Breslavskii and V.I. Mazhukin, “Dynamically adapted grids for interacting discontinuous solutions”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Vol. 47, **4**, 687-706, (2007).

Received February 2, 2018