

## К РЕШЕНИЮ СОПРЯЖЕННЫХ ЗАДАЧ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ОБТЕКАНИЯ И ТЕПЛООБМЕНА ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

М.П. ГАЛАНИН<sup>1,2</sup>, В.Т. ЖУКОВ<sup>1</sup>, Н.В. КЛЮШНЕВ<sup>1</sup>,  
В.В. ЛУКИН<sup>1,2</sup>, А.С. РОДИН<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН  
Москва, Россия  
e-mail: [galan@keldysh.ru](mailto:galan@keldysh.ru)

<sup>2</sup>Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана  
Москва, Россия  
e-mail: [galan@keldysh.ru](mailto:galan@keldysh.ru)

**Ключевые слова:** обтекание, теплопроводность, сопряженная задача, вычислительный эксперимент

**Аннотация.** Представлены результаты исследования численной методики решения сопряженной задачи обтекания и теплопроводности для летательного аппарата, движущегося в атмосфере со сверхзвуковыми скоростями. Изучена сходимость вариантов итерационного процесса согласования решения на поверхности идеального теплового контакта. Результаты вычислительного эксперимента подтверждают полученные теоретические оценки.

## ON THE SOLVING OF CONJUGATE PROBLEMS FOR DEFINITION OF PARAMETERS OF WRAP AND HEAT EXCHANGE BETWEEN ELEMENTS OF CONSTRUCTIONS

M.P. GALANIN<sup>1,2</sup>, V.T. ZHUKOV<sup>1</sup>, N.V. KLUSHNEV<sup>1</sup>,  
V.V. LUKIN<sup>1,2</sup>, A.S. RODIN<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS,  
Moscow, Russia  
e-mail: [galanin@keldysh.ru](mailto:galanin@keldysh.ru)

<sup>2</sup>Bauman Moscow State Technical University  
Moscow, Russia  
e-mail: [galan@keldysh.ru](mailto:galan@keldysh.ru)

**Summary.** The results of the investigation of technique for numerical solving the conjugate flow and heat conduction problem for a supersonic aircraft moving in atmosphere are presented. The convergence of variants of the iterative process of matching the solution on the surface of an ideal thermal contact is studied. The results of a computational experiment confirm the obtained theoretical estimates.

**2010 Mathematics Subject Classification:** 34K28, 35Q79, 74S99.

**Key words and Phrases:** wrap, thermal conductivity, conjugate problem, computer experiment.

## 1 ВВЕДЕНИЕ

Определение внешних тепловых нагрузок, действующих на поверхность летательных аппаратов (ЛА), является важным этапом создания тепловой защиты ЛА и определения температурных режимов основных элементов конструкции. Эта задача актуальна для проектирования аппаратов широкого назначения, в том числе космических аппаратов, совершающих аэродинамическое торможение в атмосфере планет, а также гиперзвуковых ЛА атмосферного полета. Данная задача может быть корректно решена только совместно с решением задачи внешнего обтекания ЛА. Разработке численной методики решения такой самосогласованной задачи для гиперзвуковых летательных аппаратов (ГЛА) посвящена настоящая работа.

К началу сороковых годов XX века основные работы о сверхзвуковых течениях газа (теоретические и экспериментальные) относились к скоростям полета, превышающим скорость звука не более, чем в три – пять раз [1]. После Второй мировой войны начинается систематическое развитие теории течений с большими сверхзвуковыми скоростями – гиперзвуковых течений. Это направление приобрело практический интерес в связи с развитием реактивной артиллерии и, особенно, с запуском космических аппаратов. К настоящему времени к классу гиперзвуковых относят течения при числе Маха  $M \geq 5$ . Основными особенностями гиперзвуковых течений является значительный рост температуры после головной ударной волны, сильное торможение потока внутри пограничного слоя и аэродинамический нагрев поверхности. Сложность явлений, сопровождающих полёт ГЛА, практически исключает возможность полного моделирования условий натурального обтекания в аэродинамических установках, поэтому расчётные методы исследования приобретают ключевое значение. Современное представление о расчете параметров конвективного теплообмена на поверхности ЛА дают в концентрированном виде работы [2, 3]. Используется несколько подходов.

Первый заключается в численном интегрировании полной системы уравнений Навье – Стокса. Развитие вычислительной математики и суперкомпьютерной техники обеспечивает возможность решать очень сложные задачи. Примеры расчётов конвективного теплообмена на телах сложной формы даны в [4 – 6], результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными. О перспективности данного направления вычислительной гидрогазодинамики говорит и распространённость использования в инженерных целях коммерческих программных пакетов, таких как Fluent, ANSYS CFX и др. Решение уравнений Навье – Стокса требует больших затрат машинного времени, поэтому для трехмерных расчетов реалистичной геометрии, как правило, используются многопроцессорные ЭВМ высокой производительности. Точность расчётов и затраты машинного времени сильно зависят от структуры и размера расчётной сетки, размеров расчётной области, входных параметров, особенностей алгоритма, модели турбулентности. Поэтому использование программ интегрирования системы уравнений Навье – Стокса для инженерной оценки тепловых потоков проблематично. На сегодняшний день высокоточные расчёты являются достаточно уникальными и носят характер фундаментальных научных исследований.

Второй способ расчёта тепловых потоков заключается в расчёте структуры пограничного слоя на основе уравнений Прандтля [3]. При больших числах Рейнольдса ( $Re > 10^4 \dots 10^5$ ) при отсутствии зон отрыва потока течение около тел можно разбить на

две области: невязкую, основную по объему, течение в которой описывается уравнениями Эйлера, и пристеночный пограничный слой [2, 3]. Толщина пограничного слоя при этом составляет небольшую часть характерного размера обтекаемого тела. Пограничным слоем можно пренебречь и получить невязкое поле течения в рамках системы уравнений Эйлера. Полученные газодинамические параметры на поверхности тела можно считать параметрами на внешней границе пограничного слоя. К настоящему времени развиты методы расчёта плоского и трёхмерного пограничного слоя [3, 7]. Таким образом, задача разбивается на несколько этапов расчёта, задания граничных условий, сопряжения расчётных сеток. Такой способ оценки тепловых потоков является достаточно трудоёмким, а также может приводить к значительным погрешностям, так как при гиперзвуковых скоростях классической схемой Прандтля нужно пользоваться с осторожностью. Это связано с тем, что между вязким пограничным слоем и внешним, по существу невязким, потоком возникает взаимодействие, приводящее к увеличению теплового потока к обтекаемой поверхности [8].

Целью работы является исследование численной методики решения сопряженной задачи определения характеристик внешнего обтекания и теплового режима ЛА. В частности, основной акцент делается на исследовании способов выполнения условий идеального теплового контакта на поверхности обтекаемого тела.

Данная работа является примером математического моделирования сложного многомерного физико – технического процесса. Подобные исследования можно найти в [9 - 11].

## **2 ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС И ЕГО ИССЛЕДОВАНИЕ**

Совместный численный расчет аэродинамической и тепловой задач является основой вычислительного алгоритма, направленного на моделирование параметров обтекания и теплообмена ЛА, совершающего движение вдоль траектории в земной атмосфере. Связность алгоритму придает необходимость аккуратно моделировать теплообмен на поверхности обтекаемого тела. В то же время эффективное решение уравнений газовой динамики и уравнения теплопроводности требует применения различных численных алгоритмов с различными параметрами расчета (в частности, с существенно различными шагами по времени) и различных расчетных модулей в составе единого программного комплекса [12]. В этом случае предполагается решать каждую из задач моделирования обособленно с применением соответствующего расчетного модуля, а согласование параметров теплообмена на поверхности конструкции производить итерационно путем обмена данными между модулями.

В качестве таких обменных данных могут выступать температура и тепловой поток на поверхности обтекаемого тела. Итерационный процесс в этом случае может быть организован по следующей схеме (рис. 1, а):

1. задается стартовое значение теплового потока на поверхности ЛА (нулевое);
2. решается задача обтекания (газодинамический расчетный модуль) ЛА при движении в земной атмосфере при заданном тепловом потоке (условие 2 рода);
3. когда обтекающий поток газа достигает стационарного режима, установившееся значение температуры на поверхности ЛА передается в качестве граничного условия 1 рода в тепловой модуль, решается нестационарная задача теплопроводности;

4. полученное решение задачи теплопроводности позволяет рассчитать значение теплового потока на поверхности обтекаемого элемента конструкции; тепловой поток передается в газодинамический модуль и этапы 2-4 повторяются до достижения сходимости решения, либо выполнения заранее установленного количества итераций.

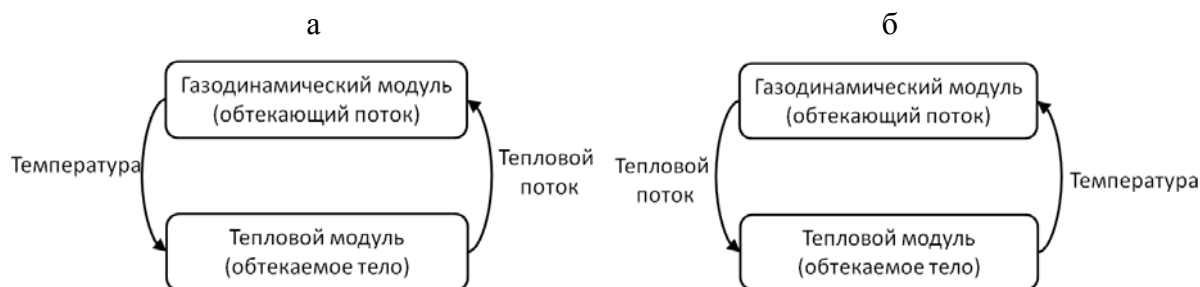


Рис. 1. Связь модулей решателя

В качестве передаваемых от одного модуля к другому параметров могут быть выбраны и другие комбинации (например, из решения тепловой задачи можно передавать температуру, а из газодинамической – тепловой поток, рис. 1, б). Подобного рода модификации схемы взаимодействия модулей могут оказаться полезными в тех случаях, когда обтекаемый ЛА является «горячим», т.е. является источником теплоты, сравнимым по мощности с вязким нагревом в обтекающем потоке, либо когда имеется внешнее тепловое воздействие на обтекаемый объект.

Тем самым разрабатываемый алгоритм решения связанной задачи по существу состоит из двух частей – газодинамической и тепловой. Расчет в них осуществляется независимо, а взаимодействие производится итерационным образом через граничные условия. Итерации прекращаются при достижении с заданной точностью равенства температур и тепловых потоков на границе ЛА. Рассмотрим подробнее этот итерационный процесс, который может быть реализован разными способами.

Исследовать теоретически итерации полной модели для реальных объектов представляется невозможным. Рассмотрим поэтому модельную задачу, сохраняющую основные элементы полной задачи. Пусть все величины зависят лишь от одной пространственной переменной  $x$ , соответствующей нормали к поверхности обтекаемого тела в полной задаче, скорость имеет только одну компоненту, тангенциальную к поверхности. Тогда система решаемых уравнений существенно упрощается. Плотность газа оказывается стационарной, остается уравнение для скорости движения вязкого газа, уравнение энергии для газа и уравнение теплопроводности для обтекаемого тела. На поверхности тела ставятся условия непрерывности температуры и теплового потока. Будем считать все коэффициенты независимыми от температуры. Предположим, что градиент давления в уравнении движения вычисляется явным образом, т.е. по данным с предыдущего временного слоя, либо неким другим способом. Тогда уравнение движения решается независимо от уравнений для температуры. В этом случае для исследования итерационного процесс представляет интерес следующая задача.

$$\begin{aligned}
\alpha_b T_{b,t} &= \beta_b T_{b,xx}, -l_b < x < 0, t > 0, \\
x = -l_b : T_{b,x} &= 0, \\
x = 0 : T_b &= T_g, \\
\beta_b T_{b,x} &= \beta_g T_{g,x}, \\
0 &= \beta_g T_{g,xx} + \Phi_g, 0 < x < l_g, \\
x = l_g : T_g &= T_\infty.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $T$  – температура,  $\alpha$ ,  $\beta$  – теплоемкость и коэффициент теплопроводности,  $l$  – длина пространственной области,  $T_\infty$  – температура правой границы газа,  $\Phi_g$  – мощность тепловыделения в газе. Индексы  $b$ ,  $g$  указывают на принадлежность соответствующей величины телу и газу соответственно.

Задача (1) моделирует теплообмен между ЛА и окружающим газом, температура которого устанавливается много быстрее, чем в теле. При этом тело считается симметричным, процесс его обтекания газом – тоже. Тем самым рассматривается половина имеющейся пространственной области. Поэтому на левой границе стоит нулевая производная температуры тела. В точке сопряжения  $x = 0$  использовано условие непрерывности температур и тепловых потоков. На правой границе газа задана температура окружающей среды. Нас интересует лишь итерационный процесс решения данной задачи, поэтому начальные условия опущены.

Правая часть в уравнении энергии считается независимой от температуры в рамках данного исследования итерационного процесса, т.к. для этого достаточно изучить переход лишь между двумя временными слоями.

Введем равномерную разностную сетку по пространству ( $h_b = l_b / n_b$ ,  $h_g = l_g / n_g$  – шаги равномерной сетки в теле и газе,  $n_b$ ,  $n_g$  – количество разностных ячеек в теле и газе,  $\tau$  – шаг сетки по времени) и запишем простейшую полностью неявную схему:

$$\begin{aligned}
\alpha_b (\hat{T}_b - T_b) / \tau &= \beta_b \hat{T}_{b,\bar{x}x}, 1 < i \leq n_b - 1, \\
i = n_b : \hat{T}_{b,x} &= 0, \\
i = 0 : \hat{T}_b &= \hat{T}_g, \\
-\beta_b \hat{T}_{b,x} &= \beta_g \hat{T}_{g,x}, \\
0 &= \beta_g \hat{T}_{g,\bar{x}x} + \Phi_g, 1 < i \leq n_g - 1, \\
i = n_g : \hat{T}_g &= T_\infty.
\end{aligned} \tag{2}$$

В условии сопряжения появился минус из-за замены  $x$  на  $-x$  в области тела для упрощения обозначений. Он будет фигурировать и далее. Здесь использованы безындексные обозначения [13] для разностных операторов и сеточных функций. «Сеточная температура» для простоты обозначена так же, как и ее непрерывный

аналог. Величины «с крышкой» подлежат определению при переходе на следующий временной слой. Данная задача является модельной и интересна только с точки зрения исследования алгоритма.

Рассмотрим итерационный процесс, разделяющий процедуры вычисления решений в газе и теле. Обозначим индексом “ $s$ ” номер итерации. Запишем уравнения для сеточных температур во внутренних и граничных ( $1 < i \leq n_b$ ,  $1 < i \leq n_g$ ) точках относительно значений температур на “ $s+1$ ” итерации. Рассмотрим два различных итерационных процесса, отличающихся условиями в точке  $i = 0$ .

Пусть итерационный процесс № I реализуется так, как это описано в начале данного параграфа, т.е. следующим образом:

$$\begin{aligned} i = 0: T_b^{s+1} &= T_g^s, \\ -\beta_b T_{b,x}^{s+1} &= \beta_g T_{g,x}^{s+1}. \end{aligned} \quad (3)$$

При этом на вход в решатель для температуры тела поступает граничная температура газа, что позволяет вычислить температуру в теле и граничный поток, который далее передается на вход решателя для газа.

Вычтем из уравнений схемы (2) уравнения, описывающие итерационный процесс (включая (3)). Тогда для величин вида  $\delta T = \hat{T} - T^{s+1}$  получим очевидную разностную задачу для их определения через  $\delta T_{g,0}^s$  – ошибку итерационного приближения температуры газа в точке  $i = 0$ .

Данная задача представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами. Она легко решается аналитически с помощью алгоритмов, описанных в [13]. Полученное решение позволяет получить множитель перехода  $Q_I$  между значениями  $\delta T_{g,0}^{s+1}$  и  $\delta T_{g,0}^s$  на двух последовательных итерациях.

$$\begin{aligned} Q_I = & -(l_g / h_b)(\beta_b / \beta_g)(1 - \mu_{b,2})(1 - \mu_{b,1})(\mu_{b,2}^{n_b-1} - \mu_{b,1}^{n_b-1}) \\ & / (\mu_{b,2}^{n_b-1}(1 - \mu_{b,2}) - \mu_{b,1}^{n_b-1}(1 - \mu_{b,1})). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь

$$\mu_{b,1,2} = (1 + \gamma_b) \pm ((1 + \gamma_b)^2 - 1)^{0.5}, \gamma_b = \alpha_b / \beta_b h_b^2 / (2\tau).$$

Последний параметр представляет собой число, обратное к тепловому числу Куранта в теле. Произведение двух величин  $\mu_{b,1}\mu_{b,2} = 1$ .

Пусть итерационный процесс № II реализуется обратным образом.

$$\begin{aligned} i = 0: T_b^{s+1} &= T_g^{s+1}, \\ -\beta_b T_{b,x}^{s+1} &= \beta_g T_{g,x}^s. \end{aligned} \quad (5)$$

Отличие от алгоритма № I состоит в том, что теперь тепловой поток на границе в теле вычисляется по потоку в газе с предыдущей итерации. Далее решается задача в теле, ее решением является температура на границе, передающаяся в задачу для уравнения теплопроводности в газе.

Аналогично предыдущей задаче данная решается аналитически. Полученное решение позволяет получить множитель перехода  $Q_{II}$  между значениями  $\delta T_{g,x,0}^{s+1}$  и  $\delta T_{g,x,0}^s$  на двух последовательных итерациях.

Оказывается, что полученные множители перехода удовлетворяют следующему соотношению

$$Q_I Q_{II} = 1 \quad (6)$$

Оно означает, что один из этих итерационных процессов сходится, а второй – расходится.

Кроме того, оба множителя перехода отрицательны. Это означает немонотонность сходимости (при ее наличии).

Для сходимости алгоритма № I требуется выполнение неравенства  $|Q_I| < 1$ . Из вида (4) следует, что этого легко добиться в случае малости отношения коэффициентов теплопроводности  $\beta_b / \beta_g$ . Однако скорее всего в реальных условиях выполняется обратная оценка, обеспечивающая сходимость алгоритма № II.

Для больших значений  $n_b$  (количество ячеек разностной сетки в теле) выражение для  $Q_I$  можно упростить, опустив степени  $\mu_{b,2}$ . Его можно еще упростить. Для малых временных шагов  $\tau$  (т.е. больших значений  $\gamma_b$ ) или больших шагов  $\tau$  (т.е. малых  $\gamma_b$ ) выражение для  $Q_I$  выглядит совсем просто.

Однако эти выражения мы не приводим. Ясно, что к реальности общей задачи конкретные значения  $Q_I$  имеют косвенное отношение. Для нас принципиально важно соотношение (6).

Описанное представляет лишь грубую оценку условий сходимости, применимую, к тому же, только в одномерном случае. Тем не менее, как показывают выполненные численные исследования полной трехмерной задачи, общие выводы о сходимости разных вариантов итерационных процессов оказываются верными.

Отметим, что использование итерационного процесса в стиле метода Шварца, предполагающего симметричное решение газодинамической и тепловой частей [14, 15], для случая модельной задачи (1) лишено интереса, т.к. в силу линейности такой алгоритм может сойтись за две итерации при должном выборе параметров интерполяции. В то же время для общей задачи такой алгоритм может оказаться весьма эффективным, т.к. позволяет решать задачу параллельно.

### 3 ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Рассмотрим примеры применения описанной методики для решения одномерной задачи теплопроводности в двух контактирующих телах и полной трехмерной задачи обтекания конструкции с учетом ее теплообмена со средой.

### 3.1 Одномерная задача теплопроводности с контактом

Для предварительной оценки правильности сделанных выше выводов разработан прототип одномерного решателя для системы уравнений (1), причем, как и в описанном выше программном комплексе, для решения уравнения теплопроводности в газе использовался стандартный конечно-разностный метод, а для получения решения в теле – метод конечных элементов [16]. В качестве начальных условий были взяты постоянные, но различающиеся температуры для тела  $T_{b0}$  и газа  $T_{g0}$ , причем  $T_{b0} > T_{g0}$ . В силу того, что в газе решается квазистационарная задача, а, следовательно, температура в газе мгновенно подстраивается под тепловыделение на поверхности тела, температура тела отличается от начальной лишь в небольшой окрестности поверхности, в то время как распределение температуры газа представляет собой линейное распределение от  $T_{g0}$  до температуры поверхности обтекаемого тела. Выбраны параметры сред, соответствующие реальным материалам: для тела задавались физические параметры титана, для газа – параметры стандартной атмосферы [17] на высоте 10 000 м. В этом случае соотношение теплопроводностей  $\beta_b/\beta_g \gg 1$ , что обеспечило быструю (2-3 итерации для порога относительной ошибки  $10^{-5}$  по значениям потока на границе тел) сходимость алгоритма № II и расходимость алгоритма № I, что и было получено в расчетах. Важно отметить, что хотя в отличие от проведенного выше анализа задача в обтекаемом теле решалась методом конечных элементов, общий вывод о характере сходимости итерационного алгоритма оказывается неизменным.

### 3.2 Трехмерная задача обтекания конструкции с учетом теплообмена

Рассмотрим задачу моделирования обтекания с учетом теплообмена для сферы, движущейся со скоростью  $V$  в атмосфере. Примем следующие параметры обтекаемого тела и течения:

- тело представляет собой сферу радиуса  $r = 0.1$  м, состоящей из титана с коэффициентом теплопроводности  $\lambda_b = 19.8$  Вт/(м К), плотностью  $\rho_b = 4450$  кг/м<sup>3</sup>, теплоемкостью  $C_p = 626.8$  Дж/(кг К) и начальной температурой, распределенной равномерно,  $T_{bs} = 400$  К;

- параметры набегающего потока соответствуют движению сферы в атмосфере Земли на высоте  $h = 10\,000$  м со скоростью  $V = 1000$  м/с (локальное число Маха равно 3.33444), параметры газа: давление  $p = 26500$  Па, температура  $T_g = 223.3$  К, теплоемкость  $C_V = 717.5$  Дж/(кг К), плотность  $\rho_g = 0.4135$  кг/м<sup>3</sup>; вязкость газа учитывалась по формуле Сазерленда [18]

$$\mu = \frac{A_S T^{3/2}}{T_S + T},$$

с параметрами  $A_S = 1.3957 \cdot 10^{-5}$ ,  $T_S = 120.0$  К, число Прандтля  $Pr = 0.7$ .

Одним из наиболее трудоемких этапов решения сопряженной трехмерной задачи обтекания и теплообмена является выбор расчетной области и построение в ней сетки приемлемого качества. Эти требования диктуются, прежде всего, особенностями численного решения задач расчета высокоскоростного обтекания тел вязким газом. К таким особенностям стоит отнести необходимость разрешать на сетке и правильно позиционировать в пространстве структуры типа ударных волн, что особенно критично



в головной части обтекаемой конструкции, а также корректно разрешать тонкий пограничный слой вокруг обтекаемого тела, в котором градиенты компонент решения всегда чрезвычайно велики и имеют выделенное направление. Выбранная расчетная область должна включать в себя основные возникающие структуры течения, при этом не быть избыточной, дабы не сделать расчет излишне сложным даже для суперкомпьютерной техники. В свою очередь расчетные сетки необходимо выбирать так, чтобы отразить особенности решения – они, как правило, содержат призматический слой (viscous layer) у поверхности обтекаемого тела и состоят из тетраэдров переменного объема вдали от нее, сгущаясь в окрестности тела и головной ударной волны и оставаясь разреженными ниже по течению. Согласование сеток в обтекаемом теле и во внешней расчетной области производится за счет задания треугольной сетки на поверхности обтекаемого тела для обоих процессов построения сетки.

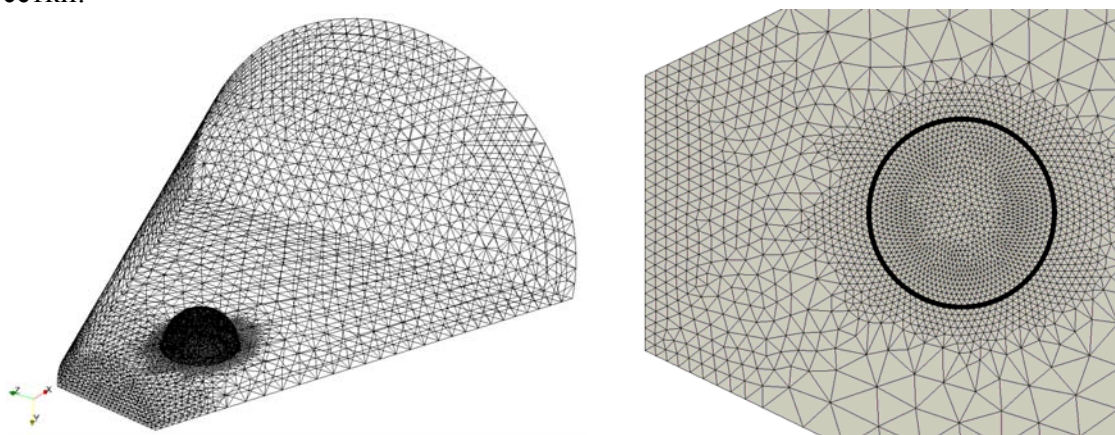


Рис. 2. Расчетная область и фрагмент сетки для задачи обтекания сферы

Расчетная область и фрагмент сетки, построенные с помощью программного комплекса Salome и сеткопостроителя Netgen, для описанной выше задачи приведены на рис. 2. В силу симметрии достаточно рассмотреть только половину полной трехмерной области, окружающей сферу.

В рамках исследования сходимости описанных выше итерационных процессов, применяемых для выполнения условий идеального теплового контакта на поверхности обтекаемого тела, проведена серия расчетов с использованием газодинамического решателя rhoCentralFoam из пакета OpenFOAM и разработанного авторами теплового решателя для поиска распределения температуры внутри обтекаемого тела.

Рассмотрена сходимость итерационных процессов на одном временном шаге. Поскольку температурный решатель выполняет расчет по неявной схеме, имелась возможность выбирать величину временного шага достаточно большой. В проведенных расчетах она составила  $\tau = 10$  с. Подчеркнем также, что речь идет лишь об одном временном шаге теплового расчета, т.к. газодинамический расчет выполняется до установления, шаг в нем выбирается из условия Куранта с  $CFL = 0.4$ , а конечное время, при котором решение принималось установившимся, составляло  $t_{ge} = 0.015$  с.

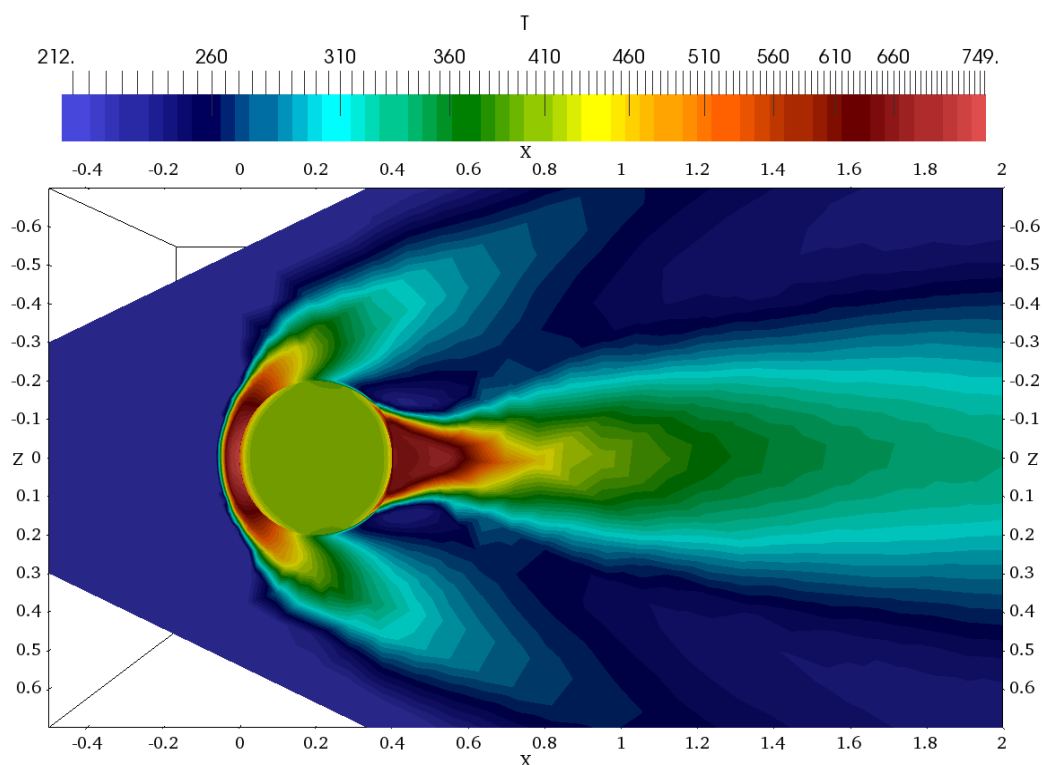


Рис. 3. Распределение температуры в задаче обтекания сферы

Результаты газодинамического расчета с предыдущей итерации выбирались в качестве начального приближения для следующей. Начальное условие для первой итерации представляло собой неподвижный газ с набегающей ударной волной, распространяющейся вдоль оси  $OX$  в положительном направлении. Сходящимся, как это и предсказывалось выше, оказался только один итерационный процесс, а именно процесс № II, что и неудивительно, поскольку обтекающий газ оказывается существенно менее теплопроводным, чем обтекаемое тело. Алгоритм № I уже на второй итерации порождает тепловой поток на поверхности обтекаемого тела, приводящий к получению в газовом решателе отрицательных температур при любом измельчении числа Куранта CFL. Итоговое распределение температуры в плоскости симметрии, полученное по алгоритму № II, изображено на рис. 3.

На рис. 4 разными цветами изображены распределения температуры вдоль отрезков на оси  $OX$  с координатами  $[-0.007; 0.007]$  (нос, а) и  $[0.385; 0.415]$  (дно, б) для разных итераций. Видно, что сходимость имеет немонотонный характер, что существенно влияет на характеристики обтекающего потока. В то же время приемлемая точность, дающая визуально неотличимый результат на малом отдалении от поверхности обтекаемого тела, достигается уже на 4-5 итерации.

Значения температуры обтекающего газа в окрестности носа тела и в крайней точке дна, отстоящие от тела на 0.001, приведены в таблице 1. Несколько избыточное представление результатов направлено на то, чтобы проиллюстрировать скорость сходимости и сориентировать вычислителей в вопросе выбора числа итераций для достижения нужной точности. Так, точность в 0.01 % достигается уже примерно на 5 итерации и во многих случаях оказывается излишне высокой.

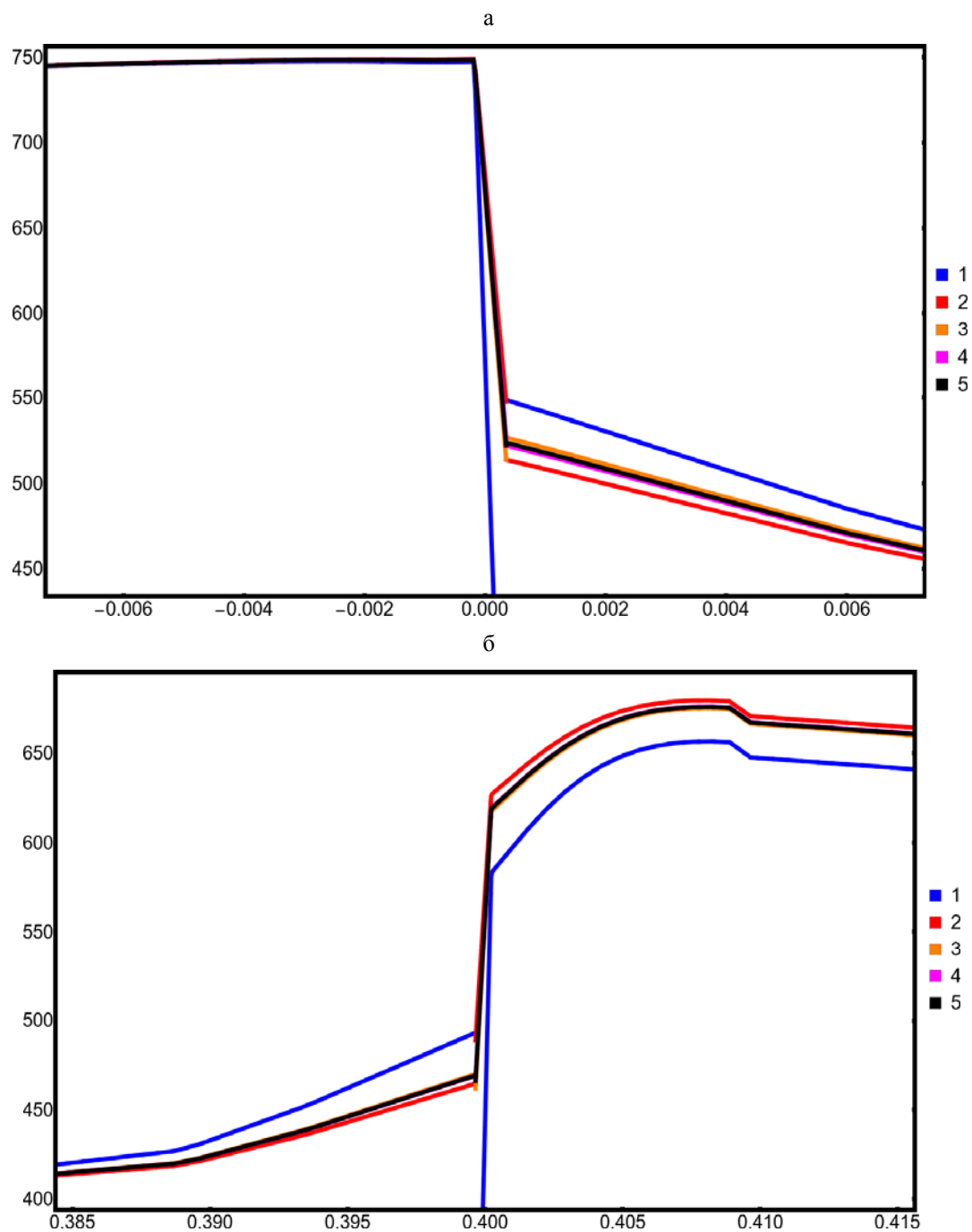


Рис. 4. Распределения температуры на разных итерациях на носу (а) и на дне (б) обтекаемого тела

	1	2	3	4	5	6	7	8
Нос	744,095	745,400	744,923	745,092	745,031	745,053	745,045	745,048
Дно	589,912	630,810	622,070	623,726	623,397	623,463	623,449	623,452

Таблица 1. Температура в окрестности носа и дна обтекаемого тела по итерациям

#### 4 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены результаты исследования численной методики решения сопряженной задачи обтекания и теплопроводности для ЛА, движущегося в атмосфере со сверхзвуковыми скоростями. Рассмотрена методика и описан программный комплекс, включающий в себя аэродинамический и тепловой решатели, направленный на моделирование процессов теплопроводности в ЛА при его движении по траектории. Исследованы варианты организации итерационного процесса, возникающего при учете условий идеального теплового контакта на поверхности обтекаемого тела. Показано, что два варианта организации итерационного процесса – с передачей из газа температуры и из тела теплового потока и наоборот – являются дополнительными относительно друг друга, из них сходится только один. Какой именно вариант сходится в конкретной задаче, зависит от соотношения коэффициентов теплопроводности материалов и других параметров. Приведены результаты численного моделирования для одномерной и полной трехмерной постановок, подтверждающие сделанные на основе теоретического анализа возникающих разностных схем выводы.

#### REFERENCES

- [1] G.G. Chernyi, *Techeniia gaza s bolshoi sverkhzvukovoi skorostiu*, M.: Fizmatlit, (1959).
- [2] B.C. Avduevskii [et al.], *Osnovy teploperedachi v aviatsionnoi i raketno kosmicheskoi tekhnike* M.: Mashinostroenie, (1992).
- [3] V.V. Lunev, *Techenie realnykh gazov s bolshimi skorostiami*, M.: FIZMATLIT, (2007).
- [4] A.V. Beloshitskii [et al.], “Chislennoe modelirovanie teploobmena pri vkhode v atmosferu Zemli spускаemykh apparatov tipa “Kliper””, *Kosmonavtika i raketostroenie*, **46** (1), 30-37 (2007).
- [5] Thomas J. Horvath, “X-38 Experimental Aerothermodynamics”, *AIAA*, 2685 (2000).
- [6] H. Ludeke, P. Krogmann, “Numerical and experimental investigations of laminar/turbulent boundary layer transition”, *ECCOMAS, Barcelona*, (2000).
- [7] B. Einfeldt, “On Godunov-type methods for gas-dynamics”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **25**, 357-393 (1988).
- [8] G.A. Tirkii, V.I. Sakharov, V.L. Kovalev [et al.], *Giperzvukovaia aerodinamika i teplomassoobmen spuskaemykh kosmicheskikh apparatov i planetnykh zondov*, M.: Fizmatlit, (2011).
- [9] V.I. Mazhukin, A.V. Shapranov, A.V. Mazhukin, O.N. Koroleva, “Mathematical formulation of a kinetic version of Stefan problem for heterogeneous melting/crystallization of metals”, *Mathematica Montisnigri*, **36**, 58-77 (2016).
- [10] V.I. Mazhukin, A.V. Shapranov, A. A. Samokhin, A.Y. Ivochkin, “Mathematical modeling of non-equilibrium phase transition in rapidly heated thin liquid film”, *Mathematica Montisnigri*, **27**, 65 – 90 (2013).
- [11] V.I. Mazhukin, A.A. Samokhin, M.M. Demin, A.V. Shapranov, “Modeling of nanosecond laser vaporization and explosive boiling of metals”, *Mathematica Montisnigri*, **29**, 68-90 (2014).
- [12] M.P. Galanin, M.M. Gorbunov-Possadov, A.V. Ermakov, V.V. Lukin, A.S. Rodin, K.L. Shapovalov, “Prototip integrirovannoi programmnoi platformy dlia soprovozhdeniia vychislitel'nogo eksperimenta v kompleksnykh zadachakh matematicheskogo modelirovaniia”, *Trudy ISP RAN*, **26** (3), 51-68 (2014).
- [13] A.A. Samarskii, A.V. Gul'in, *Chislennyye metody*, M.: Nauka, Fizmatlit, (1989).
- [14] L.B. Tsvik, “Printsip poocherednoi nepreryvnosti pri reshenii zadach teorii polia po chastiam”, *Dokl. AN SSSR*, **243** (1), 74 – 77 (1978).

- [15] M.P. Galanin, V.V. Lukin, A.S. Rodin, I.V. Stankevich, "Primenenie metoda Shvartsa dlia modelirovaniia kontaktnogo vzaimodeistviia sistemy tel", *Zhurnal vychislitelnoi matematiki i vychislitelnoi fiziki*, **55** (8), 1429-1443 (2015).
- [16] M.P. Galanin, E.B. Savenkov, *Metody chislennogo analiza matematicheskikh modelei*, M., izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, (2010).
- [17] *International Organization for Standardization, Standard Atmosphere*, ISO 2533:1975, (1975).
- [18] W. Sutherland, "The viscosity of gases and molecular force", *Philosophical Magazine*, **5** (36), 507-531 (1893).

Received April 12, 2017.