MATHEMATICA MONTISNIGRI
Vol XXIX (2014) 5-10

О ГРАНИЧНОМ ПОВЕДЕНИИ δ-СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С.Л. БЕРБЕРЯН*

* Российско-Армянский(Славянский) университет
Ереван, Армения
e-mail: samvel357@mail.ru

Ключевые слова: Субгармонические, логарифмически субгармонические, нормальные функции, угловые и хордальные пределы

Аннотация. В статье рассматриваются δ-субгармонические функции и нормальные δ - субгармонические функции, определенные в единичном круге. Получены достаточные условия для существования хордальных и угловых пределов в произвольной точке единичной окружности.

ON BOUNDARY BEHAVIOR OF δ -SUBHARMONIC FUNCTIONS

S. BERBERYAN*

* Russian-Armenian (Slavonic) University, Yerevan, Armenia
Yerevan, Armenia
e-mail: samvel357@mail.ru

Summary. This paper considers the δ -subharmonic functions and normal δ -subharmonic functions, defined in the unit circle. New sufficient conditions for the existence of chordal and angular limits at arbitrary point of the unit circumference are obtained.

2010 Mathematics Subject Classification: 31A05, 31A10, 31A20, 30D40, 30D45.
Key words and Phrases: Subharmonic, logarithmic subharmonic, normal functions.

1 ВВЕДЕНИЕ

Статья посвящена исследованию хордальных и угловых пределов у δ-субгармонических функций,определенных в единичном круге. Граничное поведение гармонических и субгармонических функций, определенных в единичном круге, рассматривалось во многих работах известных математиков.В дальнейшем будем придерживаться общепринятых обозначений[1]. Обозначим через *D*, Γ и $h(\xi,\varphi)$ соответственно единичный круг $|z|<1$, единичную окружность $|z|=1$ и хорду единичного круга *D*, оканчивающуюся в точке $\xi=e^{i\theta}\in\Gamma$ и образующую с радиусом в этой точке угол $\varphi; -\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$. Пусть $\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$ обозначает подобласть круга *D*, ограниченную хордами $h(\xi,\varphi_1)$ и $h(\xi,\varphi_2)$. Область $\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$ называют обычно углом Штольца с вершиной в точке $\xi=e^{i\theta}\in\Gamma$ и, если нас не интересует размер угла Штольца, мы будем обозначать его кратко $\Delta(\xi)$. Рассмотрим действительнозначную функцию $f(z)$. Для произвольного подмножества S круга D, для которого точка $\xi\in\Gamma$ является предельной точкой, обозначим через $C(f,\xi,S)$ предельное множество функции $f(z)$ в точке ξ относительно множества *S*, т.е. $C(f,\xi,S)=\bigcap\overline{f(S\bigcap U(\xi))}$, где пересечение берётся по всем окрестностям $U(\xi)$ точки ξ, а черта означает замыкание множества относительно двухточечной компактификации $\overline{R}$ множества $R=(-\infty,+\infty)$ в виде отрезка посредством добавления к точкам множества R символов $-\infty$ и $+\infty$. Точку $\xi\in\Gamma$ отнесём к множеству $F(f)$, если $C(f,\xi,\Delta(\xi))$ состоит из единственного значения α. В этом случае говорят, что функция $f(z)$ имеет в точке $\xi\in\Gamma$ угловой предел α. Понятие нормальной функции, рассмотренное для мероморфных функций и состоящее в свойстве порождать нормальное семейство на группе T всех конформных автоморфизмов области определения, было затем перенесено на гармонические и субгармонические функции[2]. В случае единичного круга D группа T состоит из элементов $\mathrm{T}=\{S(z);S(z)=e^{i\alpha}(z+a)\cdot(1+\overline{a}z)^{-1}$, a-произвольная точка в D, α-произвольное действительное число$\}$. Скажем, что действительнозначная функция $f(z)\in\Re$, если на группе T всех конформных автоморфизмов единичного круга D порождаемое ею семейство функций $\Phi:\{f(S(z));\ S(z)\in\mathrm{T}\}$ нормально в D в смысле Монтеля , т. е. из любой последовательности $\{f(S_n(z))\}$ семейства Φ, где $S_n(z)\in\mathrm{T}$, можно извлечь подпоследовательность $\{f(S_{n_k}(z))\}$, равномерно сходящуюся на любом компакте K в D или равномерно расходящуюся к $-\infty$ или к $+\infty$ на K. Рассмотрим функции $f(z)$, определённые в D и представимые в виде разности двух субгармонических функций $u(z)$ и $v(z)$, т. е. $f(z)=u(z)-v(z)$. Такие функции называют δ-субгармоническими функциями[3]. При этом $f(z)\neq\infty$. Введём характеристическую функцию $T(\rho)=T(\rho,f)$, изученную в работе[3] И.И.Приваловым.

$$T(\rho)=T(\rho,f)=m^{+}(\rho,u)+N(\rho,v),\ 0<\rho<1,\text{где}$$

$$m^{+}(\rho,u)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}u^{+}(\rho e^{i\theta})d\theta \text{ и } N(\rho,v)=\int_{0}^{\rho}\frac{n(r)-n(0)}{r}dr+n(0)\cdot\ln\rho .$$

$N(\rho,v)$ выражает среднюю плотность масс внутри круга радиуса ρ, $n(r)$-масса распределения в круге $|z|<r$, $n(0)$ - масса распределения в точке $z=0$ и точка $z=0$ имеет изолированную массу. Скажем, что δ-субгармоническая функция $f(z)$ принадлежит классу N, если справедливо соотношение

$$T(\rho)=T(\rho,f)=0(1) \text{ при } \rho\to1. \qquad (1).$$

Пусть $f(x)$-произвольная функция из класса $L(0,l)$, где $0<l<+\infty$. Интегралом от $f(x)$ порядка α ($0<\alpha<+\infty$) с началом в точке *x=0* принято называть функцию $D^{-\alpha}f(x)\equiv\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{x}(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt$, $x\in(0,l)$. Если $f(x)\in L(0,l)$, то при любом α ($0<\alpha<+\infty$) функция $D^{-\alpha}f(x)$ определена почти всюду на $(0,l)$ и принадлежит классу $L(0,l)$ [4,5]. Поэтому $r^{-\alpha}D^{-\alpha}\{f(re^{i\theta})\}\equiv\frac{r^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{r}(r-t)^{\alpha-1}f(te^{i\theta})dt=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{1}(1-x)^{\alpha-1}f(rxe^{i\theta})dx$. При $\alpha=0$ принимают $D^{0}f(x)=f(x)$. Введём также α-характеристики М.М. Джрбашяна для δ-субгармонических функций, рассмотренную в работе[6] А.М.Джрбашяном.

$$T(r,r_0,+\infty)=\frac{m_\alpha}{2\pi}(r,+\infty)+N_\alpha(r,r_0,+\infty)\ \ (\alpha>0),$$

$$\text{где } m_\alpha(r,+\infty)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}r_{+}^{-\alpha}D^{-\alpha}\{u(re^{i\theta})d\theta\},$$

$$N_\alpha(r,r_0,+\infty)=\int_{r_0}^{r}\frac{n_{+}(t)-n_{+}(r_0)}{t}\left(1-\frac{t}{r}\right)^{\alpha}dt+\int_{0}^{r_0}\left(\int_{\frac{t}{r}}^{\frac{t}{r_0}}\frac{(1-x)^{\alpha}}{x}dx\right)dn_{+}t,\ \text{где } 0<r_0<r<1.$$

Говорят[6], что δ-субгармоническая функция $f(z)$ принадлежит классу N_α, если

$$\sup_{r_0<r<1}T_\alpha(r,r_0,+\infty)<+\infty \qquad (2),$$

где $r_0 \in (0,1)$ - любое фиксированное число.

2 ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Пусть δ-субгармоническая в D функция $f(z)$ удовлетворяет условию (1). Тогда почти всюду на Γ, кроме, быть может, некоторого множества E, $mes\mathrm{E}=0$, функция $f(z)$ имеет равные хордальные пределы $\lim\limits_{\substack{z\to\xi \\ z\in h(\xi,\varphi_1)}} f(z)=f(\xi)$ для почти всех $\varphi\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, в том числе и для $\varphi=0$.

Доказательство. Известно[3], что необходимым и достаточным условием для представимости δ-субгармонической функции в виде двух отрицательных субгармонических функций $u(z)$ и $v(z)$ будет соотношение (1). Поэтому справедливы следующие оценки:

$$\int_0^{2\pi} u^+\left(\rho e^{i\theta}\right)d\theta=0(1) \text{ и } \int_0^{2\pi} v^+\left(\rho e^{i\theta}\right)d\theta=0(1) \text{ при } \rho\to 1 \qquad (3).$$

Отсюда, согласно известной теореме[7,8] о хордальных пределах субгармонических функций у функций $u(z)$ и $v(z)$, а, значит, и у функции $f(z)$ существуют равные хордальные пределы для почти всех $\varphi\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, в том числе и для $\varphi=0$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим ту же задачу при $\alpha>0$

Теорема 2. Пусть δ-субгармоническая в D функция $f(z)$, удовлетворяет условию (2). Тогда почти всюду на Γ, кроме, быть может, некоторого множества E, $mes\mathrm{E}=0$, функция $f_\alpha(z)$ имеет равные хордальные пределы $\lim\limits_{\substack{z\to\xi\in\Gamma\setminus E \\ z\in h(\xi,\varphi)}} f_\alpha(z)=f_\alpha(\xi)$ для почти всех $\varphi\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, в том числе и для $\varphi=0$.

Доказательство. В работе А.М. Джрбашяна[6] установлено, что если δ-субгармоническая функция $f(z)$ удовлетворяет условию (2), то функция $f_\alpha(z)=r^{-\alpha}D^{-\alpha}f(z)$ (где $\alpha>0$) представима в виде разности двух неположительных субгармонических функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$. Принимая во внимание, что для функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ справедливы соотношения (3), получим утверждение теоремы 2.

Теперь рассмотрим угловые граничные пределы δ- субгармонических функцй $f(z)$ из класса $\Re$.

Теорема 3. Пусть полунепрерывная сверху δ- субгармоническая функция $f(z)$ из класса $\Re$ удовлетворяет условию (1). Тогда всюду на Γ, кроме, быть может, некоторого множества E, $mesE=0$, функция $f(z)$ имеет конечные угловые пределы $\lim\limits_{z\to\xi\in\Gamma\setminus E} f(z)=f(\xi)$.

Доказательство. Действительно, в силу утверждения теоремы 1 функция $f(z)$ имеет всюду на Γ, кроме, быть может, некоторого множества E, $mes\mathrm{E}=0$, равные хордальные пределы $\lim\limits_{\substack{z\to\xi\\ z\in h(\xi,\varphi_1)}} f(z)=f(\xi)$ для почти всех $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, в том числе и для $\varphi=0$. Рассмотрим случай, когда $f(z)$ - полунепрерывная сверху функция класса $\Re$. Так как автором доказано, что любая полунепрерывная сверху функция класса $\Re$ непрерывна[9], то принимая во внимание утверждение следствия 1 из работы[10] о существовании конечных угловых граничных значений $\lim\limits_{z\to\xi\in\Gamma\setminus E} f(z)=f(\xi)$ у функций класса $\Re$ в точках, где существуют равные хордальные пределы $\lim\limits_{\substack{z\to\xi\\ z\in h(\xi,\varphi_1)}} f(z)=f(\xi)$ для почти всех $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, получим утверждение теоремы 3.

Аналогичные рассуждения с учетом теоремы 2 относительно δ-субгармонических функций $f(z)$ классов N_α, где $\alpha>0$, приводят к следующему результату.

Теорема 4. Пусть нормальная полунепрерывная сверху δ-субгармоничная функция $f(z)$ принадлежит классу N_α, где $\alpha>0$. Тогда всюду на Γ кроме, быть может, некоторого множества E, $mesE=0$, функция $f_\alpha(z)$ имеет конечные угловые пределы.

Замечание. Легко показать, что в рассмотренных теоремах, связанных с условиями (1) и (2), можно утверждать суммируемость функций $f_\alpha(e^{i\theta})$, где $f_\alpha(e^{i\theta})$ - могут быть, в зависимости от утверждения теорем, как хордальными, так и угловыми пределами данной функции $f_\alpha(z)$, где $\alpha\geq 0$.

Действительно, из вышеприведенных рассуждений следует, что при любом $\alpha\geq 0$ функция $f_\alpha(z)=f_1(z)-f_2(z)$, где $f_1(z)$ и $f_2(z)$ – неположительные субгармонические функции, которые удовлетворяют соотношениям (1) или (2). Из этих соотношений, в силу неположительности субгармонических функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$, имеем справедливость оценок:

$$\int_0^{2\pi} f_1^+(re^{i\theta})\,d\theta=\mathrm{O}(1) \text{ и } \int_0^{2\pi} f_2^+(re^{i\theta})d\theta=\mathrm{O}(1) \text{ при } r\to 1.$$

А это равносильно тому, что

$$\int_0^{2\pi}\left|f_1(re^{i\theta})\right|d\theta<+\infty,\quad \int_0^{2\pi}\left|f_2(re^{i\theta})\right|d\theta<+\infty,$$

С другой стороны, согласно лемме Фату, имеют место неравенства:

$$\int_0^{2\pi}\left|f_1(e^{i\theta})\right|d\theta\le\lim_{n\to1}\int_0^{2\pi}\left|f_1(re^{i\theta})\right|d\theta<+\infty,$$

$$\int_0^{2\pi}\left|f_2(e^{i\theta})\right|d\theta\le\lim_{n\to1}\int_0^{2\pi}\left|f_2(re^{i\theta})\right|d\theta<+\infty,$$

Отсюда, принимая во внимание, что

$\left|f_\alpha(e^{i\theta})\right|=\left|f_1(e^{i\theta})+f_2(e^{i\theta})\right|\le\left|f_1(e^{i\theta})\right|+\left|f_2(e^{i\theta})\right|,$ получим наше утверждение.

3 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в статье изучены некоторые граничные свойства различных классов δ - субгармонических функций, определенных в единичном круге. Ранее аналогичные результаты были известны для субгармонических функций.

REFERENCES

[1] S.L. Berberyan, V.I. Gavrilov, "Predelnie mnojestva neprerivnich I garmonicheskikh funkci po nekasatelnim granichnim putyam", Mathematica Montisnigri, Vol.1, 17-25(1993).

[2] D.C. Rung, "Asymptotic values of normal subharmonic functions", Math. Zeitshr., vol.84, №1, 9-15(1964).

[3] I.I. Privalov, "Subgarmonicheskie funktsii", M.L., NKTP SSSR, 199(1937).

[4] M.M. Djrbashyan, "Integralnie preobrasovaniya I predstavleniya funktsii v komplexnoi oblasti", M., "Nauka", 671(1966).

[5] A.A. Kilbas, Samko, Marichev, "Drobnie integrali, proisvodnie I nekotorie ikh prilojeniya", isdatelstvo "Nauka I tekhnika", 688(1987).

[6] A.M. Djrbashyan, "Rasshirenie teorii faktorisatsii M.M. Djrbashyana", Isv.NAN Armenii, Matematika, tom 30, №2, 47-75(1995).

[7] E.D. Solomentsev, "Garmonicheskie I subgarmonicheskie funktsii I ikh obobsheniya", sbornik Matematicheskii analis, Teoriya veroyatnosti, Regulirovanie, Itogi nauki, VINITI AN SSSR, M., 83-100(1964).

[8] M. Arsove, A. Huber, "On the existence of nontangential limits of subharmonic functions", Journal London Math. Soc., vol. 42, №1, 125-132(1967).

[9] S.L. Berberyan, "O nekotorikh svoistvakh poluneprerivnikh sverkhu funktsi klassa $\Re$", Sbornik nauchnikh statei, Isdatelstvo RAU, 9-13(2007).

[10] S.L. Berberyan, "O predelnikh mnojestvakh neprerivnikh funktsi klassa $\Re^{\theta}$", Ekologicheskii vestnik nauchnich tsentrov CHES, № 3, 5-9(2007).

Поступила в редакцию 15 января 2014 года