О НЕКОТОРЫХ НОВЫХ ГРАНИЧНЫХ СВОЙСТВАХ НОРМАЛЬНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С.Л. БЕРБЕРЯН[1*], Р.В. ДАЛЛАКЯН[2]

[1]Российско-Армянский (Славянский) Университет, Ереван,Армения

[2]Национальный Политехнический Университет Армении, Ванадзор, Армения

*Ответственный автор. E-mail: samvel357@mail.ru

DOI: 10.20948/mathmontis-2023-56-6

Ключевые слова: единичный круг, гармонические и голоморфные функции, обобщенные точки Плеснера и точки Фату, иррегулярные точки.

Аннотация. В настоящей работе исследуются некоторые граничные свойства нормальных гармонических функций, определенных в единичном круге D. Аналогичные результаты для мероморфных и голоморфных функций, определенных в D, рассматривались в работах профессора В. И. Гаврилова и других авторов. Далее рассмотрен вопрос существования иррегулярных точек у гармонических функций.

ON SOME NEW BOUNDARY PROPERTIES OF NORMAL HARMONIC FUNCTIONS

S.L. BERBERYAN[1*], R.V. DALLAKYAN[2]

[1]Russian-Armenian (Slavonic) University, Yerevan, Armenia

[2]National Polytechnic University of Armenia, Vanadzor, Armenia

* Corresponding author. E-mail: samvel357@mail.ru

DOI: 10.20948/mathmontis-2023-56-6

Summary. In this paper, some boundary properties of normal harmonic functions defined in the unit circle D are investigated. Similar results for meromorphic and holomorphic functions defined in D were considered in the works of Professor V. I. Gavrilov and other authors. Next, we consider the question of the existence of irregular points for harmonic functions.

1 ВВЕДЕНИЕ

В данной статье на нормальные гармонические функции распространяется теорема о равномерной ограниченности семейства нормальных голоморфных функций, полученная В. И. Гавриловым (см. [1]). Кроме того, в данной работе изучается граничное поведение нормальных гармонических функций вдоль некасательных и орициклических путей.Аналогичные вопросы для мероморфных функций рассматривались, в частности, в работах [2-5]. В пункте 3 рассматривается вопрос

2020 Mathematics Subject Classification: 30D40, 31A05.
Key words and Phrases: Unit circle, generalized Plesner points, Fatous points, irregular points.

существования иррегулярных точек у гармонических функций ,определенных в единичном круге. Получены достаточные условия для существования таких точек. Аналогичный вопрос для мероморфных функций рассмотрен В.И. Гавриловым в работе [6]. В работе будем придерживаться тех же обозначений, что и в статье [7]. Обозначим через D, Γ и $h(\xi,\varphi)$ соответственно единичный круг $|z|<1$, единичную окружность $|z|=1$ и хорду единичного круга D, оканчивающуюся в точке $\xi=e^{i\theta}\in\Gamma$ и образующую с радиусом в этой точке угол $\varphi; -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$. Пусть $\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$ обозначает подобласть круга D, ограниченную хордами $h(\xi,\varphi_1)$ и $h(\xi,\varphi_2)$. Область $\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$ называют обычно углом Штольца с вершиной в точке $\xi=e^{i\theta}\in\Gamma$ и если нас не интересует размер угла Штольца, мы будем обозначать его кратко $\Delta(\xi)$. Интерпретируя круг D, как модель плоскости в геометрии Лобачевского, обозначим через $\sigma(z_1,z_2)$ неевклидовое расстояние между точками z_1,z_2 из круга D:

$$\sigma(z_1,z_2)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u},\ \text{где}\ u=\left|\frac{z_1-z_2}{1-z_1\overline{z}_2}\right|.$$

Рассмотрим действительнозначную функцию $f(z)$. Для произвольного подмножества S круга D, для которого точка $\xi\in\Gamma$ является предельной точкой, обозначим через $C(f,\xi,S)$ предельное множество функции $f(z)$ в точке ξ относительно множества S, т.е. $C(f,\xi,S)=\bigcap\overline{f(S\bigcap U(\xi))}$, где пересечение берётся по всем окрестностям $U(\xi)$ точки ξ, а черта означает замыкание множества относительно двухточечной компактификации $\overline{R}$ множества $R=(-\infty,+\infty)$ в виде отрезка посредством добавления к точкам множества R символов $-\infty$ и $+\infty$. Точку $\xi\in\Gamma$ отнесём к множеству $F(f)$, если для любого угла Штольца предельные множества $C(f,\xi,\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2))$ состоят из единственного значения α. В этом случае говорят, что функция $f(z)$ имеет в точке $\xi\in\Gamma$ угловой предел α. Множество $F(f)$ называется множеством точек Фату для функции $f(z)$. Скажем, что $\zeta\in I(f)$, если $C(f,\zeta,\Delta(\zeta,\varphi_1,\varphi_2))=\overline{R}$ для любого угла $\Delta(\zeta,\varphi_1,\varphi_2)$ Множество $I(f)$ называется множеством точек Плеснера для функции $f(z)$. Скажем, что $\zeta\in I_*(f)$, если $C(f,\zeta,\Delta(\zeta,\varphi_1,\varphi_2))=C(f,\zeta,h(\zeta,\varphi))=\overline{R}$ для любых углов $\varphi,\varphi_1,\varphi_2$. Множество $I_*(f)$ называется множеством уточненных точек Плеснера. Точку $\xi\in\Gamma$ относят к множеству $K(f)$ для функции $f(z)$, определённой в D, если $C(f,\xi,\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2))=C(f,\xi,\Delta(\xi,\varphi_1',\varphi_2'))$ для любых углов $\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$ и $\Delta(\xi,\varphi_1',\varphi_2')$ с вершиной в точке ξ. Понятие нормальной функции, рассмотренное для мероморфных функций и состоящее в свойстве порождать нормальное семейство на группе Т всех конформных автоморфизмов области определения, было затем перенесено на гармонические и субгармонические функции [см., например, [8]). В случае единичного круга D группа Т состоит из элементов $T=\{S(z);S(z)=e^{i\alpha}(z+a)\cdot(1+\overline{a}z)^{-1}$, a -

произвольная точка в *D*, α-произвольное действительное число$\}$. Придерживаясь обозначений из работы [6] скажем, что действительнозначная функция $f(z) \in \Re$, если на группе Т всех конформных автоморфизмов единичного круга *D* порождаемое ею семейство функций $\Phi: \{f(S(z));\ S(z) \in \mathrm{T}\}$ нормально в *D* в смысле Монтеля, т. е. из любой последовательности $\{f(S_n(z))\}$ семейства Φ, где $S_n(z) \in \mathrm{T}$ можно извлечь подпоследовательность $\{f(S_{n_k}(z))\}$, равномерно сходящуюся на любом компакте *K* в *D* или равномерно расходящуюся к $-\infty$ или к $+\infty$ на *K*. Скажем (см. [9]), что точка А, лежащая в единичном круге, является иррегулярной точкой для последовательности $\{f(S_n(z))\}$семейства Φ, где $S_n(z) \in \mathrm{T}$, если не существует подпоследовательности, извлеченной из последовательности $\{f(S_n(z))\}$, которая бы равномерно сходилась в окрестности точки А. П. Лаппаном (см. [8]) было доказано, что гармоническая функция *u*(*z*), определенная в *D*, принадлежит классу $\Re$ тогда и только тогда, когда существует такое постоянное число $0<C_u<+\infty$, что

$$(1-|z|^2)*|grad u(z)|/(1+|u(z)|^2) \le C_u \qquad (1)$$

для всех точек $z \in D$. Введем дополнительные обозначения и определения. Пусть $\Lambda(\xi)$- орицикл круга *D* в точке ξ, т. е. окружность радиуса меньше единицы, касающаяся изнутри окружности Г в точке ξ. Два орицикла, $\Lambda^1(\xi)$, $\Lambda^2(\xi)$ круга *D* в точке ξ ограничивают некоторую односвязную область, которую диаметр круга *D*, проведенный в точку $\xi \in \Gamma$, делит на две равные части, называемые левым орициклическим углом $O^-\Delta(\xi)$ и правым орициклическим углом $O^+\Delta(\xi)$ в точке $\xi \in \Gamma$. Для гармонической в *D* функции *u(z)* рассмотрим предельные множества $C(u,\xi,O^+\Delta(\xi))$ и $C(u,\xi,O^-\Delta(\xi))$ в точке $\xi \in \Gamma$ по правому и левому орициклическим углам $O^+\Delta(\xi))$ и $O^-\Delta(\xi))$, и, следуя Багемилу (см. [2] или [3]), назовем точку $\xi \in \Gamma$ орициклической точкой Фату функции *u(z)*, если множество $UC(u,\xi,O\Delta(\xi))$, в котором объединение берется как по всем правым орициклическим углам $O^+\Delta(\xi)$, так и по всем левым орициклическим углам $O^-\Delta(\xi)$, состоит из единственного значения $\{\alpha\}$, $\alpha \in \overline{R}$ Если же $\bigcap C(u,\xi,O\Delta(\xi))=\overline{R}$, где пересечение также берется по всем орициклическим углам с вершиной в точке $\xi \in \Gamma$, то точку ξ называют орициклической точкой Плеснера функции *u(z)*. Если граничная точка ξ является в одно и то же время обыкновенной точкой Плеснера и орициклической точкой Плеснера для функции *u*(*z*), то точку ξ назовем, как и в случае мероморфных функций, обобщенной точкой Плеснера для гармонической функции *u*(*z*). Множество таких точек обозначим через $I_1(u)$.Если в точке $\xi \in \Gamma$ для функции *u(z)* справедливо соотношение

$$C(u,\xi,\Lambda_\zeta^-)= C(u,\xi,\Lambda_\zeta^+)= C(u,\xi,h(\xi,\varphi_1))=\bar{R}$$

для любых левых, правых орициклов $\Lambda_\zeta^-, \Lambda_\zeta^+$ и любых хорд $h(\xi,\varphi_1)$,то точку $\xi \in \Gamma$ назовем уточненной обобщенной точкой Плеснера. Обозначим множество таких точек через $I_1^*(u)$. Для произвольных точек *a*, $b \in D$ и кривой *L*, лежащей в *D*, положим

$$\sigma(a,L)=\inf\{\sigma(a,b);b\in L\}$$

Известно следующее свойство орициклов: для произвольных точек z_1 и z_2, лежащих на орицикле $\Lambda^1(\xi)$ и произвольного другого орицикла $\Lambda^2(\xi)$ имеем $\sigma(z_1,\Lambda^2(\xi))=\sigma(z_2,\Lambda^2(\xi))=const.$

Обозначим через R_C (см. [1]) множество всех нормальных гармонических функций $u(z)$, которые удовлетворяют неравенству (1) с постоянными C_u, где C_u - некоторое положительное постоянное число. Следуя В. И. Гаврилову (см. [1]), скажем, что последовательность точек, $z_n \in D$, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют условию (A_{ζ_0}), если имеет место следующее:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\zeta_0$, где $\zeta_0\in\Gamma$

2) Для некоторых значений $\alpha_0, 0<\alpha_0<\pi/2$ и $\delta_0, 0<\delta_0<1$, все точки $z_n\in\Delta(\zeta_0,\alpha_0,\delta_0), n=1,2,\ldots$, где $\Delta(\zeta_0,\alpha_0,\delta_0), n=1,2,\ldots$ - множество точек

$\{z, z\in D, |\arg(1-z/\zeta_0)|<\pi/2-\alpha_0, |z-\zeta_0|<\delta_0, 0<\delta_0<1, 0<\alpha_0<\pi/2\}$,

3) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sigma(z_n,z_{n+1})<+\infty$.

Отметим, что в дальнейшем рассматривая любое свойство, справедливое для всех $\xi\in\Gamma$, кроме, быть может, некоторого множества E, линейная мера которого равна нулю, скажем, что это свойство имеет место почти всюду на Γ. Для дальнейшего приведем также следующие известные утверждения.

Теорема A (см. [2] или [3]). Пусть $f(z)$ - произвольная мероморфная фукнкция, определенная в D. Тогда каждая точка $\xi\in\Gamma$, за возможным исключением множества меры нуль, является либо точкой Фату, либо обобщенной точкой Плеснера для функции $f(z)$.

Теорема B (см. [10]). Пусть $f(z)$ - субгармоническая функция класса $\Re$ и для некоторой последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=1$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=c$ $(-\infty\le c\le+\infty)$. Тогда для любой последовательности $\{z_n'\}$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma(z_n,z_n')=0$, справедливо соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n')=c$.

Заметим, что в теореме B нам достаточно рассмотреть случай, когда наша функция *f(z)* является гармонической функцией класса $\Re$.

Теорема C (см. [11]). Пусть *f(z)* - гармоническая в *D* функция из класса $\Re$. Если $\xi=e^{i\theta}\in K(f)$, то для любых значений $\varphi,\varphi_1,\varphi_2\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ справедливо соотношение $C(f,\xi,h(\xi,\varphi))=C(f,\xi,\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2))$.

2 ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Сформулируем один из основных результатов данной работы.

Теорема 1. *Пусть для гармонических функций* $u(z) \in R_C$ *имеет место*

$$u(z_n) < B < +\infty, \text{ (или } u(z_n) > B > -\infty) \quad n = 1, 2, \dots, \qquad (2)$$

на некоторой последовательности $\{z_n\}$*, удовлетворяющей условию* (A_{ζ_0})*. Тогда для любых значений* α *и* δ*,* $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$*,* $0 < \delta < 1$ *можно найти такое число* $K = K(\alpha;\, \delta, B, C)$*, не зависящее от функции* $u(z)$*, что*

$$u(z) < K, \text{ (или } u(z) > K) \;\; z \in \Delta(\xi, \alpha, \delta). \qquad (3)$$

Доказательство. Без нарушения общности предположим, что $u(z) < B$ для $z \in \Delta(\xi_0, \alpha, \delta)$ и произвольных $u(z) \in R_C$. Для каждой фиксированной гармонической функции $u(z) \in R_C$ рассмотрим одну из гармонически сопряженных к $u(z)$ функций $v(z)$. Обозначим через E множество голоморфных функций $f_u(z) = \exp\{u(z) + iv(z)\}$. В силу теоремы Лаппана (см. [11]) функции $f_u(z)$ будут нормальными голоморфными функциями, определенными в D. Принимая во внимание утверждение леммы из работы [12] и определение множества R_C, получим для любой голоморфной функции $f_u(z)$, где $u(z) \in R_C$, неравенство

$$(1-|z|^2).|f_u^{/}(z)|/(1+|f_u(z)|^2) \le (1-|z|^2).|gradu(z)|/(1+|u(z)|^2) \le C_u \le C\,. \qquad (4)$$

С другой стороны, легко видеть, что для любой функции $f_u(z)$, где $u(z) \in R_C$, в силу неравенства (2) имеет место $|f_u(z_n)| \le \exp\{B\}$ по последовательности $\{z_n\}$, удовлетворяющей условию (A_{ζ_0}). Таким образом, для функций $f_u(z)$, где $u(z) \in R_C$, выполнены условия теоремы 8 в работе [1]. Согласно утверждению этой теоремы можно найти такое число $Q = Q(\alpha, \delta, B, C)$, не зависящее от функций $f_u(z) \in E$, что $|f_u(z)| < Q$ для всех точек $z \in \Delta(\xi_0, \alpha, \delta)$. Отсюда непосредственно вытекает, что для любой функции $u(z) \in R_C$ справедливо неравенство $u(z) < \ln Q = K$ для $z \in \Delta(\xi_0, \alpha, \delta)$. Предполагая, что $u(z_n) \ge -B$ по последовательности $\{z_n\}$, удовлетворяющей условию (A_{ζ_0}), рассмотрим гармоническую функцию $u_1(z) = -u(z)$ и проведем те же рассуждения, что и выше. Получим, что $u_1(z) < K$ для любой точки $z \in \Delta(\xi_0, \alpha, \delta)$ и $u_1(z) \in R_C$. Следовательно, $u(z) > -K$ для любой точки $z \in \Delta(\xi_0, \alpha, \delta)$ и произвольной функции $u(z) \in R_C$. Отсюда следует утверждение теоремы 1.

Рассмотрим уточнение теоремы Плеснера для гармонических функций класса $\Re$, касающегося граничного поведения этого класса функций вдоль орициклических путей. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Для произвольной гармонической функции u(z) класса* $\Re$ *имеет место разложение* $\Gamma = F(u) \cup I_1^*(u) \cup E$*, где* $mesE = 0$

Предварительно докажем лемму.

Лемма 1. *Пусть u(z)-гармоническая функция класса* $\mathfrak{R}$, *определенная в* D *и* $\zeta \in I_1(u)$. *Тогда справедливы соотношения*
$C(u,\xi,\Lambda_\zeta^-) = C(u,\xi,\Lambda_\zeta^+) = C(u,\xi,h(\xi,\varphi)) = \overline{R}$, для любой хорды $h(\xi,\varphi)$ и для любых орициклов Λ_ζ^-, Λ_ζ^+, т.е. $\zeta \in I_1^*(u)$.

Доказательство. Утверждение, что $C(u,\xi,h(\xi,\varphi)) = \overline{R}$ для любой хорды $h(\xi,\varphi)$ следует из теоремы *C*. Чтобы доказать утверждение леммы для орициклов, без нарушения общности, достаточно рассмотреть левые орициклы Λ_ζ^-.

Предположим, что найдется левый орицикл Λ_ζ^- и такое значение $\alpha \in \overline{R}$, что $\alpha \notin C\left(u,\overline{\zeta},\Lambda_\zeta^-\right)$. Рассмотрим последовательность таких левых орициклических углов $(O^-\Delta(\zeta))^{(k)}, k = 1,2,...,$ что $\bigcap_{k=1}^{\infty}(O^-\Delta(\zeta))^{(k)} = \Lambda_\zeta^-$. В каждом из этих орициклических углов выберем такую последовательность $z_n^{(k)} \in (O^-\Delta(\zeta))^{(k)}$, $z_n^{(k)} \in (O^-\Delta(\zeta))^{(k)}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n^{(k)} = \zeta$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u(z_n^{(k)}) = \alpha$. В силу свойств неевклидовой геометрии можно выбрать из множества последовательностей $\{z_n^{(k)}\}$, где $k = 1,2,\ldots$; $n = 1,2,\ldots$, такую последовательность $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$, что $\lim\limits_{m\to\infty} z_m = \zeta$, $\lim\limits_{m\to\infty} u(z_m) = \alpha$ и $\lim\limits_{m\to\infty} \sigma(z_m, z_m') = 0$, где $\{z_m'\}$ – последовательность точек, лежащих на Λ_ζ^-.

Согласно утверждению теоремы B для гармонических функций класса $\mathfrak{R}$ получим $\lim\limits_{m\to\infty} u(z_m') = \alpha$, что противоречит предположению. Полученное противоречие доказывает утверждение леммы.

Доказательство теоремы 2. Легко видеть, что почти все точки множества *F(f)*, где *f(z) = exp{u(z) + iV(z)}*, голоморфная в D функция, являются также точками множества $F(u)$, а все точки множества $I_1(f)$ в силу непрерывности $u(z)$ и связности произвольных орициклических углов $O\Delta(\zeta)$ будут принадлежать множеству $I_1(u)$. Из утверждения леммы следует, что эти точки принадлежат также множеству $I_1^*(u)$. Отсюда, принимая во внимание утверждение теоремы A и соотношения $F(f) \subseteq F(u)$, $I_1^*(f) \subseteq I_1^*(u)$ получим, что $\Gamma = F(u) \cup I_1^*(u) \cup E$, где $mesE = 0$. Утверждение теоремы 2 доказано.

Следствие. Пусть *u(z)*-гармоническая функция класса $\mathfrak{R}$, определенная в D, и в каждой точке $\zeta \in E \subset \Gamma$, где $mesE > 0$, можно провести правый (или левый) орицикл $\Lambda_\zeta^+ (или \Lambda_\zeta^-)$ такой, что $C(u,\zeta,\Lambda_\zeta^+) \neq \overline{R}$ (или $C(u,\zeta,\Lambda_\zeta^-) \neq \overline{R}$).Тогда почти в каждой точке $\zeta \in E$ функция $u(z)$ имеет конечные угловые пределы.
Утверждение следствия легко следует из теоремы 2.

Замечание. Отметим, что утверждение следствия было известно в случае (см. [14]), когда вместо орициклов рассматривались хорды. Из условия, что в некоторой точке $\zeta \in \Gamma$ гармоническая функция класса $\mathfrak{R}$ имеет предел по некоторому орициклу $\Lambda_\zeta^+ (или \Lambda_\zeta^-)$ не всегда следует существование углового предела в той же точке.

Для этого достаточно рассмотреть ограниченную гармоническую функцию $u(z) = \arg(1-z)$ в точке $\zeta = 1$. Эта функция является гармонической функцией класса $\mathfrak{R}$. Легко видеть, что предел функции u(z) по любому левому орициклу Λ_ζ^- в точке $\zeta = 1$ равен $-\pi/2$, а по любому правому орициклу Λ_ζ^+ равен $\pi/2$. Очевидно, что arg(*1*-*z*) не имеет в точке $\zeta = 1$ углового предела. Для существования углового предела для гармонических функций класса $\mathfrak{R}$ в конкретной точке $\zeta \in \Gamma$ необходимо на эти функции поставить дополнительные условия (см. например, [15-17]).

3 ИССЛЕДОВАНИЕ ИРРЕГУЛЯРНЫХ ТОЧЕК

В данном пункте рассмотрим, при каких условиях существуют иррегулярные точки у гармонических функций в единичном круге. Аналогичные исследования для мероморфных функций проведены в работе [6].

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть гармоническая в D функция u(z) имеет (конечный или бесконечный) предел* $\lim\limits_{n\to\infty} u(z_n) = c$ *по некоторой последовательности точек* $\{z_n\}$, $z_n \in D$, $n = 1,2,\ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 1$ *и существует такая последовательность положительных чисел* $\delta_n \to 0,$ *что в каждом неевклидовом круге* $D(z_n, \delta_n)$ *имеется точка* z'_n, *в которой* $|u(z'_n - c)| \geq \varepsilon_0$, *если с-конечное число и* $|u(z'_n)| \leq 1/\varepsilon_0$, *если* $c = -\infty$ *или* $+\infty$ *и* $\varepsilon_0 > 0 -$ *фиксированное число. Тогда точка* $z = 0$ *является иррегулярной точкой для последовательности функций* $\{u_1(z, z_{n_k})\}$, *где* $u_1(z, z_{n_k}) = u\left((z + z_{n_k}) / (1 + \bar{z}_{n_k} z)\right)$ *и* $\{z_{n_k}\} -$ *любая бесконечная подпоследовательность последовательности* $\{z_n\}$.

Доказательство. Доказательство ведем по схеме, предложенной в работе [18]. Доказываем теорему методом от противного. Это значит ,что из последовательности $\{u(z, z_{n_k})\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{u(z, z'_{n_k})\}$, которая равномерно сходится к гармонической функции или к $+\infty(-\infty)$ в некотором круге $|z| \leq \lambda, 0 < \lambda < 1$. Рассмотрим при любом фиксированном к дробно-линейное отображение $S_{n_k}(z) = (z + z'_{n_k}) / (1 + \bar{z}'_{n_k} z), k = 1,2,\ldots,$ переводящее точки $z = 0$ и $z = t_{n_k}$ соответственно в точки $z_{n_k} = S_{n_k}(0)$ и $z'_{n_k} = S_{n_k}(t_{n_k})$. В силу инвариантности неевклидовой метрики σ при дробно-линейных отображениях единичного круга на себя имеем $\sigma(0, t_{n_k}) = \sigma(z_{n_k}, \bar{z}'_{n_k})$, и следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma(0, t_{n_k}) = 0$. Значит $\lim\limits_{k\to\infty} t_{n_k} = 0$. Имеем с одной стороны, $\lim\limits_{k\to\infty} u(0, z_{n_k}) = \lim u(z_{n_k}) = c$, а с другой стороны,

$\lim\limits_{k\to\infty} u\left(t_{n_k}, \bar{z}'_{n_k}\right) = \lim u\left(\bar{z}'_{n_k}\right) \neq c$. Но это будет противоречить равномерной сходимости подпоследовательности $\{u(z, z'_{n_k})\}$ в точке $z = 0$, так как предельная функция должна была быть или гармонической функцией или тождественна, равна $+\infty(-\infty)$. Полученное противоречие доказывает теорему 3.

4 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе, во-первых, изучена равномерная ограниченность множества нормальных гармонических функций. Аналогичная задача для множества нормальных голоморфных функций рассматривалась профессором В.И. Гавриловым [1]. Насколько авторам известно, другой работы о равномерной ограниченности множества нормальных функций, определенных в единичном круге, не было. Интересно было бы распространить теорему о равномерной ограниченности на множество нормальных субгармонических функций. Ранее одним из авторов настоящей статьи (см. [13]) было получено уточнение классической теоремы Плеснера, касающегося граничного поведения гармонических функций вдоль хорд. В настоящей работе получено уточнение теоремы Плеснера для нормальных гармонических функций относительно граничного поведения, как вдоль хорд, так и вдоль орициклов. Исследование граничного поведения функций, определенных в единичном круге, вдоль орициклов, представляет самостоятельный интерес. Кроме того, в данной статье, рассматриваются достаточные условия существования иррегулярных точек у гармонических функций. Аналогичная задача для мероморфных функций рассматривалась профессором В.И. Гавриловым в работе [6]. Интересно было бы продолжить исследование поведения гармонических функций в окрестности иррегулярных точек и рассмотреть поведение субгармонических функций в окрестности иррегулярных точек.

REFERENCES

[1] V.I. Gavrilov, “Predely po nepreryvnym krivym i po posledovatel'nostyam tochek normal'nykh meromorfnykh i obobshchennykh meromorfnykh v edinichnom kruge funkcij”, *Vestnik MGU, Seriya 1, Matematika, Mekhanika*, **1**, 44-55 (1964).

[2] F. Bagemihl, “Horocyclic boundary properties of meromorphic functions”, *Annal. Acad. Scien. Fennicae*, Ser. AI (385), 1-18 (1966).

[3] V.I. Gavrilov “O granichnyh teoremakh edinstvennosti”, *Izvestiya AN Arm. SSR, Matematika*, **4(**4), 244-258 (1969).

[4] Z.H. Pavichevich, E. Shushich, “Primenenie ciklicheskikh svojstv dinamicheskikh sistem k izucheniyu granichnykh predelov proizvol'nykh funkcij”, *Doklady RAN*, **387(**1), 16-18 (2002).

[5] V.I. Gavrilov, Z.H. Pavichevich, “Granichnye osobennosti meromorfnykh funkcij s summiruemoj sfericheskoj proizvodnoj i annulyarnykh funkcij. Rassmotrenie”, *Math. Montis*., **51**, 5-17 (2021).

[6] V.I. Gavrilov, “O raspredelenii znachenij meromorfnykh v edinichnom kruge funkcij, ne yavlyayushchikhsya normal'nymi”, *Matem. sbor*., **67(109)** (3), 408-427 (1965).

[7] V.I. Gavrilov, “Normalnie funktsii i pochti periodicheskie funktsii”, *DAN SSSR*, **240** (4), 768-770 (1978).

[8] P. Lappan, “Some results on harmonic normal functions”, *Mathematische Zeitschrift*, **90**(1), 155-159 (1965).

[9] P. Montel, *Normal'nye semejstva funkcij*, ONTI SSSR, (1936).
[10] S.L. Berberyan, “Ob uglovykh granichnykh znacheniyakh normal'nykh subgarmonicheskikh funkcij”, *Pliska Mathematica Bulgarica*, **10**, 50-55 (1989).
[11] S.L. Berberyan, V.I. Gavrilov, “Predelnie mnozhestva neprerivnich i garmonicheskih funktsii po nekasatelnim granichnim putyam”, *Math. Montis*., **1**, 17-25 (1993).
[12] P. Lappan, “Fatou points of harmonic normal functions and uniformly normal functions”, *Mathematische Zeitschrift*, **102(**3), 110-114 (1967).
[13] S.L. Berberyan, “Ob utochnenii teoremy Plesnera i o tochkakh Plesnera dlya proizvol'nykh garmonicheskikh funkciJ”, *Vestnik MGU. Seriya 1, Matematika. Mekhanika*, **4**, 58-61 (2017).
[14] I.I. Privalov, *Granichnye svojstva analiticheskikh funkcij*, M.L., GITTL, (1950).
[15] D.C. Rung, “ Boundary behaviour of normal functions defined in the unit disk”, *Mich. Math. J.*, **10(**1), 43-51 (1963).
[16] J. Meek, “Of Fatous points of normal subharmonic functions”, *Mathematica Japonica*, **22(**3), 309-314 (1977).
[17] S.L. Berberyan, “O granichnikh osobennostyakh normalnikh subgarmonicheskikh funktsii”, *Math. Montis.*, **18-19**, 5-14 (2005-2006).
[18] F. Bagemihl, W.Seidel, “Sequental and continuous limits of meromorphic functions”, *Annal. Acad. Scien. Fennicae*, **Ser.A**, (280), 1-17 (1960).

Received, September 30, 2022