In Memoriam

ГРАНИЧНЫЕ ОСОБЕННОСТИ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С СУММИРУЕМОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ПРОИЗВОДНОЙ И АННУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ. РАССМОТРЕНИЕ

В.И. ГАВРИЛОВ[1], Ж. ПАВИЧЕВИЧ [2,3]*

[1]Механико-математичекий факултет, Московский государственый университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

[2] Факультет естественных наук и математики, Университет Черногории, Подгорица, Черногория;

[3]Национальный исследовательский ядерный университет НИЯУ «МИФИ», Москва, Россия

* Corresponding author. E-mail: zarkop@ucg.ac.me

DOI: 10.20948/mathmontis-2021-51-1

Ключевые слова: Граничное поведение мероморфных функций, функций с интегрируемой сферической производной, P-последовательности, аннуларные голоморфные функции.

Аннотация. В статье сформулированы классические теоремы о граничном поведении мероморфных функций Плеснера и Мейера и их уточнение и усиление теореми Гаврилова[1] и Канатникова. Представлено приложение этих теорем к классам мероморфных функций с интегрируемой сферической производной и аннуларных голоморфных функций. Сформулированы теорема Коллингвуда о граничных особеностях функци Цудзи и теоремы Канатникова. Теоремы Канатникова усиливают и обобщают теорему Коллингвуда на более широкие классы мероморфных функций с суммируемыми сферическими производными. Особое внимание уделяется предельным свойствам аннуларных голоморфных функций. Рассматривается поведение аннуларных голоморфных функций на границе единичного круга. Показано что P-последовательности Гаврилова играют важную роль в изучении граничных свойств голоморфных и мероморфных функций.

[1] Профессор Валериан Иванович Гаврилов скончался 26 мая 2016 г. на 82-ом году жизни.
Эта статья - результат моего разговора с профессором Гавриловым в 2015 и 2016 годах и наших письменных материалов того времени.

2010 Mathematics Subject Classification: 30D30, 30D40.
Key words and Phrases: Boundary Behavior of Meromorphic Functions, Functions with Integrable Spherical Derivative, Annular Holomorphic Functions, P-sequences.

In Memoriam

BOUNDARY CHARACTERISTICS OF MEROMORPHIC FUNCTIONS WITH SUMMABLE SPHERICAL DERIVATION AND ANNULAR FUNCTIONS. CONSIDERATION

V.I. GAVRILOV[1], Ž. PAVIĆEVIĆ[2,3]*

[1]Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

[2]Faculty of Sciences and Mathematics, University of Montenegro, Podgorica, Montenegro;

[3]National Research Nuclear University "MEPhI", Moscow, Russia

* Corresponding author. E-mail: zarkop@ucg.ac.me

DOI: 10.20948/mathmontis-2021-51-1

Summary. In this paper we formulate classical theorems Plesner and Meyer on the boundary behavior of meromorphic functions and their refinement and strengthening - Gavrilov's[2] and Kanatnikov's theorems. An application of these theorems to classes of meromorphic functions with integrable spherical derivative and annular holomorphic functions is presented. Collingwood's theorem on boundary singularities of the Tsuji function as well as Kanatnikov's theorems are formulated. Kanatnikov's theorems strengthen and generalize Collingwood's theorem to broader classes of meromorphic functions with summable spherical derivatives. Special attention is paid to the boundary properties of annular holomorphic functions. The behavior of annular holomorphic functions on the boundary of the unit circle is considered. It is shown that Gavrilov's P-sequences play an important role in the study of the boundary properties of holomorphic and meromorphic functions.

1 ВВЕДЕНИЕ

Понятие *предельного множества* являеется главным инстументом при изучении *граничных свойств функций.* Это понятие введено П. Пенлеве в 1895 году для изучения поведения аналитических - голоморфных функций в окресности её особой точки.

Первыми результатами из теории предельных множеств являются теорема Сохоцкого-Вейерштрасса-Казорати (Сохоцкий и Казорати 1868 г. и в 1876 г. Вейерштрасс) и теоремы Пикара, [1] 1879 г., и Жюлиа [2], 1924 г., о предельных множествах голоморфных функций в изолированной особой точке, а также и теоремы Фату и Линделёфа о предельном множестве в граничной точке области определения этих функций.

Дальнйший существенный вклад в эту теорю в первой половине XX века заложили благодаря своим работам П. Пенлаве, Ф. Иверсен, В. Гросс, В.В. Голубев, Н.Н. Лузин, И.И. Привалов, К. Каратеодори, Ф. Бейджмил, В. Зейдель, А. Бёорлинг, Ф. Рисс, М.

[2] Professor Valerian Ivanovich Gavrilov died on May 26, 2016 at the age of 82.
This article is the result of my conversation with Professor Gavrilov in 2015 and 2016 and written materials from that time.

Рисс, Р. Неванлина, И.И. Плеснер, К. Носиро и др., а во второй половине XX века существенный вклад внесли Л. Альфорс, О. Лехто, Г. Пиранян, Л. Карлрсон, М. Цудзи, А.Г. Витушкин, Е.П. Долженко, Э. Коллингвуд, В.И. Гаврилов, Г. Меклейн, Г.Ц. Тумаркин, Дж. Дуб, А. Ловатор и т.д.

В 1941-ом году выходит монография И.И. Привалова [3], а 1960-их годах выходят монографии К. Носиро [4] и Э. Коллингвуда и А. Ловатора [5], а в 1973-ом году обзорная статья А. Ловатора [6], посвященные предельными множествам и граничным свойствам функций (смотри, также [7]).

Основные утверждения в теории предельных множеств – это *теоремы Фату, Плеснера и Мейера* (см. [3-6]). На основе этих результатов в XX веке была разработана целая математическая теория предельных множеств.

За последние сорок лет XX века в рамках этой теории было опубликовано большое количество статей, в которых изучались граничные свойства различных классов функций, особенно классов голоморфных и мероморфных функций одного комплексного переменного.

В статье представлены граничные свойства мероморфных и голоморфных функций, определенных на единичном круге комплексной плоскости.

Представлены классические теоремы Плеснера и Мейера, их уточнение и усиление теореми Гаврилова и Канатникова, сформулированными в разделе 2.

В разделе 3 представлено применение теоремы из раздела 2 к классам мероморфных функций с интегрируемой сферической производной и к аннуларным голоморфным функциям. Приведенная теорема Коллингвуда, которая относится на граничные особенности функции Цудзи и теорем Канатникова, усиливающих и обобщающих теорему Коллингвуда на более широкие классы мероморфных функций с суммирующими сферическими производными.

В разделе 4 особое внимание уделяется предельным свойствам аннуларных голоморфных функций. Рассматривается поведение этих функций на границе и доказано для них несколько утверждений.

Заключение, раздел 5, содержит комментарий о перспективе дальнейших исследований.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Через C, $\overline{C} = \Omega = C \cup \{\infty\}$, D, Γ и $h(\xi,\varphi)$ обозначим соответственно: z-комплексную плоскость, расширенную комплексную плоскость или сферу Римана, единичный круг $|z| < 1$, единичную окружность $|z| = 1$ и хорду единичного круга D, оканчивающуюся в точке $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma$ и образующую с радиусом в этой точке угол φ, $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$. Пусть $\Delta(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$ — подобласть круга D, ограниченная хордами $h(\xi,\varphi_1)$ и $h(\xi,\varphi_2)$. Область $\Delta(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$ называют углом Штольца с вершиной в точке $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma$. Если нас не интересует размер угла Штольца, будем обозначать его кратко $\Delta(\xi)$.

Интерпретируя круг D, как модель плоскости в геометрии Лобачевского, через $\sigma(z_1,z_2)$ обозначим неевклидово расстояние между точками z_1, z_2 из круга D:

$$\sigma(z_1,z_2) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}, \quad u = \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\overline{z_2}}\right|,$$

и

$$d(z,w)=\begin{cases}\dfrac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|}\cdot\sqrt{1+|w|}}, & z, w\in C;\\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}, & z\in C,\ w=\infty\end{cases}$$

сферическое расстояние на римановой сфере $\overline{C}=C\cup\{\infty\}=\Omega$.

Для мероморфной функции $f:D\to\Omega$

$$f^*(z)=\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2},\ z\in D,$$

представляет сферическую производную функции f.

Для $A\subset D$, $\overline{A}\cap\Gamma=\{e^{i\theta}\}$, обозначим $\overline{A}$ замыканием множества A, а

$$C\left(f,A,e^{i\theta}\right)=\left\{\ \omega\ \middle|\ \omega\in\Omega,\ (z_n)\subset A,\ \lim_{n\to\infty}z_n=e^{i\theta},\ \lim_{n\to\infty}f(z_n)=\omega\right\}$$

граничное множество функции $f:D\to\Omega$, соответствующей точки $e^{i\theta}$, относительно множества A. Известно, что $C\left(f,A,e^{i\theta}\right)=\overline{C\left(f,A,e^{i\theta}\right)}$.

В случае, если $f(z)$ имеет предел, при $z\to e^{i\theta}$, $z\in h(\theta,\alpha)$, этот предел будем обозначать через $f(\theta,\alpha)$.

Точку $\xi\in\Gamma$ отнесем к множеству $F(f)$, если объединение множеств $C(f,\xi,\Delta(\xi))$ по всем углам $\Delta(\xi)$ состоит из единственного значения α, $\alpha\in\Omega$. В этом случае говорят, что функция $f(z)$ имеет в точке $\xi\in\Gamma$ угловой предел α. Множество $F(f)$ называется множеством *точек **Фату*** для функции $f(z)$.

Точку $\xi\in\Gamma$ относят к $I(f)$, если предельное множество $C(f,\xi,\Delta(\xi))=\Omega$ для любого угла $\Delta(\xi)$. Семейство $I(f)$ называется множеством *точек **Плеснера*** для функции $f(z)$.

Следующая теорема даёт метрическую характеристику предельного множества мероморфной на D функции:

Теорема 1 (*теорема Плеснера*, [8], см. нпр. [5], стр. 196**).** *Если $f:D\to\Omega$ мероморфная функция, то $\Gamma=F(f)\cup I(f)\cup E$, где множество E имеет линейную меру нуль.*

Последовательность точек (z_n), $z_n\in D$, $n=1,2,\ldots$, $\lim_{n\to\infty}|z_n|=1$, следуя В.И. Гаврилову [9], назовем ***P*-последовательностью** для мероморфной функции $f(z)$, если для любого $\varepsilon>0$ в объединении $\bigcup_{k=1}^{\infty}D\left(z_{n_k},\varepsilon\right)$ неевклидовых кругов $D\left(z_{n_k},\varepsilon\right)$ с неевклидовыми центрами z_{n_k} и неевклидовыми радиусами $\varepsilon > 0$ функция $f(z)$ принимает бесконечно часто каждое значение с Ω, за исключением, быть может, двух. Хорду $h(\xi,\varphi)$, $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$, называют ***P*-хордой** функции $f(z)$ в точке $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma$, если $h(\xi,\varphi)$ содержит некоторую P-последовательность функции $f(z)$. Точку $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma$ отнесем к множеству $P(f)$, если каждая хорда $h(\xi,\varphi)$, $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$, будет P-хордой функции $f(z)$.

Важным множеством, изучаемым в теории предельных множеств, является также множество $J(f)$ *точек* ***Жюлиа*** функции $f(z)$. Точку $\xi = e^{i\theta}\in\Gamma$ относят к множеству $J(f)$, если в каждом углу $\Delta(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$, $-\pi/2 < \varphi_2 < \varphi_1 < \pi/2$, с вершиной в точке $\xi = e^{i\theta}\in\Gamma$, функция $f(z)$ принимает бесконечно часто каждое значение из Ω, за исключением, быть может, двух. Для $\xi \in J(f)$ каждая хорда $h(\xi,\varphi)$ называется ***сегментом Жюлиа*** функции f *в точке* ξ.

Из определений множеств $P(f)$, $J(f)$ и $I(f)$ непосредственно следует, что вложение $P(f)\subset J(f)\subset I(f)$ справедливо для любой мероморфной функции $f(z)$ (см. [10]). Обратное вложение, вообще говоря, не имеет места (см. теорему 3 в [11]; полное доказательство этого утверждения содержится в [12]), т.е. существуют в единичном круге мероморфные функции, где включения строгие.

Точку $\xi = e^{i\theta}\in\Gamma$ отнесем к множеству $I^*(f)$, если ни одна хорда $h(\xi,\varphi)$, $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$, не содержит P-последовательность и $C(f,\xi,h(\xi,\varphi)) = \Omega$ для каждой хорды $h(\xi,\varphi)$, $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$. Множества $P(f)$ и $I^*(f)$ являются непересекающимися подмножествами множества $I(f)$.

Теорема 2 (*теорема Гаврилова*, [10, 11]). *Если $f: D \to \Omega$ мероморфная функция, то $I(f) = P(f)\cup I^*(f)\cup E$, где множество E имеет линейную меру нуль и является множеством первой категории.*

Следующий результат усиливает теорему Плеснера:

Теорема 3 (*теорема Гаврилова*, [11]). *Для любой мероморфной в D функции $f(z)$ имеем $\Gamma = F(f)\cup P(f)\cup I^*(f)\cup E$, где множество E имеет линейную меру нуль.*

Точку $\xi \in \Gamma$ отнесем к множеству $M(f)$ если $C\left(f,D,e^{i\theta}\right)\neq\Omega$ и $C\left(f,h(e^{i\theta},\varphi),e^{i\theta}\right) = C\left(f,D,e^{i\theta}\right)$, для всех φ, $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$. Множество $M(f)$ называется множеством *точек* ***Мейера*** для функции $f(z)$.

Теорема 4 (*теорема Мейера*, [6, 13], см. нпр. [5], стр. 204). *Если $f: D \to \Omega$ мероморфная функция, то $\Gamma = M(f)\cup I(f)\cup E$, где E — множество первой категории.*

Следующий результат усиливает и уточняет теорему *Мейера*:

Теорема 5 (*теорема Гаврилова*, [11,14]). *Для любой мероморфной в D функции $f(z)$ имеем $\Gamma = M(f)\cup P(f)\cup I^*(f)\cup E$, где E — множество типа F_σ и первой категории.*

Теорема 6 (*теорема Гаврилова- Канатникова*, [14]). *Для произвольной мероморфной функции $f(z)$, определенной в D, множество $M(f)$ имеет структуру $M(f) = G\backslash F$, где G — открытое множество, а F — множество типа F_σ и первой категории на Γ.*

Теорема 7 (*теорема Гаврилова-Канатникова*, [14]). *Для произвольного подмножества $E \subset \Gamma$, имеющего вид $E = G\backslash F$, где G — открытое множество, а F — множество типа*

F_σ и первой категории на Г, существует такая мероморфная в D функция f(z), для которой E=M(f).

Теорема 8 (*теорема Гаврилова-Канатникова*, [10])**.** *Для любого множества $E \subset Г$, типа G_δ найдется такая мезоморфная в круге D функция f(z), что P(f)=I(f)=J(f)=E и $Г \setminus E = F(f)$*

Теоремы 6 и 7 дают окончательную характеристику множества *M(f)* из *теоремы Мейера* для мероморфных функций, определенных на единичном круге, а теорема 8 дает окончательную характеристику множества *P(f)* в этой теореме.

3. ГРАНИЧНЫЕ ОСОБЕННОСТИ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С СУМИРУЕМОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Как сказано во введении, за последние сорок лет XX века в рамках теории предельных множеств, было опубликовано большое количество статей, в которых изучались граничные свойства различных классов функций, особенно классов голоморфных и мероморфных функций одного комплексного переменного.

Мы подчеркиваем, что были получены интересные результаты, касающиеся граничных свойств класса мероморфных функций с ограниченной характеристикой Неванлинны, класса Харди голоморфных на единичном круге функций, класса голоморфных функций Привалова, Смирнова и др. Результаты, полученные для этих классов, побудили многих математиков заняться изучением большого количества других классов мероморфных и голоморфных функций, которые обладают интересными граничными свойствами.

В этом разделе мы представим некоторые результаты, которые, по нашему мнению, могут быть стимулом для дальнейших исследований, касающиеся граничных свойств для некоторых из этих классов мероморфных и голоморфных функций.

Цудзи [15], определил класс мероморфных функций $f : D \to \Omega$, которые удовлетворяют условию:

$$\sup_{r<1} \int_0^{2\pi} f^*\left(re^{i\theta}\right) r d\theta < +\infty$$

Функции из этого класса в литературе называются **функциями Цудзи** или *функциями конечной сферической длины*, см. [5] стр. 147-151, или [16-21]. *Цудзи* показал, что каждая функция Цудзи имеет радиальные пределы значения почти всюду на *Г*, а именно $C(f,\xi,h(\xi,0)) = \{c\}$, $c \in \Omega$, для почти всех $\xi = e^{i\theta} \in Г$ [15], (см. нпр. [15-21]). Обратите внимание, что хорда *h(ξ,0)* - это радиус круга *D*. Интересные примеры функций Цудзи, демонстрирующие некоторые их свойства, приведены в [19- 21].
Следующий результат усиливает и уточняет результат Цудзи:

Теорема 9 (*теорема Коллингвуда*, [16])**.** *Для любой мероморфной в D функции Цудзи имеем $Г = F(f) \cup J(f) \cup E$, где множество E имеет линейную меру нуль.*

Следующий результат усиливает и уточняет результат Коллингвуда:

Теорема 10 (*теорема Дзе*, [17], стр. 117, теорема 10)**.** *Если $f : D \to \Omega$ функция Цудзи,* *то $\Gamma = F(f) \cup P(f) \cup E$, где множество E имеет линейную меру нуль.*

Следуя К. Ф. Дзе [17], стр. 107, *определение* 1, мероморфная в D функция $f(z)$ называется функцией ***второго рода,*** если существует последовательность точек (z_n) в D, $|z_n| \to 1$, такая, что последовательность

$$\left(f_n(z) = f\left(\frac{z_n - z}{1 - \overline{z_n} z} \right) \right),$$

стремится равномерно к тождественой постоянной в некоторой замкнутой окрестности 0. Мероморфная функция $f(z)$ в D называется функцией первого рода, если она не второго рода.

Функции первого рода не могут иметь *точек Фату*. Это утвережение можно получить из теореми 4.5 из [22], см. и [6, 23, 24].

Пусть L граничный путь в D, оканчивающийся в точке $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma$. Назовем его **сильным *P-путем*** мероморфной функции $f(z)$, если каждая последовательность точек на нем, стремящаяся к Γ, является P-последовательностью точек функции $f(z)$. Точку $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma$ отнесем к множеству $P^*(f)$, если каждая хорда $h(\xi,\varphi)$, $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ будет сильным *P-путем* функции $f(z)$ (см. [21], следствие 3.1. стр. 111).

Теорема 11 (*теорема Дзе*, [17], стр. 118, теорема 11). *Если $f(z)$ - функция Цудзи и является функцией первого рода, то каждая хорда почти во всех точках Γ является сильным P-путем функции $f(z)$, т.е. тогда $\Gamma = P^*(f) \cup E$, где множество E имеет линейную меру нуль.*

В.И. Гаврилов в [18] определил и изучал класс мероморфных функций $f : D \to \Omega$, которые удовлетворяют условию:

$$\int_D f^*(z)\, dxdy < +\infty .$$

Функции из этого класса в литературе называются ***функциями с сумируемой сферической производной*** (см. и [25, 28, 29]).

Пусть $l(\theta,\alpha) = \int_{h(\theta,\alpha)} f^*(z)|dz|$.

Теорема 12 (*теорема Гаврилова*, [18]). *Пусть мероморфная в D функция $f(z)$ - функция с суммируемой сферической производной. Тогда $f(z)$ обладает следующими свойствами:*

1°) *для каждого α, $|\alpha| < \pi/2$, $l(\theta,\alpha)$ является суммируемой функцией аргумента* $\theta \in [0, 2\pi]$;

2°) *на* $[0, 2\pi]$ *существует такое множество M,* mes $M = 2\pi$, *что для каждого* $\theta \in M$ $l(\theta,\alpha)$ *является суммируемой функцией аргумента* $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$;

3°) *для всех* $\theta \in M$ *и* α, $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$, *для которых* $l(\theta,\alpha) < +\infty$, $l(\theta,\beta) < +\infty$, *существуют пределы, $f(\theta,\alpha)$, $f(\theta,\beta)$ и $f(\theta,\alpha) = f(\theta,\beta)$*;

4°) для *всех* $\theta \in M$ *и* $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$, *для которых* $l(\theta,\alpha) = +\infty$, *сегменты* $h(\theta,\alpha)$ *являются сегментами Жюлиа функции* $f(z)$.

Для функции *конечной сферической длины,* Цудзи доказал утверждение типа теоремы 12, см. [15]. Теорема 12 обобщает результаты Цудзи из [15].

Определенная в D комплекснозначная функция $f(z)$ ***называется нормальной***, если нормально в смысле Монтеля семейство функций $\{f(S(z))\}$, где $S(z)$ - дробно-линейное отображение круга D на себя, см. [26]. Мероформная в D функция $f(z)$ будет нормальной в том и только в том случае, если $\sup\limits_{z\in D}\left(1-|z|\right) f^*\left(z\right) < +\infty$ [27]. В [26] доказано что *мероформная в D функция f(z) будет нормальной на D тогда и только тогда, когда f(z) в D не имеет P- последовательности.*

Теорема 13 (*теорема Гаврилова*, [25])**.** *Пусть* $f(z)$ **нормальная** *meроморфная в D функция с сумируемой сферической производной. Тогда точки* $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma$, *в которых интеграл* $l(\theta,\alpha)$ *бесконечен хотя бы для одной хорды* $h(\theta, \alpha)$, *образуют множество E, имеющее линейную меру нуль, и* $(\Gamma \backslash E) \subset F(f)$.

Используя сформулированные выше результаты Гаврилова, Канатников обобщил ранее сформулированные результаты Цудзи*,* Коллингвуда и Дзе, [28].

Теорема 14 (*теорема Канатникова*, [28], см. и [29])**.** *Для любой мероморфной в D функции f(z) с сумируемой сферической производной имеем* $\Gamma = F(f) \cup P(f) \cup E$, *где E – множество, имеющее линейную меру нуль.*

Теорема 15 (*теорема Канатникова*, [28])**.** *Если f(z) - мероморфная функция с сумируемой сферической производной и является функцией первого рода, то каждая хорда почти во всех точках Г является сильным P-путем функции f(z), т.е. тогда* $\Gamma = P^*(f) \cup E$, *где множество E имеет линейную меру нуль.*

Канатников рассматривает голоморфные функции $f : D \to C$, для которых

$$\int\limits_D \mu\left(\left|f\left(z\right)\right|\right)\left|f'\left(z\right)\right| dxdy < +\infty, \tag{1}$$

где $\mu(t)$ – произвольная действительная функция на $[0,+\infty)$, непрерывная, невозрастающая и положительная [28].

Теорема 16 (*теорема Канатникова*, [28])**.** *Пусть* $f : D \to C$ *голоморфная функция, которая удовлетворяет условию (1), тогда* $\Gamma = F(f) \cup P(f) \cup E$, *где множество E имеет линейную меру нуль.*

Теорема 17 (*теорема Канатникова*, [25])**.** *Пусть* $f : D \to C$ *голоморфная функция, которая удовлетворяет условию (1) и является функцией первого рода, тогда* $\Gamma = P^*(f) \cup E$, *где множество E имеет линейную меру нуль.*

Голоморфные функции $f : D \to C$, для которых

$$M_p\left(f\right) = \sup_{0\le r<1} \int\limits_0^{2\pi} \left|f\left(z\right)\right|^p d\theta < +\infty$$

образуют пространство Харди голоморфных функций H^p, $p>0$. При $p\geq 1$ пространство H^p банаховое с нормой $\|f\|_p=\left[M_p(f)\right]^{\frac{1}{p}}$, а при $0<p<1$ пространство полное метрическое с метрикой $d_p(f,g)=M_p(f-g)$, см. [30].

Функцию $f(z)$ из H^p, $p>0$, отнесем к множеству A^p, если каждая точка $\xi=e^{i\theta}\in\Gamma$ является предельной для некоторой P-последовательности этой функции.

Теорема 18 (*теорема Канатникова*, [28]). *Для каждого p, $p>0$, A^p – остаточное множество типа G_δ в H^p.*

Множество A топологического пространства X **называется *остаточным***, если оно имеет в X дополнение первой категории.

4. АННУЛАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Здесь будем рассматривать граничные особенности аннуларных (кольцевых) функций, введенных Даниэлем Дональдом Бонаром в [31], см. [29, 32].

Аннуларной называют голоморфную в круге D функцию, для которой

$$\lim_{n\to\infty}\min\left\{\left|f(z)\right|:\ z\in L_n, n\in N\right\}=+\infty \tag{2}$$

по некоторой последовательности $\{L_n\}$ жордановых кривых, окружающих начало координат, такой, что каждое кольцо $\{z{:}1-\varepsilon<|z|<1\}$, $0<\varepsilon<1$, содержит бесконечно много кривых L_n. Если в (2) $L_n=\{z:\ |\ z\ |\ =r_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=1$, f называется **сильно аннуларной**.

Из определения аннуларной функции f следует, что f не является тождественно постоянной.

Для точки $\xi=e^{i\theta}\in\Gamma$, значение $\alpha\in\Omega$ отнесем к множеству $\Phi(f,\xi)$ если для некоторого $\eta>0$ в круге D существуют две последовательности точек $(z_n^{(1)})$ и $(z_n^{(2)})$ $\lim\limits_{n\to\infty}z_n^{(1)}=e^{i(\theta-\eta)}$, $\lim\limits_{n\to\infty}z_n^{(2)}=e^{i(\theta+\eta)}$ и такая последовательность непрерывных кривых (γ_n), соединяющих соотвественно, $z_n^{(1)}$ и $z_n^{(2)}$, и, лежащих в кольцах $1-\varepsilon_n<|z|<1$ ($\varepsilon_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$), что на γ_n выполняется неравенство $\left|f(z)-\alpha\right|<\delta_n$ (или $\left|\dfrac{1}{f(z)}\right|<\delta_n$, если $\alpha=\infty$, в котором $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n=0$).

Для аннуларных функций f множеству $\Phi(f,\xi)$ содержит значение ∞, для каждой точки $\xi\in\Gamma$ [34].

Так как каждая голоморфная функция в D имеет по крайней мере одно асимптотическое значение, см. [33], а аннуларная функция, очевидно, может иметь только ∞ в качестве асимптотического значения, поэтому $A(f)$ - множество асимптотических значений f, содержит ∞ как единственный элемент.

Если через $Z(f)$ обозначим множество нулей аннуларной функции f, известно что $Z(f)$ бесконечное множество точек в D. Пусть $Z'(f)$ - множество предельных точек $Z(f)$. Тогда

$Z'(f) \subset \Gamma$, см. [34].

В [34] Бейджмил и Эрдеш сформулировали задачу: *Если f аннуларная функция, неужели* $Z'(f) = \Gamma$?

Ответ на этот вопрос отрицательный, как показано в [35] и [36] действительно существуют аннуларные функции f такие, что $Z'(f)$ не совпадает с Γ, а именно, в [35] и [36] построены примеры аннуларных функций, для которых $Z'(f) = \{1\}$.

Изучение *точек Фату* аннуларных функций начали Бейджмил и Эрдеш [34]. Они построили пример сильно аннуларной функции, не имеющей точек Фату.

Из теоремы Привалова, [3], стр. 292, или [5], стр. 193, следует:

Теорема 19 (см. нпр. [37])**.** *Если f аннуларная функция, то множество ее точек Фату имеют нулевую линейную меру.*

Многие примеры аннуларных функций рассмотрены Бонаром в [32], но неясно, имеют ли они точки Фату или нет. Ясно, что $\propto$ единственно возможное значение Фату для аннуларнай функции. По этим причинам Бонар в [32] **спрашивает**, является ли значение $\propto$ значением Фату для некоторой аннуларной функции.

Следующие теоремы дают ответ на заданный вопрос.

Теорема 20 (*теорема Бонер-Кэрролл,* [37], *стр.225)***.** *Существует аннуларная функция, имеющая точку Фату в точке* $z = 1$.

Теорема 21 (*теорема Осада,* [38])**.** *Для произвольной пары из двух различных точек* ζ_1 *и* ζ_2 *на* Γ *существует сильно аннуларная функция f с* ζ_1 *как единственной предельной точкой его нулей и с* ζ_2 *как его единственной точкой Фату.*

В [38] приведен пример аннуларной функции f, у которой $J(f)= \Gamma$.

Теорема 22 ([29], *стр. 352*)**.** *Для произвольной аннуларной функции f справедливо представление* $\Gamma=P(f)\cup E$, *в котором E множество* F_σ *и первой категории на* Γ.

Теорема 23 *(теорема Белна-Серрол-Пиранян,* [39], *стр.20)***.** *Если M - множество типа* F_σ *и имеет линейную меру нуль на* Γ, *то существует сильно аннуларная функция f такая, что* $F(f) = M$.

Из теоремы 16 и теоремы 19 следует:

Теорема 24. *Для произвольной аннуларной функции f, которая удовлетворяет условию* (1) *справедльиво представление* $\Gamma=P(f)\cup E$, *где множество E имеет линейную меру нуль.*

Связь между *аннуларной* функцией и функцией Цудзи дается следующей теоремой:

Теорема 25 *(теорема Белна - Серрол - Пиранян,* [40], *стр.80)***.** *Существует сильно аннуларная функция Цудзи, множеством точек Жюлиа которой является единичная окружность* Γ.

Дальнейшие интересные иследования функциональных свойств аннуларных функций можно найти, например, в [41-46].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В двадцатом веке теория граничных свойств функций породила новую математическую дисциплину - теорию граничных множеств, которая интенсивно развивалась во второй половине двадцатого века. В конце прошлого века и начале нового тысячелетия интерес к этой дисциплине снизился.

Цель данной статьи - указать основные достижения этой математической дисциплины, а также одно из направлений ее развития.

Богатство полученных результатов только в одном из его сегментов, который обсуждался в этой статье, говорит о возможностях дальнейших исследований.

В беседе с профессором В. И. Гавриловым были сформулированы две задачи:

1) Совпадают ли множества E из теоремы 22 и теоремы 24?
2) Можно ли доказать для F-алгебр Привалова N^q, $q > 1$ то же утверждение, что и в теореме 12?

Благодарности: Работа поддержана Программой поддержки науки в Университете Черногории и Программой конкурентоспособности НИЯУ МИФИ.

REFERENCES

[1] E. Picard, "Sur une propriete des fonctions entieres", *C.R. Acad. Sci. Paris*, **88**, 1024-1027 (1879)
[2] C. Julia, *Lecons sur les fonctions uniformes a point singulier e'ssentiel isole*, Paris, Gathier-Villars (1924).
[3] I.I. Privalov, *Granichnyye svoystva odnoznachnykh analiticheskikh funktsiy*, M.: MGU, (1941).
[4] Kiyoshi Noshiro, *Cluster Sets,* Springer-Verlag, Berlin.(1960).
[5] E.F. Collingwood, A.J. Lohwater, *The Theory of Cilusiter Sets*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, № 56, Cambridge, Cambridge Univ. Press, (1966).
[6] A. Lovater, "Granichnoye povedeniye analiticheskikh funktsiy", *Itogi nauki i tekhn. Ser. Mat. anal*., **10**, 99–259 (1973).
[7] Ž. Pavićević, N. Labudović, S.A. Mahmutov, S. Duborija, "Growth of the Spherical Derivative and Classifications of Meromorphic Functions", *Math. Montisnigri*, **2**, 113-130 (1993).
[8] A.I. Plesner, "Uber des verhalten analyticher Functionen am Rande ihres Difinitionsbereiches", *J. Reine angew. Math.*, **158**, 219-227 (1927).
[9] V.I. Gavrilov, "O raspredelenii znacheniy meromorfnykh v yedinichnom kruge funktsiy, ne yavlyayushchikhsya normal'nymi", *Matem. Sb*., **67** (3), 408–427 (1965).
[10] V.I. Gavrilov, A.N. Kanatnikov, "Kharakteristika mnozhestva *P(f)* dlya eromorfnykh funktsiy", *Dokl. AN SSSR*, **232** (6), 1237– 1240 (1977).
[11] V.I. Gavrilov, "Povedeniye vdol' khord meromorfnykh funktsiy v yedinichnom kruge", *Dokl. AN SSSR*, **216** (1), 21–23 (1974).
[12] V.I. Gavrilov, "Theorem of Cartwright and Collingwood concerning classification and distribution of boundary singularities for meromorphic functions", *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika, izdatel'stvo Izd-vo Mosk. un-ta (M.),* **4**, 36-43 (1976).
[13] K. Meier, "Uber die Randwerten der meromorphic Functionen", *Math. Ann.,* **142**, 328-344 (1961).

[14] V.I. Gavrilov, A.N. Kanatnikov, "Kharakteristi- ka mnozhestva M(f) dlya meromorfnykh funktsiy", *Dokl. AN SSSR*, **233** (1), 15–17 (1977).
[15] M. Tsuji, "A theorem on the boundary behaviour of a meromorphic functions in |z | < 1", *Comment. Math. Univ. St. Pauli*, **8** (1), 53-55 (1960).
[16] E.F. Col1ingwood, "A boundary theorem for Tsuji functions", *Nagoya Math. J.*, **29**, 197-200 (1967).
[17] K.F. Tse, "Some results on value distribution of meromorphic functions in the unit disk", *Nagoya Math. J.*, **34**, 105-119 (1969).
[18] V.I. Gavrilov, "Ob odnoy теoreme Tsudzi", *Sibirskiy Matematicheskiy Zhurnal*, **14** (5), 951-956 (1973)
[19] E.F. Co11ingwood, G. Pianian, "Tsuji functions with segments of Julia", *Math. Z.*, **84**, 246-253 (1964).
[20] Hayman W. K., "Regular Tsuji functions with infinitely many Julia points", *Nagoya Math. J.*, 29, 185-187 (1967).
[21] Hayman W. K., "The boundary behaviour of Tsuji functions", *Mich. Math. J.*, 15, № 1, 1—26 (1968).
[22] Ž. Pavićević & M. Marković, "Normality and boundary behaviour of arbitrary and meromorphic functions along simple curves and applications" *Complex Variables and Elliptic Equations*, Vol. 63, No. 1, 1–22 (2018).
[23] Ž. Pavićević, "On Angular Limits of Normal Meromorphic Functions: A Geometric Aspect", *J. of Complex Analysis,* **2014**, ID 216398, (2014), http://dx.doi.org/10.1155/2014/216398.
[24] V.I. Gavrilov, "Ob odnoy teoreme Krtrayt i Kollingvuda, kasayushchesya klassifikatsii i raspredeleniya osobennostey meromorfnykh funktsiy na granites", *Vestn. Moskovsk. univ., sep. matem., mekh*., **4**, 37-43 (1976).
[25] V.I. Gavrilov, "Normal'nyye funktsii, ob- ladayushchiye pochti vsyudu uglovymi granich-nymi znacheniyami", *Matem. zametki*, **15** (6), 839–846 (1974).
[26] V. I. Gavrilov, "O raspredelenii znacheniy meromorfnykh v yedinichnom kruge funktsiy, ne yavlyayushchikhsya normal'nymi", *Matem. Sb.,* **67**(109) (3), 408–427 (1965).
[27] O. Lehto, K.I. Virtanen, "Boundary behavior and normal meromorphic functions", *Acta math.*, **97**, 47-65 (1957).
[28] V.I. Kanatnikov, "Ob odnoy teoreme Kollingvuda", *Vestn. Moskovsk. univ., cep. matem., mekh*., **4**, 3-10 (1976).
[29] A.N. Ayrapetyan, "Granichnyye osobennosti meromorfnykh funktsiy s sumiruyemoy sfericheskoy proizvodnoy i annularnykh funktsiy. Rassmotreniye", *Doklady NAN Armenii,* **112** (4), 350-354 (2012).
[30] J. Mashreghi, *Representation Theorems in Hardy Spaces*, Cambridge University Press, (2009).
[31] D.D. Bonar, *On annular functions,* Dissertation, The Ohio State University (1968).
[32] D.D. Bonar*, On annular functions*, Berlin,VEB Deutscher Verlag Wiss (1971).
[33] S. Kierst and E. Szpilrajn, "Sur certaines singularit& des fonctions analytiques uniformes", *Fund. Math.,* **21**, 276-294 (1933).
[34] F. Bagemihl and P. Erdös, "A problem concerning the zeros of a certain kind of holomorphic function in the unit disk", *J. Reine Angew. Math.,* **214/215**, 340-344 (1964).
[35] K. Barth and W. Schneider, "On a problem of Bagemihi and Erdos concerning thedistribution of zeros of an annular function", *J. Reine Angew. Math*., **234**, 179-183 (1969).
[36] A. Osada, "On the distribution of zeros of a strongly annular function", *Nagoya Math. J.,* **56**, 13-17 (1974).
[37] D. D. Bonar and F.W. Carroll, "Fatou points for annular functions", *J. für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, **1976**, 283-284 (1976).

[38] A. Osada, “On a problem of bonar concerning fatou points for annular functions”, *Nagoya Math. J.,* **57**, 163-170 (1974).
[39] C.L. Belna, F.W. Cerroll, G. Piranian, “The Fatou Points of Strongly Annular Functions”, *Indiana University Mathematics Journal*, **32** (1), 19-24 (1983).
[40] C.L. Belna, F.W. Cerroll, G. Piranian, “Strongly Annular Tsuji Functions*“, J. London Math. Soc.,* **2** (19), 79-92 (1979).
[41] D.D. Bonar, F.W. Carroll, P. Colwell, “Category results for tsuji functions”, *Can. J. Math*., **29** (3), 552-558 (1977).
[42] C.L. Belna, F.W. Carroll and G. Piranian, ”The Fatou Points of Strongly Annular Functions”, *Indiana University Math. J.*, **32** (1), 19-24 (1983).
[43] D.A. Redett, ”Strongly Annular Functions in Bergman Space”, *Computational Methods and Function Theory*, **7** (2), 429-432 (2007).
[44] R. Daquila, “Approximations by strongly annular solutions of functional equations”, *Proc. Am. Math. Soc.,* **138**, 2505-2511 (2010).
[45] L. Bernal-Gonzalez, A. Bonilla, “Families of strongly annularfunctions: linear structure”, *Revista Matemática Complutense*, **26**, 283-297 (2013).
[46] W.H. Meeks, J. Perez, “Finite type annular ends for harmonic functions”, *Math. Ann.,* **367**, 1047-1056 (2017).

Received May 25, 2021