К ОПИСАНИЮ ДВИЖЕНИЯ РАЗРЕЖЕННОЙ МАГНИТОСФЕРНОЙ ПЛАЗМЫ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А.В. КОЛЕСНИЧЕНКО

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
Москва, Россия
e-mail: kolesn@keldysh.ru, web page: http:.keldysh.ru/kolesnichenko/person.htm

Ключевые слова: Разреженная плазма, магнитосфера, уравнение Власова, квазигидродинамическое описание.

Аннотация. Рассматривается полностью ионизованная плазма малой плотности в сильном магнитном поле, состоящая из электронов и ионов одного сорта. Обсуждаются различные аспекты кинетического моделирования, учитывающие коллективные свойства магнитосферной плазмы. Кинетический подход основан на решении системы уравнений Власова с самосогласованными электромагнитными полями для ионов. Обосновывается метод получения совокупности уравнений квазигидродинамики для движения разреженной плазмы поперёк магнитного поля и приближённого кинетического уравнения для продольного движения. Малым параметром приближения является отношение характерной частоты динамических процессов в плазме к циклотронной частоте ионов. Исходя из системы кинетических уравнений в дрейфовом приближении и в случае наличия определённой симметрии функции распределения относительно продольных скоростей (вследствие которой отсутствуют тепловые потоки вдоль силовых линий) выводятся уравнения двухжидкостной гидродинамики, предназначенные для описания медленных движений плазмы с анизотропным тензором давления.

TO DESCRIPTION OF MOTION OF RAREFIED MAGNETOSPHERIC PLASMA IN A STRONG MAGNETIC FIELD

A.V. KOLESNICHENKO

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Science
e-mail: kolesn@keldysh.ru, web page: http:.keldysh.ru/kolesnichenko/person.htm

Summary. A completely ionized plasma of small density in the strong magnetic field, consisting of electrons and ions of one kind is considered. The various aspects of modeling considering collective properties of the magnetospheric plasma are discussed. The kinetic approach is based on solution the system of equations of Vlasov with self-consistent electromagnetic fields for ions. The method of obtaining a set of hydrodynamic equations for the

2010 Mathematics Subject Classification: 82D10, 82C40, 80A20.
Key words and Phrases: Rarefied plasma, magnetosphere, Vlasov' equation, quasi-magnetohydrodynamic description.

motion of a rarefied plasma across the magnetic field and an approximate kinetic equation for the sake of longitudinal motion is substantiated. Small parameter of approximation is the relation of the characteristic frequency of dynamic processes in plasma to the cyclotron frequency of ions. In the case of a certain symmetry of the distribution function with respect to longitudinal velocities (owing to which there are no heat flows along the lines of force) and proceeding from the system of kinetic equations in the drift approximation, are derived the equations of two-fluid hydrodynamics , intended for describing slow motions of a plasma with an anisotropic pressure tensor.

1. ВВЕДЕНИЕ

Непрерывное истечение солнечной плазмы (солнечного ветра) и солнечные вспышки, сопровождаемые выбросами плотных облаков горячей плазмы, приводят к изменению топологии магнитного поля в околопланетном пространстве и тем самым к формированию магнитосферы со всем сложным комплексом процессов её взаимодействия как с солнечным ветром, так и с ионосферой планеты. Динамические процессы в магнитосфере и в пограничных областях планеты, в основе которых лежат фундаментальные закономерности физики плазмы, во многом сходны с процессами, характерными для нескольких классов астрофизических объектов, обладающих регулярным магнитным полем, например пульсаров. По сложившимся представлениям, именно в магнитосферах этих космических объектов происходит ускорение частиц до релятивистских энергий (галактические космические лучи). Солнечный ветер можно рассматривать как стационарно натекающую бесстолкновительную плазму, которая при взаимодействии с магнитосферой планеты оказывает на неё динамическое давление. У Меркурия, Земли, Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна имеются активные внутренние динамо, в то время как у Венеры, Марса, земной луны, комет и астероидов их нет. Эти активные динамо создают магнитные поля, которые выдерживают давление внешней плазменной среды. Из-за наличия сильных вариаций внешних плазменных сред находящиеся в гелиосфере магнитосферы планет очень динамичны. Например, магнитосфера Юпитера имеет мощный изменяющийся во времени источник энергии, который меняет динамику его магнитосферы и создаёт совершенно другую картину циркуляции плазменных частиц, чем у Земли и, предположительно, у Меркурия. Однако не только собственные планетарные магнитные поля создают магнитосферы, но и не намагниченные планеты Венера и Марс, а также кометы способны индуцировать магнитосферы, связанные с взаимодействием солнечного ветра с их атмосферами. Динамика этих разнообразных магнитосфер обеспечивает богатый спектр поведения, подробное обсуждение которого можно найти в работах[1-11].

При наиболее простом способе описания магнитосферной плазмы может быть использовано представление о свободном движении отдельных заряженных частиц во внешних электромагнитных полях в дрейфовом приближении. Однако такое приближение, не учитывающее по своему определению взаимные столкновения частиц одного сорта (хотя столкновения с частицами других сортов могут быть учтены введением внешней силы трения), а также их плотности на разных орбитах, не будет полным. Для получения основных уравнений, описывающих коллективные свойства магнитосферной плазмы, необходимо найти способ суммирования движений отдельных заряженных частиц, сохранив при этом все существенные характеристики системы. В общем случае для этой цели может быть использован систематический метод кинетических уравнений Власова с самосогласованными электромагнитными полями для ионов. В литературе существует большое число публикаций, посвящённых различным аспектам вывода приближённых кинетических уравнений движения высокотемпературной разреженной плазмы в связи с проблемой её удержания электромагнитными полями[11-18]. Вместе с тем, в связи со значительными успехами, достигнутыми современной астрофизикой в понимании эволюции различных космологических объектов, имеющих магнитосферу, назрела настоятельная потребность распространить аналогию с гелиосферными магнитосферами и в область планетной космологии, в частности, на исследование топологии и эволюции экзо планетных плазменных оболочек. По этой причине возникла необходимость в переосмыслении основных этапов вывода базовых уравнений движения низкотемпературной разреженной плазмы, находящейся под влиянием сильного магнитного поля.

В настоящей работе излагаются методы и результаты решения уравнений Власова−Максвелла для устойчивых состояний полностью ионизированного газа низкой плотности в регулярном магнитном поле. При условии, что член уравнения, представляющий силу Лоренца, доминирует над всеми другими, решение исходного кинетического уравнения ищется в виде ряда по малому параметру, которым является отношение характерной частоты динамических процессов в плазме к циклотронной частоте ионов. Исходя из этого ключевого предположения, можно вывести правильное масштабирование всех интересующих нас величин. При таком масштабировании может быть получен набор асимптотических уравнений, во многом сходный с существующими гидромагнитными теориями. В работе в результате решения уравнений Власова−Максвелла получены кинетическое уравнение в дрейфовом приближении для продольного движения частиц разреженной плазмы и уравнение гидродинамического типа для движения поперёк магнитного поля. При некоторых предположениях вместо указанной совокупности уравнений получены более простые уравнения магнитной квазигидродинамики с анизотропным тензором давления.

2. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ВЛАСОВА

Приближение ведущего центра удобно использовать при описании динамики магнитосферной плазмы в случае заданного внешнего электромагнитного поля[19,20]. Однако в реальных условиях магнитосферы планеты в результате движения плазменных частиц возникают пространственные заряды и электрические токи, которые приводят к изменению внешних полей $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ и $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$. Эти изменения можно учесть, только решая задачу о движении плазмы в самосогласованных электромагнитных полях.

Наиболее точное описание движения заряженных частиц в электромагнитном поле магнитосферы достигается с помощью системы уравнений Максвелла

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -c\, rot\boldsymbol{E}, \quad (a) \qquad \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = c\, rot\boldsymbol{B} - 4\pi \boldsymbol{j}, \quad (b) \tag{1}$$

$$div\boldsymbol{E} = 4\pi\rho_L, \quad (a) \qquad div\boldsymbol{B} = 0 \quad (b) \tag{2}$$

и кинетических уравнений Власова[21] для ионов и электронов

$$\frac{\partial f^{\pm}}{\partial t}+\boldsymbol{c}\cdot\nabla f^{\pm}\pm\frac{e}{M^{\pm}}\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\nabla_c f^{\pm}=0, \tag{3}$$

где $f^{\pm}=f^{\pm}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c},t)$ − функция распределения заряженных частиц (ионов (верхний индекс «+») и электронов (верхний индекс «–»)) в переменных $\boldsymbol{r},\boldsymbol{c},t$. Плотность электрического тока $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$ и плотность заряда $\rho_L(\boldsymbol{r},t)$ определяются при этом с помощью функций распределения $f^{\pm}$ соотношениями

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)=e\int\boldsymbol{c}(f^{+}-f^{-})d\boldsymbol{c}\equiv e(n^{+}\boldsymbol{V}^{+}-n^{-}\boldsymbol{V}^{-}),$$

$$\rho_L(\boldsymbol{r},t)=e\int(f^{+}-f^{-})d\boldsymbol{c}\equiv e(n^{+}-n^{-}), \tag{4}$$

где c − скорость света в вакууме; $M^{\pm}$, $e^{\pm}$, $\boldsymbol{c}$ − соответственно, молекулярная масса, электрический заряд (e − заряд иона) и скорость плазменной частицы относительно неподвижной системы координат; $\boldsymbol{V}^{\pm}(\boldsymbol{r},t)=(n^{\pm})^{-1}\int\boldsymbol{c}\,f^{\pm}d\boldsymbol{c}$ и $n^{\pm}(\boldsymbol{r},t)=\int f^{\pm}d\boldsymbol{c}$ − средняя скорость и числовая плотность ионов и электронов. Векторы электромагнитной индукции $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ и напряжённости электрического поля $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ включают, помимо индуцированных полей, также и внешние магнитные и электрические поля. Система уравнений (1)-(4) образуют полную систему уравнений, описывающих согласованное движение частиц нетепловой плазмы с возникающими при этом движении электромагнитными полями.

Следует отметить, что взаимодействие электронов и ионов между собой учитывается здесь по методу самосогласованного электромагнитного поля, т.е. поля, возбуждаемого как внешними источниками, так и макроскопическими объёмными зарядами $\rho_L(\boldsymbol{r},t)$ и токами $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$ самой плазмы. Такому условию подчиняется взаимодействие частиц лишь на далёких расстояниях, где не действуют кулоновские силы притяжения или отталкивания (которые часто трактуются как обычные столкновения). Таким образом, уравнения (3) описывают только далёкие взаимодействия заряженных частиц, причём возникающее в этом случае движение плазмы создаёт силовое поле, поддерживающее само это движение.

Упростим теперь систему уравнений (1)-(3) для чего предположим, что характерная длина неоднородностей плазмы L значительно превышает средний циклотронный радиус вращения $R^{+}=M^{+}\tau^{+}c/e|\boldsymbol{B}|=\tau^{+}/\omega^{+}$ ионов, а соответствующие макроскопические временные масштабы динамических процессов в плазме $T \gg L/\tau^{+}$ значительно больше времени циклотронного вращения ионов $1/\omega^{+}$ (здесь $\omega^{+}(\boldsymbol{r})=(e/M^{+}c)|\boldsymbol{B}|$ − характерная циклотронная частота ионов; $\tau^{\pm}$ − тепловая скорость плазменных частиц). В этом случае заряженные частицы движутся по спирали вдоль магнитной силовой линии, вращаясь вокруг неё, и дрейфует в направлении, перпендикулярном к магнитному полю. Поскольку $\omega^{+}T = L/R^{+} >> 1$ (условие адиабатичности), то можно ожидать, что распределение электронов и ионов по скоростям обладают осевой симметрией относительно направления магнитного поля $\boldsymbol{B}$. Тогда, путём осреднения их движения по ларморовскому вращению ионов (электронов), можно получить совокупность (квази) магнитогидродинамических уравнений для движений поперёк магнитного поля и кинетических уравнений для продольного движения[11-14]. Важно отметить, что возможность гидродинамического описания замагниченной бесстолкновительной плазмы объясняется, в конечном счёте, тем, что магнитное поле, симметризуя распределение скоростей в ортогональной ему плоскости, по характеру действия на заряженные частицы вполне аналогично столкновениям. Иногда (при наличии определённой симметрии, вследствие которой отсутствуют тепловые потоки вдоль силовых линий) из этих уравнений можно получить уравнения гидродинамического типа с анизотропным тензором давления, описывающие медленное движение плазмы[15-18].

Нулевое приближение. Введём безразмерные величины по формулам

$$t = Tt^{*}, \quad \boldsymbol{r} = L\boldsymbol{r}^{*}, \quad \boldsymbol{c} = L\boldsymbol{c}^{*}/T, \quad \boldsymbol{E}_{\parallel} = E_{\parallel 0}\boldsymbol{E}_{\parallel}^{*}, \quad \boldsymbol{E}_{\perp} = E_{\perp 0}\boldsymbol{E}_{\perp}^{*}, \quad \boldsymbol{B} = B_0\boldsymbol{B}^{*} \qquad (5)$$

(где T, L, L/T, $E_{(\parallel,\perp)0}$, B_0 − характерные значения времени, длины, скорости, электрического поля и магнитной индукции соответственно) и сделаем обычное в дрейфовой теории предположение о эквипотенциальности магнитных силовых линий. В этом случае $E_{\parallel 0} << E_{\perp 0} \approx E_0 = LB/cT$ (т.е. $\xi \equiv E_{\parallel 0}/E_{\perp 0} << 1$). Будем далее опускать индексы «$\pm$» у параметров плазмы, указывающие на разновидность плазменной частицы, поскольку уравнения для ионов и электронов выглядят аналогично: полученные ниже результаты для ионов применимы также и к электронам.

Подставляя (5) в (3) и опуская для простоты индекс «*», в безразмерном виде получим

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{c}\cdot\nabla f + \omega_0 T\left(\boldsymbol{E}_{\perp} + \frac{1}{c}\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\nabla_c f + \omega_0 T\xi(\boldsymbol{E}_{\parallel}\cdot\nabla_c f) = 0\,, \qquad (6)$$

где $\boldsymbol{E}_{\parallel}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{E})$, $\boldsymbol{E}_{\perp}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_{\parallel}$, $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{B}/|\boldsymbol{B}|$ − единичный вектор вдоль магнитного поля; $\omega_0 = eB_0/M^{+}c$ − характерная циклотронная частота.

В случае, если электромагнитные поля медленно меняются в пространстве и во времени, решение уравнений (6) можно получить разложением по степеням $(\omega_0)^{-1}$. Такое разложение для случая статистических полей с точностью до членов порядка

$(\omega_0)^{-1}$ проведено в работе[22]. При $\omega_0 T >> 1$, третий член в (6) много больше остальных, поэтому, пренебрегая малыми величинами, в нулевом приближении имеем

$$\left(\boldsymbol{E}_{\perp} + \frac{1}{c}\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\nabla_c f = 0. \tag{7}$$

Это уравнение может быть переписано следующим образом:

$$\left\{\left(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{v}_E\right)\times\boldsymbol{B}\right\}\cdot\nabla_c f = 0, \quad \text{где} \;\; \boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{r},t) = \frac{c}{|\boldsymbol{B}|}(\boldsymbol{E}_{\perp}\times\boldsymbol{h}) \tag{7*}$$

− скорость электрического дрейфа (скорость движения ведущего центра). Общее решение уравнения (7) имеет вид

$$f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c},t) = f_0(\boldsymbol{r},t,\boldsymbol{B},(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{v}_E)^2), \tag{8}$$

где функция f_0 обладает осевой симметрией относительно направления $\boldsymbol{h}$. Таким образом, в случае нулевого приближения движение заряженных частиц представляет собой циклотронное вращение вокруг центра, движущегося со скоростью $\boldsymbol{v}_E$ поперёк магнитного поля.

Если теперь ввести макроскопические поперечные скорости для ионов $\boldsymbol{v}_{\perp}^{+}(\boldsymbol{r},t)$ и электронов $\boldsymbol{v}_{\perp}^{-}(\boldsymbol{r},t)$

$$n^{+}\boldsymbol{V}_{\perp}^{+} = \int \boldsymbol{c}_{\perp} f_0^{+} d\boldsymbol{c}, \quad n^{-}\boldsymbol{V}_{\perp}^{-} = \int \boldsymbol{c}_{\perp} f_0^{-} d\boldsymbol{c}, \tag{9}$$

(где $\boldsymbol{c}_{\perp} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{c})$), то можно заключить (см. также ниже), что в нулевом приближении f_0 электроны и ионы дрейфуют с одинаковыми скоростями $\boldsymbol{V}_{\perp}^{+}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{V}_{\perp}^{-}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{r},t)$ поперёк магнитного поля; при этом: $\boldsymbol{E}_{\perp} = -c^{-1}(\boldsymbol{V}_{\perp}\times\boldsymbol{B})$.

В случае пренебрежения током смещения (что возможно всегда, когда характерная скорость процесса L/T мала по сравнению со скоростью света c), в нулевом приближении уравнения Максвелла (1) принимают вид

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = rot\,(\boldsymbol{v}_E\times\boldsymbol{B}), \quad c\,rot\boldsymbol{B} = 4\pi\boldsymbol{j} \equiv 4\pi e\boldsymbol{v}_E(n^{+}-n^{-}) \approx 0. \tag{10}$$

Когда плазменная (ленгмюровская) частота электронов $\Omega^- = \sqrt{4\pi e^2 n^- / M^-}$ больше их циклотронной частоты ω^-, плазма является квазинейтральной ($n^- \approx n^+$); это условие (справедливое, как правило, для плазмы) заменяет уравнение Пуассона ($2^{(a)}$), $div\,\boldsymbol{E} = 4\pi e(n^+ - n^-)$. Таким образом, уравнения (10) совместно с уравнением $div\,\boldsymbol{B} = 0$ служат для определения самосогласованных электромагнитных полей.

Первое приближение. Рассмотрим теперь общий подход к решению уравнения (3). Перепишем уравнение (3) следующим образом[13-15,18,23-25]:

$$\mathsf{D} f + \omega \mathsf{L} f = 0, \tag{11}$$

где

$$\mathsf{D} f \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{c} \cdot \nabla f + \frac{e}{M}\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{V}_\perp \times \boldsymbol{B}\right) \cdot \nabla_{\boldsymbol{c}} f\,,$$

$$\mathsf{L} f \equiv \left\{\left(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{V}_\perp\right) \times \boldsymbol{B}\right\} \cdot \nabla_{\boldsymbol{c}} f\,.$$

Поскольку первый оператор кинетического уравнения (11) является малым по сравнению со вторым ($|\omega| >> 1$), то решение уравнения f будем искать в виде разложения по обратным степеням частоты ω. Таким образом, принимая условие

$$f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{c}, t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \omega^{-\nu} f_\nu\,,$$

получим

$$\mathsf{L}\, f_0(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{v}_E) = 0\,, \quad \mathsf{D} f_0 + \mathsf{L} f_1 = 0\,, \quad \mathsf{D} f_{(\nu-1)} + \mathsf{L} f_{(\nu)} = 0, \quad (\nu = 1, 2, \ldots)\,.$$

Введём теперь новые переменные фазового пространства t, $\boldsymbol{r}$, $c_\parallel$, $c_\perp$ и θ по формулам

$$c_\parallel = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{h}\,, \quad c_\perp = \sqrt{(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{V}_\perp)^2 - c_\parallel^2}\,, \tag{12}$$

где $c_\parallel(\boldsymbol{r}, t)$ − продольная компонента скорости заряженной частицы, $c_\perp(\boldsymbol{r}, t)$ − поперечная компонента относительной скорости, θ − азимутальный угол в пространстве скоростей в плоскости, нормальной к единичному вектору $\boldsymbol{h}$. В криволинейной ортогональной системе координат в пространстве скоростей, связанной с магнитным полем, с ортами $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ − соответственно нормаль и бинормаль к силовой линии магнитного поля), скорость частицы $\boldsymbol{c}$ может быть представлена в виде:

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{v}_E + c_\parallel \boldsymbol{h} + c_\perp\left(cos\theta\,\boldsymbol{n} + sin\theta\,\boldsymbol{b}\right). \tag{13}$$

Тогда, в дрейфовых переменных $\boldsymbol{r}$, $c_\parallel$, $c_\perp$ и θ оператор L принимает следующий вид:

$$\mathsf{L} f \equiv c_\perp \left(sin\theta\boldsymbol{n} - cos\theta\boldsymbol{b} \right) \cdot \nabla_{\boldsymbol{c}} f = c_\perp \left(sin\theta\boldsymbol{n} - cos\theta\boldsymbol{b} \right) \times$$

$$\times \left\{ \boldsymbol{h} \frac{\partial f}{\partial c_\parallel} + \left(cos\theta\, \boldsymbol{n} + sin\theta\boldsymbol{b} \right) \frac{\partial f}{\partial c_\perp} + \frac{1}{c_\perp} \left(- sin\theta\, \boldsymbol{n} + cos\theta\boldsymbol{b} \right) \frac{\partial f}{\partial \theta} \right\} = - \frac{\partial f}{\partial \theta}. \quad (14)$$

Следовательно, в нулевом приближении ($\mathsf{L} f_0(\boldsymbol{r},t)=0$) справедливо уравнение $\partial f_0 / \partial\theta = 0$, решение которого $f_0 = f_0(\boldsymbol{r}, t, c_\parallel, c_\perp)$; сравнивая это решение с (8), получим равенство $\boldsymbol{V}_\perp^\pm \equiv \boldsymbol{v}_E$.

Для решения кинетического уравнения (11) в первом «дрейфовом» приближении, положим $f = f_0(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{v}_E) + \omega^{-1} f_1$; пренебрегая величиной f_1 в операторе D, функцию f_1 будем определять из уравнения

$$\omega\, \partial f_1(\boldsymbol{r},t) / \partial\theta = \mathsf{D}\, f_0(\boldsymbol{r},t). \quad (15)$$

Для этого запишем оператор D в дрейфовых переменных t, $\boldsymbol{r}$, $c_\parallel$, $c_\perp$. Переход к новым переменным в пространстве скоростей сводится к замене

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &\to \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial c_\parallel}{\partial t} \frac{\partial}{\partial c_\parallel} + \frac{\partial c_\perp}{\partial t} \frac{\partial}{\partial c_\perp} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{c} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial c_\parallel} - \left(\frac{c_\parallel}{c_\perp} \boldsymbol{c} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{c} - \boldsymbol{v}_E}{c_\perp} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_E}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial c_\perp}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \nabla &\to \nabla + \nabla c_\parallel \left(\frac{\partial}{\partial c_\parallel} \right) + \nabla c_\perp \left(\frac{\partial}{\partial c_\perp} \right) = \\ &= \nabla + (\boldsymbol{c} \cdot \nabla) \boldsymbol{h} \left(\frac{\partial}{\partial c_\parallel} \right) - \left(\frac{c_\parallel}{c_\perp} (\boldsymbol{c} \cdot \nabla) \boldsymbol{h} + \frac{1}{c_\perp} \left[(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{v}_E) \cdot \nabla \right] \boldsymbol{v}_E \right) \frac{\partial}{\partial c_\perp}. \end{aligned} \quad (17)$$

С учётом этих выражений и формулы (14) для оператора L, кинетическое уравнение (15) для определения функции $f^{(1)}$ принимает следующий вид[18]:

$$\omega\frac{\partial f_1}{\partial\theta}=\frac{\partial f_0}{\partial t}+\boldsymbol{c}\cdot\nabla f_0+\left(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{h}'+\frac{e}{M}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{h}\right)\frac{\partial f_0}{\partial c_\parallel}+$$

$$+\left\{-\frac{c_\parallel}{c_\perp}\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{h}'-\frac{\boldsymbol{c}-\boldsymbol{v}_E}{c_\perp}\cdot\boldsymbol{v}_E'+\frac{e}{M}\frac{\boldsymbol{c}-\boldsymbol{v}_E}{c_\perp}\cdot\left[\boldsymbol{E}_\perp+\frac{1}{c}(\boldsymbol{v}_E\times\boldsymbol{B})\right]\right\}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial c_\perp}\ , \qquad (18)$$

где штрихом обозначена производная $\partial(..)/\partial t+\boldsymbol{c}\cdot\nabla(..)$.

При рассмотрении динамики плазмы необходимо решать кинетические уравнения (18) совместно с уравнениями Максвелла. При этом истинные плотности электрического тока и заряда должны определяться средними макроскопическими скоростями электронов и ионов, которые выражаются через функции распределения частиц $f^{\pm}(\boldsymbol{r},t)$, а не средними скоростями их ведущих центров с функцией распределения f_0 (см. ниже). Следовательно, для получения правильных выражений для средних скоростей частиц данного сорта необходимо учитывать члены первого порядка в разложении функции f по степеням ω^{-1}.

Чтобы это уравнение (18) было разрешимо относительно f_1 необходимо, как известно, выполнение условия ортогональности правой части (18) к решению уравнения, сопряжённого с $\partial f_1/\partial\theta=0$. Это условие разрешимости получается в результате осреднения (18) по θ. По физическому смыслу задачи величина f_1 должна быть периодической функцией угла θ; тогда в силу однозначности f_1 получаем необходимое для этого случая условие: $\int_0^{2\pi}\mathrm{D}\, f_0\, d\theta=0$ − интегральное условие периодичности.

С учётом этого условия, равенства $\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{v}_E=0$, а также следующего из (9) векторного соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{h}=(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_E-(\boldsymbol{v}_E\cdot\nabla)\boldsymbol{h}-\boldsymbol{h}\left\{\boldsymbol{h}\cdot(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_E\right\}, \qquad (19)$$

проинтегрируем уравнение (18) по θ. В результате получим кинетическое уравнение, записанное в форме Лиувилля в фазовом пространстве t, $\boldsymbol{r}$, $c_\parallel$, $c_\perp$[18,19]:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t}+(\boldsymbol{v}_E+c_\parallel\boldsymbol{h})\cdot\nabla f_0+\frac{dc_\parallel}{dt}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial c_\parallel}+\frac{dc_\perp}{dt}\frac{\partial f_0}{\partial c_\perp}=0\,, \qquad (20)$$

где $\boldsymbol{v}_c\equiv(\boldsymbol{v}_E+c_\parallel\boldsymbol{h})$ − скорость движения ведущего центра;

$$\frac{dc_\parallel}{dt} \equiv \frac{e}{M}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{h} + \frac{c_\perp^2}{2} div\,\boldsymbol{h} - c_\parallel \boldsymbol{h}\cdot[(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_E] + \boldsymbol{h}\cdot\nabla\left(\left|\boldsymbol{v}_E\right|^2/2\right); \qquad (21)$$

$$\frac{dc_\perp}{dt} \equiv -\frac{c_\perp}{2}\left\{c_\parallel div\,\boldsymbol{h} + div\,\boldsymbol{v}_E - \boldsymbol{h}\cdot[(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_E]\right\}. \qquad (22)$$

В этих соотношениях под $c_\parallel$ и $c_\perp$ следует понимать теперь сглаженные значения соответствующих величин (т.е. значения, усреднённые по азимуту θ); функция распределения f_0 также не зависит от распределения скоростей частиц по θ и потому может интерпретироваться как функция распределения ведущих центров; величины $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ также следует трактовать, как напряжённости полей в точке нахождения ведущего центра

Второе интегральное условие, являющееся следствием определения (9) макроскопической скорости поперечного движения частиц $\boldsymbol{V}_\perp$, запишется так

$$\int(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{V}_\perp - \boldsymbol{h}\,c_\parallel) f d\boldsymbol{c} = 0, \qquad (23)$$

причём в первом приближении это условие принимает следующий вид $\int c_\perp(\boldsymbol{n} cos\theta + \boldsymbol{b} sin\theta) f_1 d\boldsymbol{c} = 0$, поскольку при интегрировании по углу θ члены с $f_0 cos\theta$ и $f_0 sin\theta$ выпадают. Для выполнения условия (23) умножим скалярно уравнение (18) на $\boldsymbol{w} \equiv (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{V}_\perp - \boldsymbol{h}c_\parallel)$ и проинтегрируем результат по $\boldsymbol{c}$ ($d\boldsymbol{c} = c_\perp dc_\perp dc_\parallel d\theta$). В итоге получим уравнение для макроскопической скорости поперечного движения $\boldsymbol{V}_\perp$ заряженной частицы в первом приближении:

$$\boldsymbol{V}_\perp = \boldsymbol{v}_E + \frac{1}{\omega}\left\{\boldsymbol{h}\times\left[\frac{d\boldsymbol{v}_E}{dt} + V_\parallel\frac{d\boldsymbol{h}}{dt} + \frac{\nabla p_\perp}{nM} + \frac{p_\parallel - p_\perp}{nM}(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)\boldsymbol{h}\right]\right\}, \qquad (24)$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_E + \boldsymbol{V}_\parallel)\cdot\nabla,$$

$$V_\parallel^\pm = (n^\pm)^{-1}\int c_\parallel f^\pm d\boldsymbol{c}, \quad p_\perp^\pm = \tfrac{1}{2}M^\pm\int c_\perp^2 f^\pm d\boldsymbol{c}, \quad p_\parallel^\pm = M^\pm\int(c_\parallel - v_\parallel^\pm)^2 f^\pm d\boldsymbol{c}; \qquad (25)$$

$\boldsymbol{V}_\parallel = \boldsymbol{h}V_\parallel, v_\parallel, p_\parallel, p_\perp$ – соответственно макроскопическая скорость, продольная компонента макроскопической скорости, поперечное и продольное давление плазменных частиц.

Иногда удобно разрешить уравнение (25) относительно $d\boldsymbol{v}_E/dt$, чтобы получить макроскопические уравнения движения плазменных частиц в поперечном направлении:

$$n^{\pm}M^{\pm}\left[\left(\frac{d\boldsymbol{v}_E}{dt}\right)+V_{\parallel}^{\pm}\frac{d\boldsymbol{h}}{dt}\right]=-\nabla_{\perp}p_{\perp}^{\pm}-(p_{\parallel}^{\pm}-p_{\perp}^{\pm})(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)\boldsymbol{h}+e^{\pm}n^{\pm}\left(\boldsymbol{E}_{\perp}+\frac{\boldsymbol{v}_E}{c}\times\boldsymbol{B}\right). \quad (26)$$

Таким образом, вместо одного гидростатического давления p в плазме, в которой существенную роль играют столкновения, в бесстолкновительном случае давление имеет продольную и поперечную компоненты относительно направления магнитного поля, т.е. является анизотропным.

Следует иметь в виду, что рассмотренный здесь подход, позволяет получить приближения и более высоких порядков[13,14,26]. В частности, во втором приближении будут учитываться дрейфовые потоки[18]. Кроме того, этот метод допускает присутствие и столкновительного члена в исходном кинетическом уравнении, который в модифицированном уравнении (20) будет описывать процесс установления максвелловского распределения, а в уравнении (26) приведёт к появлению силы трения между электронами и ионами, т. е. к диффузии плазмы за счёт конечной проводимости[27]. Наконец, учёт столкновительного члена во втором приближении приведёт к поперечной вязкости и теплопроводности плазмы. Однако все эти эффекты являются малыми и в ряде задач, как, например, при исследовании эволюции магнитосферной плазмы, могут не учитываться[15].

Остановимся вкратце на физическом смысле полученных уравнений. Уравнение (20), после его интегрирования по θ, эквивалентно осреднению уравнений движения для отдельных частиц по азимутальному углу θ. Осреднение означает переход к дрейфовому приближению. В этом случае функцию $f_0(\boldsymbol{r},c_{\parallel},c_{\perp})$, не зависящую от распределения скоростей частиц по азимуту, можно интерпретировать как функцию распределения ведущих центров. Функция $f^{(0)}$ удовлетворяет кинетическому уравнению (20), которое в дрейфовом приближении принимает форму теоремы Лиувилля, выражающей закон сохранения числа частиц в фазовом пространстве ($\boldsymbol{r},c_{\parallel},c_{\perp}$). При этом под $c_{\parallel}$ и $c_{\perp}$ следует понимать осреднённые по θ значения продольной и поперечной скоростей относительного движения. Наконец, можно заключить[20], что $\boldsymbol{V}_{\perp}$ − это скорость движения ведущего центра (в первом приближении), а уравнения (21) и (22) описывают плавное изменение продольной и поперечной скоростей частицы.

Наконец, складывая уравнение (26), записанное для ионов, с аналогичным уравнением для электронов, можно исключить члены с электрическим полем, а члены с магнитным полем дадут электрическую силу $c^{-1}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}$. В случае пренебрежения инерцией электронов, получим следующее уравнение для поперечного движения бесстолкновительной плазмы:

$$\rho\left(\frac{d\boldsymbol{v}_E}{dt}\right)_\perp = -\rho V_\parallel \frac{d\boldsymbol{h}}{dt} - \nabla_\perp p_\perp - (p_\parallel - p_\perp)(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)\boldsymbol{h} + \frac{1}{c}(\boldsymbol{j}_\perp \times \boldsymbol{B}) . \qquad (27)$$

Здесь

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \left[(\boldsymbol{v}_E + \boldsymbol{V}_\parallel)\cdot\nabla \right],$$

$$\frac{d\boldsymbol{h}}{dt} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial t} + [(\boldsymbol{v}_E + \boldsymbol{V}_\parallel)\cdot\nabla]\boldsymbol{h} = (\boldsymbol{V}_\parallel\cdot\nabla)\boldsymbol{h} + (\boldsymbol{h}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_E + \boldsymbol{h}\left\{\boldsymbol{v}_E\cdot(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)\boldsymbol{h}\right\},$$

где $p_{\parallel,\perp} = p^+_{\parallel,\perp} + p^-_{\parallel,\perp}$; $\rho \simeq n^+ M^+ -$ массовая плотность смеси. Это уравнение, рассматриваемое совместно с выражениями (25) для давлений, с кинетическими уравнениями (20) для продольного движения ионов и электронов, а также с системой уравнений Максвелла (в дрейфовом приближении) для полей, записанных в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = rot(\boldsymbol{V}_\perp \times \boldsymbol{B}), \ (a) \qquad div\boldsymbol{B} = 0, \qquad (b)$$

$$c\, rot\boldsymbol{B} = 4\pi(\boldsymbol{j}_\perp + \boldsymbol{j}_\parallel) = 4\pi ne(\boldsymbol{V}^+_\perp - \boldsymbol{V}^-_\perp) + 4\pi ne(V^+_\parallel - V^-_\parallel)\boldsymbol{h}, \ (c) \qquad (28)$$

представляет собой полную систему уравнений для описания движений плазмы с частотами значительно ниже циклотронной частоты ионов ω^+. Эти уравнения являются первым приближением в разложении точных кинетических уравнений по степеням малого параметра ω^{-1}. Подчеркнём также, что уравнение ($28^{(a)}$) является следствием того факта, что электрическое поле в собственной системе координат, связанной с частицей плазмы, равно нулю, т.е. $\boldsymbol{E}' \equiv \boldsymbol{E} + c^{-1}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B} = 0$.

Если уравнение (27) разрешить относительно поперечного электрического тока $\boldsymbol{j}_\perp$, то получим

$$\boldsymbol{j}_\perp = ne(\boldsymbol{V}^+_\perp - \boldsymbol{V}^-_\perp) = \frac{c}{|\boldsymbol{B}|}\boldsymbol{h}\times\left\{\rho\left(\frac{d\boldsymbol{v}_E}{dt}\right)_\perp + \rho V_\parallel\frac{d\boldsymbol{h}}{dt} + \nabla_\perp p_\perp + (p_\parallel - p_\perp)(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)\boldsymbol{h}\right\}. \qquad (29)$$

Тогда закон Ома приобретает вид: $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_\perp + \boldsymbol{j}_\parallel = \boldsymbol{j}_\perp + ne(V^+_\parallel - V^-_\parallel)\boldsymbol{h}$. Аналогичное выражение получается в элементарной теории дрейфовых токов[19].

Макроскопическая скорость заряженных частиц в плазме. Вычислим среднюю макроскопическую скорость в первом приближении для плазменных частиц. По определению имеем

$$n^\pm \boldsymbol{V}^\pm = \int \boldsymbol{c}\, f^\pm d\boldsymbol{c} \cong \int \boldsymbol{c}\,(f_0^\pm + f_1^\pm)d\boldsymbol{c} \qquad (30)$$

Подставляя сюда выражение $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{v}_E + c_\parallel \boldsymbol{h} + c_\perp \left(cos\theta\, \boldsymbol{n} + sin\theta\, \boldsymbol{b} \right)$ и учитывая (24), а также то обстоятельство, что при осреднении по θ члены с $f_0 sin\theta$ и $f_0 cos\theta$ обращаются в нуль, в результате получим

$$\boldsymbol{V}^{\pm} = \boldsymbol{v}_E + V_\parallel^{\pm} \boldsymbol{h} =$$

$$= V_\parallel^{\pm} \boldsymbol{h} + \frac{1}{\omega^{\pm}} \left\{ \boldsymbol{h} \times \left[\frac{d\boldsymbol{v}_E}{dt} + V_\parallel^{\pm} \frac{d\boldsymbol{h}}{dt} - \frac{e^{\pm}\boldsymbol{E}}{M^{\pm}} + \frac{\nabla p_\perp^{\pm}}{n^{\pm} M^{\pm}} + \frac{p_\parallel^{\pm} - p_\perp^{\pm}}{n^{\pm} M^{\pm}} (\boldsymbol{h} \cdot \nabla) \boldsymbol{h} \right] \right\}, \tag{31}$$

или, при использовании векторного соотношения

$$\frac{c}{e^{\pm} n^{\pm}} rot \left(\frac{p_\perp^{\pm}}{|\boldsymbol{B}|} \boldsymbol{h} \right) = \frac{p_\perp^{\pm}}{M^{\pm} n^{\pm} \omega^{\pm}} \left\{ \boldsymbol{h} \cdot (\boldsymbol{h} \cdot rot \boldsymbol{h}) + \boldsymbol{h} \times [(\boldsymbol{h} \cdot \nabla) \boldsymbol{h}] + \boldsymbol{h} \times \nabla \ln \frac{|\boldsymbol{B}|}{p_\perp^{\pm}} \right\} \tag{32}$$

в другой форме[17]:

$$\boldsymbol{V}^{\pm} = \left(\boldsymbol{v}_E + \hat{V}_\parallel^{\pm} \boldsymbol{h} \right) + \frac{c}{e^{\pm} n^{\pm}} \left\{ - rot \left(\frac{p_\perp^{\pm}}{|\boldsymbol{B}|} \boldsymbol{h} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{|\boldsymbol{B}|} \boldsymbol{h} \times \left[n^{\pm} M^{\pm} \left(\frac{d\boldsymbol{v}_E}{dt} + V_\parallel^{\pm} \frac{d\boldsymbol{h}}{dt} \right) + p_\perp^{\pm} \nabla \ln |\boldsymbol{B}| + p_\parallel^{\pm} (\boldsymbol{h} \cdot \nabla \boldsymbol{h}) \right] \right\}. \tag{33}$$

Здесь величина $\hat{V}_\parallel \equiv V_\parallel + (p_\perp / M\omega\ ) \boldsymbol{h} \cdot rot \boldsymbol{h}$ представляет собой сглаженную проекцию скорости заряженной частицы на направление магнитного поля в точке, совпадающей с ведущим центром частицы (так называемая, скорость дрейфового движения[19]. Поясним физический смысл отдельных членов в соотношении (33): $\hat{V}_\parallel \boldsymbol{h}$ − упорядоченная микроскопическая скорость плазменной частицы вдоль поля (величина, обычно используемая в теории дрейфового движения частиц); $\boldsymbol{v}_E$ − скорость, с которой дрейфуют заряженные частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях (этот член является главным, если электрическое поле достаточно сильное); последний член даёт усреднённый дрейф частиц за счёт градиента магнитного поля, его кривизны (центробежный дрейф), а также за счёт силы инерции $\dfrac{d\boldsymbol{v}_E}{dt} + V_\parallel \dfrac{d\boldsymbol{h}}{dt}$, поскольку рассмотрение проводилось в движущейся локальной системе координат.

Выясним теперь смысл члена $\dfrac{c}{en} rot \left(p_\perp \boldsymbol{h} / |\boldsymbol{B}| \right)$ в выражении (33). Если разрешить соотношение (27) относительно электрического тока $\boldsymbol{j}$, то в результате получим закон Ома в следующем виде

$$\boldsymbol{j} = ne(\boldsymbol{V}^{+} - \boldsymbol{V}^{-}) = en(\hat{V}_{\parallel}^{+} - \hat{V}_{\parallel}^{-})\boldsymbol{h} - c\,rot\left(\frac{p_{\perp}}{|\boldsymbol{B}|}\boldsymbol{h}\right) + \boldsymbol{j}^{*}, \tag{34}$$

где

$$\boldsymbol{j}^{*} = \frac{c}{|\boldsymbol{B}|}\boldsymbol{h} \times \left\{ \rho\left(\frac{d\boldsymbol{v}_E}{dt} + V_{\parallel}\frac{d\boldsymbol{h}}{dt}\right) + p_{\perp}\nabla \ln|\boldsymbol{B}| + p_{\parallel}(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)\boldsymbol{h} \right\}.$$

Здесь $V_{\parallel} = V_{\parallel}^{+} + V_{\parallel}^{-}$, $p_{\perp} = p_{\perp}^{+} + p_{\perp}^{-}$, $p_{\parallel} = p_{\parallel}^{+} + p_{\parallel}^{-}$. Тогда уравнение Максвелла $c\,rot\boldsymbol{B} = 4\pi\boldsymbol{j}$ может быть переписано следующим образом:

$$c\,rot\boldsymbol{H} = 4\pi ne(\boldsymbol{V}_{\parallel}^{+} - \boldsymbol{V}_{\parallel}^{-}) + 4\pi\boldsymbol{j}_{\perp}^{*}, \tag{35}$$

где

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} + 4\pi\frac{p_{\perp}}{|\boldsymbol{B}|}\boldsymbol{h} = \kappa\boldsymbol{B}. \tag{36}$$

Таким образом, в равенстве (34) член $rot\left(p_{\perp}\boldsymbol{h}/|\boldsymbol{B}|\right)$ интерпретируется как ток намагничивания, а величину $\kappa = \left(1 + 4\pi p_{\perp}/|\boldsymbol{B}|^{2}\right)$ следует понимать как магнитную проницаемость плазмы.

Совместное решение кинетических уравнений (20) для продольного движения, гидродинамических уравнений (27) для поперечного движения заряженных частиц бесстолкновительной плазмы и уравнений поля (1), (2), (35) позволяет наиболее строго описывать коллективные процессы взаимодействия волн с частицами в планетной плазмосфере и магнитосфере. Эти уравнения позволяют, в частности, исследовать механизм бесстолкновительного затухания гидромагнитных волн (затухание Ландау), генерируемых различными видами плазменных неустойчивостей в магнитосфере и особенно в авроральных областях. Диссипация различных типов гидромагнитных волн, приводящая к накоплению тепловой энергии частиц и влияющая на явления крупномасштабного переноса, сопровождается рассеянием и быстрой изотропизацией протонов и электронов по питч-углам, что способствует постоянному притоку частиц в конус потерь и их последующему высыпанию (выходу из состава радиационных поясов) в верхнюю атмосферу.

3. УРАВНЕНИЯ МАКРОСКОПИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ПЛАЗМЫ.

Часто вместо кинетических уравнений (20)-(22) можно воспользоваться уравнениями квазигидродинамики. Согласно обычной схеме [11,28-30], для этого необходимо умножить (20) на различные степени скоростей и затем проинтегрировать по пространству скоростей. В результате можно получить бесконечную зацепляющуюся систему уравнений для моментов. Если умножить (20) последовательно на 1, $c_{\parallel}$, $c_{\perp}^{2}$ и $(c_{\parallel} - V_{\parallel})^{2}$

, и проинтегрировать полученный результат по $\boldsymbol{c}$, то получим следующие уравнения для каждого сорта частиц[11]:

уравнения неразрывности

$$\frac{\partial n^{\pm}}{\partial t} + div\left\{n^{\pm}(\boldsymbol{v}_E + V_{\parallel}^{\pm}\boldsymbol{h})\right\} = 0\,; \tag{36}$$

уравнения движения в направлении магнитного поля

$$M^{\pm}n^{\pm}\frac{d\mathrm{V}_{\parallel}^{\pm}}{dt} = -\boldsymbol{h}\cdot\nabla p_{\parallel}^{\pm} + (p_{\perp}^{\pm} - p_{\parallel}^{\pm})div\boldsymbol{h} + e^{\pm}n^{\pm}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{h} - M^{\pm}n^{\pm}\left(\boldsymbol{h}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}_E}{dt}\right); \tag{37}$$

уравнения состояния

$$\frac{dp_{\perp}^{\pm}}{dt} + 2p_{\perp}^{\pm}div\boldsymbol{v}_E - p_{\perp}^{\pm}\boldsymbol{h}\cdot(\boldsymbol{h}\nabla)\boldsymbol{v}_E + p_{\perp}^{\pm}div\boldsymbol{V}_{\parallel}^{\pm} + p_{\perp}^{\pm}V_{\parallel}^{\pm}div\boldsymbol{h} = -div(q^{\pm}\boldsymbol{h}) - q^{\pm}div\boldsymbol{h}\,, \tag{38}$$

$$\frac{dp_{\parallel}^{\pm}}{dt} + 3p_{\parallel}^{\pm}(\boldsymbol{h}\cdot\nabla\,\mathrm{V}_{\parallel}^{\pm}) - p_{\parallel}^{\pm}V_{\parallel}^{\pm}div\boldsymbol{h} + p_{\parallel}^{\pm}div\boldsymbol{v}_E + 2p_{\parallel}^{\pm}\boldsymbol{h}\cdot(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_E = -div(\boldsymbol{h}s^{\pm})\,. \tag{39}$$

Здесь величины q и s представляют тепловые потоки (третьи моменты от функции распределения):

$$q = \int c_{\perp}^2(c_{\parallel} - V_{\parallel})f_0 d\boldsymbol{c}\,, \quad s = \int (c_{\parallel} - V_{\parallel})^3 f_0 d\boldsymbol{c}\,. \tag{40}$$

Если теперь воспользоваться векторным равенством

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\left\{-V_{\parallel}div\,\boldsymbol{h} - div\,\boldsymbol{v}_E + \boldsymbol{h}\cdot(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_E\right\}$$

и уравнениями неразрывности (36), то уравнения состояния (38) и (39) примут соответственно вид

$$n^{\pm}\left|\boldsymbol{B}\right|\frac{d}{dt}\left(\frac{p_{\perp}^{\pm}}{n^{\pm}\left|\boldsymbol{B}\right|}\right) = -div(q^{\pm}\boldsymbol{h}) - q^{\pm}div\boldsymbol{h}\,, \tag{41}$$

$$\frac{n^{\pm}}{\left|\boldsymbol{B}\right|^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{p_{\parallel}^{\pm}\left|\boldsymbol{B}\right|^2}{(n^{\pm})^3}\right) = -div(\boldsymbol{h}s^{\pm})\,. \tag{42}$$

С другой стороны, складывая уравнения движения в направлении магнитного поля (37) с уравнением (26) для поперечного движения плазменных частиц, приходим к общему уравнению движения частиц данного сорта:

$$M^{\pm}n^{\pm}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}_E+V_{\parallel}^{\pm}\boldsymbol{h})=-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{h}\cdot\nabla p_{\parallel}^{\pm})+(p_{\perp}^{\pm}-p_{\parallel}^{\pm})\boldsymbol{h}\,div\boldsymbol{h}+$$
$$+(p_{\perp}^{\pm}-p_{\parallel}^{\pm})(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)\boldsymbol{h}-\nabla p_{\perp}^{\pm}+e^{\pm}n^{\pm}\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}_E\times\boldsymbol{B}\right). \tag{43}$$

Введём теперь анизотропный тензор давления $\vec{\boldsymbol{P}}^{\pm}$ с компонентами $(\vec{\boldsymbol{P}}^{\pm})_{ik}=-p_{\perp}^{\pm}\delta_{ik}+(p_{\perp}^{\pm}-p_{\parallel}^{\pm})h_ih_k$ (здесь $\boldsymbol{h}=\{h_1,h_2,h_3\}$); тогда, путём непосредственного дифференцирования легко убедиться, что

$$-Div\vec{\boldsymbol{P}}^{\pm}=\nabla p_{\perp}^{\pm}+(p_{\parallel}^{\pm}-p_{\perp}^{\pm})(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)\boldsymbol{h}+(p_{\parallel}^{\pm}-p_{\perp}^{\pm})\boldsymbol{h}\cdot div\boldsymbol{h}+\boldsymbol{h}\left[\boldsymbol{h}\cdot\nabla(p_{\parallel}^{\pm}-p_{\perp}^{\pm})\right]. \tag{44}$$

С учётом этой формулы общее уравнение движения плазменных частиц (43) принимает обычный гидродинамический вид

$$M^{\pm}n^{\pm}\frac{d\boldsymbol{V}^{\pm}}{dt}=Div\vec{\boldsymbol{P}}^{\pm}+e^{\pm}n^{\pm}\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}_E\times\boldsymbol{B}\right), \tag{45}$$

где $\boldsymbol{V}^{\pm}=\boldsymbol{v}_E+V_{\parallel}^{\pm}\boldsymbol{h}$.

Как видим, система уравнений (36)-(39), вместе с (26) оказывается незамкнутой. Формально её можно замкнуть, приравняв величины $q^{\pm}$ и $s^{\pm}$ нулю, что физически означает отсутствие потока тепла вдоль силовых линий. Вместе с тем в плоскости, перпендикулярной к $\boldsymbol{B}$, перенос тепла, определяемый как раз третьими моментами, затруднителен вследствие циклотронного вращения заряженных частиц. Поэтому в этой плоскости применение системы уравнений (36), (37), (26) и двух адиабатических соотношений (уравнений "состояния")

$$n^{\pm}|\boldsymbol{B}|\frac{d}{dt}\left(\frac{p_{\perp}^{\pm}}{n^{\pm}|\boldsymbol{B}|}\right)=0,\qquad \frac{n^{\pm}}{|\boldsymbol{B}|^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{p_{\parallel}^{\pm}|\boldsymbol{B}|^2}{(n^{\pm})^3}\right)=0 \tag{41}$$

является достаточно оправданным[16]. Уравнения (41), выражающие закон сохранения энергии для продольного и поперечного теплового движения, были выведены Чу, Гольдбергером и Лоу (ЧГЛ) в 1957 г. В первом приближении по параметру ω скорости $\boldsymbol{V}^{\pm}$ плазменных частиц, рассчитываемые по формуле (31), совпадает со средней скоростью дрейфа ведущего центра, вычисленной в том же приближении. В этом случае величины

$$\frac{p_\perp^\pm}{n^\pm|\boldsymbol{B}|} = \frac{M^\pm\langle c_\perp^2\rangle}{2|\boldsymbol{B}|} \equiv \mathsf{M}_1^\pm, \quad \langle c_\perp^2\rangle \equiv (n^\pm)^{-1}\int c_\perp^2 f^\pm d\boldsymbol{c}, \tag{42}$$

$$\frac{p_\parallel^\pm |\boldsymbol{B}|^2}{(n^\pm)^3} = \frac{M^\pm\langle c_\parallel^2\rangle|\boldsymbol{B}|}{(n^\pm)^3} \equiv \mathsf{M}_2^\pm, \quad \langle c_\parallel^2\rangle \equiv (n^\pm)^{-1}\int (c_\parallel - V_\parallel^\pm)^2 f^\pm d\boldsymbol{c}\,, \tag{43}$$

определённые согласно уравнениям (41), совпадают с адиабатическими инвариантами в системе отсчёта, движущейся со средней дрейфовой скоростью частиц. Первый из инвариантов $\mathsf{M}_1^\pm$ представляет собой среднее значение эквивалентного магнитного момента[17]. Второй инвариант непосредственно связан с продольным адиабатическим инвариантом $J_\parallel$[17].

Сложив теперь (36), (45), (41) для электронов и ионов, придём к полной системе гидродинамических уравнений в одножидкостном приближении для бесстолкновительной плазмы в сильном магнитном поле (уравнения ЧГЛ).

$$\frac{\partial n}{\partial t} + div(n\boldsymbol{V}) = 0, \tag{44}$$

$$\rho\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = Div\vec{\boldsymbol{P}} - \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{B}\times rot\boldsymbol{B}, \tag{45}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p_\perp}{n|\boldsymbol{B}|}\right) = 0\,, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{p_\parallel|\boldsymbol{B}|^2}{n^3}\right) = 0, \tag{46}$$

$$\partial\boldsymbol{B}/\partial t = rot(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B}), \quad div\boldsymbol{B} = 0\,, \tag{47}$$

где $\vec{\boldsymbol{P}} = -p_\perp\boldsymbol{I} + (p_\perp - p_\parallel)\boldsymbol{hh}$, $p_{\parallel,\perp} = p_{\parallel,\perp}^+ + p_{\parallel,\perp}^-$.

Отметим, что адиабатические соотношения (46) можно истолковать следующим образом: при сжатии плазмы в направлении магнитного поля величины $|\boldsymbol{B}|$ и $p_\perp$ не изменяются; величины $p_\parallel$ и n оказываются связанными адиабатическим законом с показателем адиабаты $\gamma = 3$ в соответствии с тем, что увеличивается энергия одной продольной степени свободы; при сжатии плазмы в направлении, перпендикулярном к магнитному полю, давление $p_\parallel$ остаётся постоянным; согласно условию «вмороженности» (47) $|\boldsymbol{B}| \sim n$ и, следовательно, второе соотношение (46) интерпретируется как адиабата с $\gamma = 2$, что свидетельствует об увеличении энергии двух степеней свободы в плоскости, перпендикулярной $\boldsymbol{B}$.

Суммируем теперь основные требования, при которых справедливо описание бесстолкновительной плазмы с помощью гидродинамических уравнений:

− характерные времена (длины) физических процессов $T(L)$ много меньше времени релаксации τ_{rel} (длины релаксации λ_{rel}), за которое устанавливается равновесное состояние;

− характерные пространственные, масштабы задачи значительно превышают циклотронный радиус, временные масштабы много больше периода циклотронного обращения ($T \gg 1/\omega$, $L \gg R$);

− система локально электроквазинейтральна, что имеет место, если плазменная частота электронов больше их циклотронной частоты ($\Omega \gg \omega$);

− отношение массы электрона к массе иона пренебрежимо мало по сравнению с единицей, что отвечает случаю достаточно медленных процессов, когда инерцией электронов можно пренебречь;

− ток смещения пренебрежимо мал (характерная скорость процесса L/T мала по сравнению со скоростью света c);

− потоки тепла вдоль силовых линий магнитного поля незначительны, т.е. справедлив адиабатический закон.

Система квазигидродинамических уравнений ЧГЛ (44)-(47) с успехом используется для описания межпланетной космической плазмы, поскольку для неё функции распределения частиц по скоростям характеризуются малостью третьих моментов, так что предположение о малости потоков $q\boldsymbol{h}$ и $s\boldsymbol{h}$ оказывается допустимым[31]. Вместе с тем эта система уравнений, учитывающая анизотропию давления (температуры), оказывается более пригодной и для описания динамических процессов в магнитосфере и плазмосфере по сравнению с уравнениями обычной магнитной гидродинамики, часто используемыми при анализе процессов в этих областях.

Попытка рассмотрения взаимодействия частиц ионосферной плазмы с нейтралами на основе анизотропной столкновительной гидродинамики (с использованием 16-моментного приближения для решения кинетического уравнения) предпринята в работе[32].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проанализированы теоретические модели, используемые для описания динамических процессов в магнитосфере и плазмосфере планеты. Магнитное поле считается весьма сильным, так что циклотронная частота вращения частиц в нем велика по сравнению с частотой столкновений, а расстояния, на которых меняются все величины в плазме, велики по сравнению с циклотронным радиусами частиц. Как известно, такое магнитное поле сильно ограничивает движение частиц в поперечном направлении. Обсуждаются способы моделирования движения заряженных частиц, учитывающие коллективные свойства магнитосферной плазмы в самосогласованных электромагнитных полях. Показано, что медленные по сравнению с циклотронной частотой ионов движения плазмы могут быть описаны совокупностью дрейфовых кинетических уравнений для продольного движения и уравнений гидродинамического типа для движения поперёк магнитного поля. Исходя из кинетических уравнений в случае определённой симметрией, вследствие которой отсутствуют тепловые потоки вдоль силовых линий, выводятся уравнения двухжидкостной квазигидродинамики, пригодные для описания медленных движений плазмы с анизотропным тензором давления. Используемый в работе подход применим к исследованию эволюции плазмы за время, которое является коротким по сравнению со временем термализации. Кроме этого, прямые измерения космической плазмы в доступных для космических аппаратов областях (в верхней ионосфере, магнитосфере Земли и солнечном ветре) показали наличие в плазме температурной анизотропии относительно направления магнитного поля. Широко применявшееся приближение ЧГЛ для описания бесстолкновительной плазмы обладает известными ограничениями, поскольку не учитывает потоки тепла вдоль силовых линий Вместе с тем, полученные в работе квазигидродинамические уравнения (36)-(42) для температурно анизотропной космической плазмы могут быть использованы, в частности, для установления потоковой неустойчивости, вызванной тепловым потоком вдоль магнитного поля.

Работа выполнена при частичной поддержке Программы Президиума РАН № 28 и грантов РФФИ № 17-02-00507, 18-01-00064.

REFERENCES

[1] J.W. Freeman, M. Ibrahim, "Lunar electric fields, surface potential and associated plasma sheaths", *Moon*. **14**, 103-114 (1975).

[2] J.W. Belcher, "The low energy plasma in the jovian magnetosphere". In: Dessler, A.J. (Ed.), *Physics of the Jovian Magnetosphere*. Cambridge University Press. New York. 69-105 (1983).

[3] J.A. Slavin, "Mercury's magnetosphere", *Advances in Space Research,* **33** (11), 1859-1874 (2004).

[4] S.H. Brecht, "Solar wind proton deposition into the Martian atmosphere", *J. Geophys. Res*. **102** (11), 287-294 (1997).

[5] M.E. Brown, A.H. Bouchez, "The response of Jupiter's magnetosphere to an outburst on Io", *Science*, **278** (5336), 268-271 (1997).

[6] M. Kane, B.H. Mauk, E.P. Keath, S.M. Krimigis, "Structure and dynamics of the Uranian magnetotail: results from hot plasma and magnetic field observations", *J. Geophys. Res*. **96** (11), 485-499 (1991).

[7] J.G. Luhmann, M. Tatrallyay, R.O. Pepin (Eds.), *Venus and Mars: Atmospheres, Ionospheres and Solar Wind Interaction*, American Geophysical Union. Washington. DC. (1992).

[8] R.P. Lin, O.L. Mitchell, D.W. Curtis, K.A. Anderson, C.W. Carlson, J. McFadden, M.H. Acuna, L.L. Hood, A. Binder, "Lunar surface magnetic fields and their interaction with t he solar wind: results from lunar prospector", *Science*. **281,** 1480-1484 (1998).

[9] C.T. Russell, *Venus Aeronomy*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. (1991).

[10] C.T. Russell, "The dynamics of planetary magnetospheres", *Planet Space Sci*. **49,** 1005-1030 (2001).

[11] G. Chew, M. Goldberger, F. Low, "The Boltzmann Equation and the One-Fluid Hydromagnetic Equations in the Absence of Particle Collisions", *Proc. Roy. Soc. Series A*. **236 (**1204), 112-118 (1956).

[12] P.V. Breslavskiy, A.V. Mazhukin, O.N. Koroleva, "Simulation of the dynamics of plasma expansion, the formation and interaction of shock and heat waves in the gas at the nanosecond laser irradiation", *Mathematica Montisnigri*, **33**, 5-24 (2015).

[13] S. Chandrasekhar, A. Kaufman, K. Watson, "Properties of an ionized gas of low density in a magnetic field. III", *Annals of Phys*. **2** (5), 435-470 (1957).

[14] S. Chandrasekhar, A. Kaufman, K. Watson, “Properties of an ionized gas of low density in a magnetic field. IV”, *Annals of Phys*. **5**, 1-25 (1958).
[15] B.B. Kadomtsyev, “O dinamike plazmy v silnom magnitnom pole”, *V sbor.: Fizika pkazmy i problemy upravlyaemykh termoyadernykh reaktsyy*. *M.: Izdatelstvo AN SSSR*, **4**, 370-379 (1958).
[16] L.I. Rudakov, R.Z. Sagdeev, ”O kvazigidrodinamicheskom opisanii razrezhennoy plazmy,nakhodyashcheysy v magnitnom pole”, *V sbor.: Fizika pkazmy i problemy upravlyaemykh termoyadernykh reaktsyy*. *M.: Izdatelstvo AN SSSR*. **3**, 268-277 (1958).
[17] G.F. Volkov, ”Gidrodinamicheskoe opisanie silno razrezhennoy plazmy”, *V sbor.: Voprosy teorii plazmy*, *Pod red. N.A. Leontovicha, M.: Gos-atom-izdat.*, **4**, 3-19 (1964).
[18] J.J. Ramos. “Finite-Larmor-radius kinetic theory of a magnetized plasma in the macroscopic flow reference frame”, *Phys. Plasmas*. **15**. 082106-(1-11) (2008).
[19] D.V. Sivukhin, “Dreyfovay teoriya dvizheniya zaryazhennoy chastitsy v elektro-magnitnykh polyakh”, *V sbor. Voprosy teorii plazmy, Pod red. N.A. Leontovicha, M.: Gos-atom-izdat.,* **1,** 7-97 (1963).
[20] A.I. Morozov, A.S. Solovyev, “Dvizhenie zaryazhennykh chastits v elektro-magnitnykh polyakh”, *V sbor. Voprosy teorii plazmy*, *Pod red. N.A. Leontovicha. M.: Gos-atom-izdat,* **2**, 177-261 (1963).
[21] A.A. Vlasov “O vibratsionnykh svoystvakh elektronnogo gaza*”, UFN*. **93**. 444-470 (1967).
[22] N.N. Bogolyubov, D.N. Zubarev, “Metod asimptoticheskogo priblizheniya dlya system s vrashchayushcheysya fazoy i ego primenenie k dvizheniyu zaryazhennykh chastits v magnitnom pole”, *Ukr. Matem. Zhun*., **7** (1), 5-17 (1955).
[23] A. B. Mikhalovskiy, V. S. Tsypin, “Plasma transport drift equations”, *Sov. Phys. JETP*. **56** (1), 75-79 (1982).
[24] H. Tasso, G. N. Throumoulopoulos, “A comparison of Vlasov with drift kinetic and gyrokinetic theories”, *Phys. Plasmas*. **18** (6), 064507- (1-3) (2011).
[25] H. Tasso, G. N. Throumoulopoulos, “Vlasov versus reduced kinetic theories for helically symmetric equilibria”, *Phys. Plasmas*. **20**, 042508-(1-5). (2013).
[26] K. A. Brueckner, K. M. Watson, “Use of the Boltzmann Equation for the Study of Ionized Gases of Low Density. II”, *Phys. Rev*. **102** (1), 19-27. (1956).
[27] A.B. Mikhaylovskiy, *Teoriya plazmennykh neustoychivostey, T.*2. M.: Atomizdat. (1977).
[28] F.K. Charles, J.M. Greene, “Finite Larmor Radius Hydromagnetics”, *Annals of Phys*. **38**, 63-94 (1966).
[29] K.K. Inozemtseva, M.B. Markov, F.N. Voronin, “The electromagnetic and thermomechanical effects of electron beam on the solid barrier”, *Mathematica Montisnigri*, **39**, 79-100 (2017)
[30] C. F. Kennel, J. M. Greene, “Finite Larmor Radius Hydromagnetics”, *Annals of Phys*. **38**, 63-94 (1966).
[31] V.B. Baranov, K.V. Krasnobaev, *Gidrodinamicheskaya teoriya kosmicheskoy plasmy*. M.: Nauka. (1977).
[32] Yu.V. Konikov, G.V. Khazanov, “The effect of electron-temperature anisotropy on the distribution of charged-particle density in the plasmasphere”, *Geomagnetizm i Aeronomiia*. **22**, 323-325 (1982).

Received December 1, 2017