КРИТЕРИЙ ТЕРМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЦ ДЛЯ САМОГРАВИТИРУЮЩИХ АСТРОФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ В РАМКАХ СТАТИСТИКИ ТСАЛЛИСА

А.В. КОЛЕСНИЧЕНКО

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
Москва, Россия
e-mail: kolesn@keldysh.ru, web page: http:.keldysh.ru/kolesnichenko/person.htm

Ключевые слова: Неэкстенсивная статистика, энтропия Тсаллиса, самогравитирующие системы, степенной закон распределения, обобщенная кинетическая теория.

Аннотация. Предложена процедура включения ньютоновского потенциала самогравитации и центробежного потенциала в квазиравновесное степенное распределение в фазовом пространстве, полученное в рамках неэкстенсивной статистики на основе модифицированного кинетического уравнения Больцмана с усреднением по ненормированному распределению. Показано, что если степенное распределение удовлетворяет стационарному q-кинетическому уравнению, то это уравнение накладывает чётко выраженные ограничения на характер дальнодействующего силового поля, а также на возможную зависимость гидродинамических параметров от координат, тем самым фактически определяя эти параметры единственным образом. Даётся термодинамический критерий устойчивости равновесия неэкстенсивной системы. Полученные результаты позволяют более адекватно моделировать эволюцию газообразных астрофизических систем, и, в частности, гравитационную устойчивость вращающихся протопланетных аккреционных дисков.

CRITERION OF THERMAL OF STABILITY AND THE LAW OF DISTRIBUTION OF PARTICLES FOR SELF-GRAVITATING ASTROPHYSICAL SYSTEMS WITHIN THE TSALLIS STATISTICS

A.V. KOLESNICHENKO

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Science
e-mail: kolesn@keldysh.ru, web page: http:.keldysh.ru/kolesnichenko/person.htm

Summary. There is proposed the procedure of introduction newtonian potential of self-gravitation and centrifugal potential in quasi-equilibrium power distribution in the phase space, received within the limits of non- extensive statistics on the basis of the modified kinetic Boltsman' equation with averaging on non-normalized distribution. It is shown that if power distribution satisfies to the kinetic stationary equation this equation imposes accurately expressed restrictions on character a long-range force field, and also on possible dependence of hydrodynamic parameters on coordinates, thereby actually defining these parameters

2010 Mathematics Subject Classification: 85A35, 82C40, 91B50.
Key words and Phrases: Nonextensive statistics, Tsallis entropy, self-gravitating system, power-law distribution, generalized kinetic theory.

uniquely. The thermodynamic stability criterion of an equilibrium of non-extensive system is given. The gained results allow to model more adequately evolution of gaseous astrophysical systems, and, in particular, gravitational stability twirled protoplanetary accretion did.

1. ВВЕДЕНИЕ

Во многих астрофизических задачах, связанных с изучением эволюции сложных динамических систем, состоящих их многих тел (задач с богатой историей), классическая статистическая механика (и термодинамика) часто утрачивает свою значимость в качестве инструментального средства исследования, в частности, из-за наличия длительного воздействия на систему дальнодействующих сил. Канонический подход, основанный на аддитивной энтропии $S_{BG} = -k\int p\ln p d\mathbf{z}$ Больцмана−Гиббса (БГ), оказывается продуктивным только для достаточно быстрых столкновительных взаимодействий материальных частиц, для которых время между соударениями много меньше всех других характерных в астрофизике интервалов времени. Однако он терпит неудачу, когда имеются дальнодействующие силы, такие, например, как фундаментальные ньютоновские гравитационные силы или кулоновские электрические силы. В частности, для самогравитирующих систем многих тел с сильным гравитационным взаимодействием между отдельными её частями и другими пространственно-временными сложностями обычно принимаемая аксиома аддитивности энтропии не работает и для адекватного описания эволюции подобных систем статистика БГ должна быть модифицирована[1].

В последние годы в качестве обобщения статистики Больцмана−Гиббса была предложена неэкстенсивная (неаддитивная) статистика[2-8], основанная на q-энтропии Тсаллиса $S_q[p] = k(q-1)^{-1}\int p\left\{1-p^{q-1}\right\}d\mathbf{z}$, где энтропийный индекс q (параметр неаддитивности системы) представляет собой действительное число, принадлежащее интервалу $(0,\infty]$. Эта новая статистика привлекла огромное внимание исследователей, что объясняется как новизной возникающих здесь теоретических проблем, так и важностью приложений[9-10]. Она является очень полезным инструментарием для статистического описания сложных (аномальных) систем[i], фактические свойства которых находятся вне области применимости статистики БГ, например, при наличии дальнодействующего силового взаимодействия и нелокальных корреляций в пределах системы, или фрактальности фазового пространства. Для статистики Тсаллиса вероятность реализации больших значений энергии для сложных систем убывает не экспоненциально быстро, а степенным образом.

Неэкстенсивная статистика была успешно использована для решения большого количества важных астрофизических проблем. В частности, задача, связанная с нахождением устойчивых квазиравновесных состояний материальных частиц в самогравитирующих астрофизических системах, представляет в этом ряду значительный интерес,

[i] Характерным признаком сложной (аномальной) системы является несводимость её к простой сумме отдельных частей. В частности, сильное гравитационное взаимодействие частиц внутри астрофизического диска часто является причиной термодинамической неаддитивности системы, когда, например, её энтропия и другие усреднённые значения физических величин (в частности, энергия) не являются аддитивными величинами[11]

поскольку длительное гравитационное воздействие[ii], играющее, в конечном счёте, решающую роль в определении эволюции подобных систем, позволяет выявить ряд новых неаддитивных эффектов[12-23]. В качестве примера можно указать на задачу определения критерия термогравитационной неустойчивости реального самогравитирующего звёздного скопления (проявляющейся в форме, так называемой, гравотермической катастрофы[iii]), которая первоначально была исследована в астрофизической литературе в рамках классической статистики и термодинамики[24-29]. При этом было показано, что термостатистика самогравитирующих систем характеризуется специфическими особенностями, такими как отрицательная удельная теплоёмкость, отсутствие глобальных максимумов энтропии, неэквивалентность статистических распределений, нарушение марковости физических процессов и т.д., которые значительно отличают их от обычных термодинамических систем. Относительно недавно, эта классическая проблема была вновь проанализирована в серии работ в рамках неэкстенсивной статистики с использованием обобщённой энтропии Тсаллиса; при этом было показано, что обобщённая термостатика с $q \neq 1$ лучше, чем статистика БГ, приспособлена для решения проблемы гравотермической катастрофы[6,12-14,30]. В частности, квазиравновесное распределение частиц газообразных сфер, полученное на основе энтропии Тсаллиса, приводит к уравнениям состояния (звёздным политропам[31,32], на основе которых можно было детально проанализировать термогравитационную стабильность бесстолкновительных звёздных систем для различных политропических показателях[12-14,19].

Вместе с тем, все ещё остаются некоторые существенные проблемы, связанные с применением формализма Тсаллиса. Среди них одна из важнейших − выбор среднего по ансамблю для физической величины $g_j(p,z)$, $(j = 1,2,..,n)$ в состоянии p, характеризующей систему. Существует три способа[2,5,33,34] усреднения величины g_j по трём распределениям: p, p^q и $p^q / \int p^q dz$. Эти способы усреднения, каждый из которых имеет, вообще говоря, свои преимущества и недостатки, определяют совершенно разные q-термодинамики, соответствующие тем или иным термодинамически аномальным системам. В работах[12-14,18-21] при анализе гравотермической катастрофы был использован первоначальный формализм Тсаллиса со стандартным линейным способом усреднения $G_j^{Ts} \equiv \langle g_j \rangle = \ = \int dz\, p g_j$. Получаемые в этом случае некоторые нежелательные несоответствия, по мысли ряда авторов, могут быть благополучно устранены путём использования статистики Тсаллиса−Мендеса−Пластино (TMP), когда усреднение $G_j^{TMP} \equiv \int g_j P_q dz$, производится по так называемому нормированному эскортному распределению вероятности $P_q(z) \equiv p^q / \int p^q dz$ (см, например,[2,5,14,34]).

В связи с имеющимися расхождениями в этих подходах, возникает вопрос об адекватности описания равновесных q-термодинамик, связанных с тремя различными спо-

---

[ii] В реальной астрофизической системе временная шкала воздействия гравитационных сил намного длиннее, чем время столкновительной релаксации.

[iii] При гравотермической катастрофе система гравитационно взаимодействующих частиц подвержена центральному непрерывному сжатию и никакого состояния равновесия не существует.

собами усреднения. Существует точка зрения[35-37], которой придерживается и автор данной статьи, что единственно правильным усреднением является усреднение Курадо−Тсаллиса (CT) $G_j^{CT} = \int g_j\, p^q d\mathbf{z}$ с ненормированным распределением p^q. Важно отметить, что только это распределение не приводит к переопределению температуры системы, которая в этой статистике является интенсивным параметром, а не функционалом. Конечно, возможны различные соображения по поводу адекватности различных способах усреднения. Однако, для того чтобы в полной мере оценить потенциал различных неэкстенсивных термодинамик Тсаллиса, представляется целесообразным провести дополнительное рассмотрение, например, гравотермической катастрофы в рамках статистики с ненормированным распределением p^q.

Как уже отмечалось, для газообразных динамических систем с самогравитирующим взаимодействием дальнего действия, таких как газообразные астрофизические диски, столкновения между частицами (быстрые динамические процессы) играют, вообще говоря, определяющую роль в их эволюции. Вместе с тем, более медленные динамические процессы, связанные с дальними гравитационными межчастичными взаимодействиями (неэкстенсивные эффекты, так называемые q-столкновения) также должны быть рассмотрены в рамках q-кинетической теорией газов, когда масса, импульс и кинетическая энергия сталкивающихся частиц сохраняются на временах, характерных для более продолжительных q-столкновений. Основной целью данной работы является рассмотрение для системы, состоящей из многих тел (в частности, газообразной дисковой системы), процедуры подключения ньютоновского потенциала самогравитации и центробежного потенциала в степенное q- распределение частиц в фазовом пространстве, полученное с учётом усреднения по p^q в рамках неэкстенсивной q-статистики на основе модифицированного кинетического уравнения[38] с интегралом столкновений в форме Бхатнагара−Гросса−Крука (БГК).

2. НЕКОТОРЫЕ БАЗОВЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ФОРМАЛИЗМА НЕАДДИТИВНОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ

Исследования в области неэкстенсивной (неаддитивной) статистической механики (термодинамики) сложных (аномальных) систем, основанной на параметрической неаддитивной энтропии Хаврда−Чарват−Тсаллиса приобретают в последнее время все более значительный интерес. Это объясняется как новизной возникающих здесь теоретических проблем, так и важностью многочисленных физических приложений. Обзорам исследований в этом разделе статистической механики, начало которым было положено в работе К. Тсаллиса[1], посвящены многочисленные журнальные статьи, сборники и монографии. Кроме этого имеется постоянно обновляющаяся полная библиография[39], которая на сегодняшний день состоит из более 5600 ссылок. К сложным системам с нелинейной динамикой относятся также и системы с фрактальной природой[40]. Формализм неэкстенсивной статистики позволяет с единых позиций исследовать большой круг вопросов, относящихся к анализу фрактального фазового пространства для системы подобного типа[41-44].

Рассмотрим статистический ансамбль Гиббса, представляющий в своей совокупности макроскопическое состояние сложной системы. Пусть статистический ансамбль определяется непрерывной фазовой функцией распределения $p(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c},t)$ «частиц» по пространству скоростей $\boldsymbol{c}$ и физическому пространству $\boldsymbol{r}$. Элемент объёма фазового пространства (с нецелой, в общем случае, размерностью) обозначим через $d\boldsymbol{z}$. Будем далее считать, что когда области интегрирования специально не указаны, используемые ниже интегралы охватывают всю геометрическую область рассматриваемой системы и все пространство скоростей соответственно. Параметрическая q-энтропия Тсаллиса при учёте вероятностной нормировки для распределения $p(\boldsymbol{z})$ определяется выражением[4]

$$S_q\left[p\right]=\boldsymbol{E}_q\left[s_q(p)\right]=\int s_q(p)p^q d\boldsymbol{z}=\frac{k}{(q-1)}\int p(\boldsymbol{z})\left\{1-[p(\boldsymbol{z})]^{q-1}\right\}d\boldsymbol{z}, \qquad (1)$$

где $\int p(\boldsymbol{z})d\boldsymbol{z}=1-$ условие нормировки; k − постоянная Больцмана. Функционал (1) является средним значением микроскопической энтропии $s_q(p)\equiv k(1-q)^{-1}(1-p^{1-q})$, где усреднение проводится ненормированным распределением p^q. Энтропийный индекс (параметр неаддитивности системы) q представляет собой действительное число, принадлежащее интервалу $(0,\infty]$. В пределе $q\to 1$ функционал (1) равняется энтропии Больцмана−Гиббса. Действительно, в пределе $q\to 1$ имеем: $p^{q-1}\equiv \exp\{(q-1)\ln p\}\to 1+(q-1)\ln p$, и энтропия S_q сводится к виду $\lim\limits_{q\to 1}S_q\left[p\right]=S_{BG}\left[p\right]=k\int p(\boldsymbol{z})\ln[1/p(\boldsymbol{z})]d\boldsymbol{z}$. Согласно гипотезе Тсаллиса параметр деформации q характеризует некоторые дополнительные степени свободы, присущие сложным системам, и должен определяться *a posteriori*. Параметр q ничем не ограничен и может принимать значения от 0 до $+\infty$, однако некоторые ограничения могут возникнуть в той или иной конкретной задаче; случаи $q<1$, $q=1$ и $q>1$ соответственно соотносятся с супераддитивностью, аддитивностью и субаддитивностью сложной системы.

Отметим, что q-энтропия Тсаллиса может быть представлена в «классической форме» Больцмана $S_q\left[p\right]=-k\int[p(\boldsymbol{z})]^q\ln_q[p(\boldsymbol{z})]d\boldsymbol{z}=k\int p(\boldsymbol{z})\ln_q[1/p(\boldsymbol{z})]d\boldsymbol{z}$, если использовать так называемый q-логарифм $\ln_q x\equiv\dfrac{x^{1-q}-1}{1-q}$ $(x\geq 0;\ \ln_1 x=\ln x)$. Его обратная функция, q-экспонента Тсаллиса, задаётся формулой $\exp_q x\equiv[1+(1-q)x]_+^{1/(1-q)}$, где $\exp_q x=0$, если $[1+(1-q)x]\leq 0$; при этом имеет место равенство $\exp_q(\ln_q x)=\ln_q(\exp_q x)=x$. Такое деформирование логарифма позволяет объяснить важную особенность поведения сложных систем (в частности, термодинамически аномальных систем с длиной памятью, с фрактальным характером фазового пространства, с дальнодействующими взаимодействиями между отдельными её частями и другими пространственно-временными сложностями), когда вероятность реализации больших значений энергии состояний убывает (при $q>1$) не экспоненциально быстро, а степенным образом. Благодаря этому статистика Тсаллиса может описывать события практически недостижимые в простых физических системах.

Характерной особенностью q-энтропии является её неаддитивный характер

$$S_q[p_{12}] = S_q[p_1] + S_q[p_2] - k^{-1}(1-q)S_q[p_1]\,S_q[p_2]. \quad (2)$$

Здесь состояние неэкстенсивной системы описывается совместным мультиплика тивным распределением $p_{12}\left(z_1,z_2\right)=p_1\left(z_1\right)p_2\left(z_2\right)$, где z_1 и z_2 относятся к двум независимым физическим системам. После подстановки $p_{12}\left(z_1,z_2\right)$ в выражение $S_q[p_{12}]=k^{-1}(1-q)\left(1-\iint p_{12}^q dz_1 dz_2\right)$ для общей энтропия получим, с учётом условий нормировки $\iint p_{12} dz_1 dz_2 = \int p_1 dz_1 = \int p_2 dz_2 = 1$, характерное свойство неаддитивности (2) для энтропии двух независимых систем.

Величина q характеризует целый класс различных термодинамик, соответствующих тем или иным термодинамически аномальным системам. Статистический ансамбль Гиббса реализуется следующими множествами: множеством всех его состояний, описываемых фазовой плотностью распределения вероятностей $p(z)$ и множеством случайных физических величин $g_j(z)$ $(j=1,2,...,n)$. Далее для определения средних значений G_j величин $g_j(z)$ воспользуемся статистикой[4] CT, используемой нами в ряде работ[38,45-49], когда усреднение определяется формулой:

$$G_j^{CT} = \boldsymbol{E}_q\left[g_j\right] \equiv \int g_j(z)[p(z)]^q dz, \quad (j=1,2,..,n), \quad (3)$$

которая отвечает (при $q=1$) стандартному определению среднего значения. Эта статистика приводит к абсолютной температуре T (когда имеет место равенство температур двух независимых систем при их тепловом контакте), благодаря чему не нарушается схема Лежандра в соответствующей макроскопической термодинамике для сложных систем. Принципиальным недостатком статистики CT является ненормированность используемого усреднения на единицу, $N_q \equiv \int [p(z)]^q dz \neq 1$ (величина N_q − деформированная единица, представляет деформацию условия нормировки (1) с показателем q). В связи с определением (3) важно отметить следующее: на основе q-энтропии Тсаллиса (1) можно получить совершенно разные статистические картины (даже для одной системы), если исходить из различных способов усреднения, каждое из которых имеет, вообще говоря, свои преимущества и недостатки. Первоначальная статистика Тсаллиса, когда усреднение производится классическим образом $G_j^{Ts} = \boldsymbol{E}\left[g_j\right] \equiv \int g_j(z)\,p(z)d\boldsymbol{z}$, приводит к нарушению структуры Лежандра теории сложных систем (поскольку обратное значение абсолютной температуры не сводится к множителю Лагранжа β), что значительно усложняет их термодинамическое описание. С другой стороны, широко используемая в литературе статистика[5] Тсаллиса−Мендеса−Пластино, когда усреднение

$$G_j^{TMP} \equiv \int g_j(z)\left\{\left[p(z)\right]^q / N_q\right\}d\boldsymbol{z}, \quad (j = 1,2,..,n),$$

производится по так называемому *нормированному эскортному распределению вероятности* $P_q(z) \equiv [p(z)]^q / \int [p(z)]^q d\boldsymbol{z}] \equiv [p(z)]^q / N_q$, хотя и приводит к аддитивности усреднённой внутренней энергии системы, однако она же приводит (при использовании обобщённого нулевого начала термодинамики) к так называемой физической (эффективной) температуре $T_{ph}(q) \equiv T\left[1 + k^{-1}(1-q)S_q\right]$, являющейся функционалом. Совершенно ясно, что такое переопределение температуры противоречит термодинамике, где абсолютная температура является интенсивным параметром системы, а не функционалом. Температура $T_{ph}(q)$ также не сохраняет структуру Лежандра термодинамической схемы сложных систем[50-51].

Итак, для неэкстенсивных систем существенно свойство (2) псевдоаддитивности энтропии[37], которое для статистики Курадо−Тсаллиса распространяется на энергии, свободные энергии и т.д. Вместе с тем эта статистика приводит к равенству температур контактирующих независимых систем, сохраняя при этом исходный метод усреднения физических величин ненормированным распределением p^q. Заметим, что такое усреднение впервые было применено в основополагающих работах[35,41], где приводится вывод энтропии (1) для неэкстенсивных систем из известных аксиом Хинчина[42] в теории вероятности при обобщении аксиомы об энтропии совместного распределения статистически зависимых систем. Именно по этой причине статистику Курадо−Тсаллиса для энтропии Хаврда−Чарват−Тсаллиса следует считать единственным правильным усреднением, что собственно и было убедительно показано в работах[36,37]; это утверждение делается более веским благодаря тому обстоятельству, что только данная статистика при $q = 1$ не нарушает известную взаимосвязь $s(p) - \boldsymbol{E}\left[s(p)\right] = \beta\left\{H - \left[\boldsymbol{E}(H)\right]\right\}$ флуктуаций микроскопической энтропии Больцмана−Гиббса−Шеннона с флуктуациями функции Гамильтона $H(\boldsymbol{z})$, характеризующей математическую модель изучаемых физических процессов в системе.

Экстремум энтропии и равновесные состояния. Равновесное состояние неэкстенсивной динамической системы характеризуется распределением $p(\boldsymbol{z},\theta)$, которое не меняется с течением времени. Оно может быть найдено, в частности, путём нахождения экстремума энтропии Тсаллиса (1) при сохранении нормировки распределения $p(\boldsymbol{z},\theta)$ и заданном значении макроскопических величин

$$G_j(\theta)=\int g_j(z,\theta)[p(z,\theta)]^q dz \quad (j=1,2,..,n).$$

Здесь индекс j относится к набору величин, полностью характеризующих состояние макроскопической системы; $\theta=\{\theta_1,\theta_2,..\}$ – некоторые интенсивные термодинамические параметры, характеризующие равновесное состояние системы (например, температура, объём и т.п.). Для нахождения распределения в условиях равновесия вычислим безусловный экстремум лагранжиана[52] (удлинённой энтропии Тсаллиса)

$$L\equiv S_q-\alpha_0\left\{\int p(z)dz-1\right\}-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\left\{\int g_j(z)[p(z)]^q dz-G_j\right\}, \tag{4}$$

где α_0 и α_j – множители Лагранжа. Условие $\delta L=0$ приводит к следующему экстремальному распределению (которое соответствует классическому обобщённому каноническому распределению Гиббса)

$$p^{(eq)}(z,\theta)=Z_q^{-1}\left\{1-k^{-1}(1-q)\sum_{j=1}^{n}\alpha_j g_j(z)\right\}^{1/1-q}, \tag{5}$$

где

$$Z_q(a)\equiv\left\{\frac{1}{q}\left[1+(1-q)\frac{\alpha_0}{k}\right]\right\}^{\frac{1}{1-q}}=q^{\frac{1}{1-q}}\exp_q\left(\frac{\alpha_0}{k}\right)=\int dz\left\{1-k^{-1}(1-q)\sum_{j=1}^{n}\alpha_j g_j(z)\right\}^{\frac{1}{1-q}} \tag{6}$$

– обобщённая статистическая сумма; постоянные лагранжевы множители α_0 и α_j определяются из условия нормировки функции $p^{(eq)}(z)$ и уравнений

$$G_j(\theta)=Z_q^{-1}\int dz\, g_j(z)\left\{1-k^{-1}(1-q)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i g_i(z)\right\}^{\frac{1}{1-q}}, \quad (j=1,...,n). \tag{7}$$

Заметим, что при $1-k^{-1}(1-q)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i(z)>0$ равновесное распределение (5) принимает вид:

$$p^{(eq)}(z)=Z_q^{-1}\exp_q\left\{-k^{-1}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j g_j(z)\right\}, \tag{5*}$$

а в пределе $q\to 1$ из (5) и (6) следует большое каноническое распределение Гиббса для аддитивных систем[52]

$$p^{(eq)}(z,\theta)=\exp\left\{-\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j g_j(z)\right\}\Big/\int\exp\left\{-\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j g_j(z)\right\}dz. \tag{8}$$

q**-*Термодинамика.*** Распределение (5) позволяет определить следующее экстремальное значение q-энтропии Тсаллиса

$$S_q^{(eq)} = \frac{k}{q-1}\left[1 - Z_q^{1\text{-}q}\int \frac{dz\, p(z)}{1 - k^{-1}(1-q)\sum_{j=1}^{n}\alpha_j g_j(z)}\right] =$$

$$= \frac{k(1 - Z_q^{1\text{-}q})}{q-1} + Z_q^{1\text{-}q}\int \frac{dz \sum_{j=1}^{n}\alpha_j g_j(z)\, p(z)}{1 - k^{-1}(1-q)\sum_{j=1}^{n}\alpha_j g_j(z)} = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j G_j + \frac{k}{1-q}(\mathrm{Z}_q^{1-q} - 1). \quad (9)$$

Если использовать обозначения $G_1 \equiv E_q = \boldsymbol{E}[\varepsilon] = \int \varepsilon(z)[p(z)]^q\, dz$ для средней внутренней энергии системы и $\alpha_1 = \beta \equiv 1/T$ для обратной температуры, то соотношение (9) можно переписать в виде

$$S_q^{(eq)} = \beta E_q + \sum_{j=2}^{n}\alpha_j G_j + k\ln_q \mathrm{Z}_q. \quad (10)$$

Дифференцируя (10), получим обобщённое соотношение Гиббса для неэкстенсивной термодинамики

$$dS_q = \beta dE_q + \sum_{j=2}^{n}\alpha_j dG_j \quad (11)$$

При использовании преобразования Лежандра, из (10) следует термодинамическое равенство

$$d\Phi_q(\beta,\theta) = -E_q d\beta - \sum_{j=2}^{n} G_j\, d\alpha_j\,, \quad (12)$$

где

$$\Phi_q \equiv k\ln_q \mathrm{Z}_q \equiv k\,\frac{\mathrm{Z}_q^{1-q} - 1}{1-q} = S_q - \beta E_q - \sum_{j=2}^{n}\alpha_j G_j \quad (13)$$

− обобщённая функция Массье−Планка, с помощью которой обобщённое равновесное распределение Гиббса (5) может быть переписано в виде

$$p^{(eq)}(\boldsymbol{z},\theta)=\left\{\frac{1+k^{-1}(1-q)\left[-\beta e(\boldsymbol{z})-\sum\limits_{j=2}^{n}\alpha_j g_j(\boldsymbol{z})\right]}{1+k^{-1}(1-q)\Phi_q}\right\}^{\frac{1}{1-q}}. \tag{14}$$

Функция Массье−Планка позволяет представить термодинамические соотношения для большого канонического ансамбля Гиббса в особенно симметричной форме: например, равновесные значения экстенсивных термодинамических переменных определяются из формул:

$$E_q(\beta,\theta)=-\frac{\partial\Phi_q(\beta,\theta)}{\partial\beta},\quad G_j=-\frac{\partial\Phi_q(\beta,\theta)}{\partial\alpha_j},\quad S_q(\beta,\theta)=\Phi_q+\beta E_q+\sum_{i=2}^{n}\alpha_i G_i\,. \tag{15}$$

Наконец, исследуя вторую вариацию $\delta^2 L$ функционала (4), можно найти следующие условия максимальности и минимальности энтропии Тсаллиса (9): максимум q-энтропии достигается, когда $\delta^2 L<0$, $q>0$, а минимум − когда $\delta^2 L>0$, $q<0$ [iv].

Статистический критерий устойчивости равновесной неэкстенсивной системы. Пусть равновесное состояние системы характеризуется равновесным распределением (5). Найдём критерий устойчивости системы при изменении термодинамического параметра θ. Дифференцируя условие нормировки $\int p^{(eq)}(\boldsymbol{z},\theta)d\boldsymbol{z}=1$ распределения $p^{(eq)}$ по θ имеем: $\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\int p d\boldsymbol{z}\right)=\int\frac{\partial p}{\partial\theta}d\boldsymbol{z}=0$. Отсюда следует, что среднее значение микроскопической энтропии $s_q(p)$ равно нулю:

$$\boldsymbol{E}_q\left[\frac{\partial s_q(p)}{\partial\theta}\right]=\int d\,\boldsymbol{z}\,p^q\left(-kp^{-q}\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)=0\,.$$

После дифференцирования по θ этого соотношения получим

$$0=\frac{\partial}{\partial\theta}\boldsymbol{E}_q\left[\frac{\partial s_q(p)}{\partial\theta}\right]\equiv -k\int\frac{\partial^2 p}{\partial\theta^2}d\boldsymbol{z}=\int p^q\,\frac{\partial^2 s_q(p)}{\partial\theta^2}d\boldsymbol{z}-kq\int p\left(\frac{\partial\ln p}{\partial\theta}\right)^2 d\boldsymbol{z}\,,$$

из которого следует, что при $q>0$

$$\int p^q\left[\partial^2 s_q(p)/\partial\theta^2\right]d\boldsymbol{z}>0\,, \tag{16}$$

т.е. имеет место рост среднего значения второй производной от микроскопической энтропии $s_q(p)$ по параметру θ. Неравенство (16) представляет собой общий статисти-

[iv] В этой работе случай отрицательных q не рассматривается.

ческий критерий устойчивости термического равновесия неэкстенсивных систем при изменении параметра θ.

3. РАВНОВЕСНАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЭКСТЕНСИВНОЙ ГАЗООБРАЗНОЙ СИСТЕМЫ

Основные определения. Функции распределения и средние значения. Рассмотрим теперь газообразную динамическую неэкстенсивную систему с непрерывным распределением частиц $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c},t)$ (фундаментальная вероятность) по пространству скоростей и физическому пространству. Элемент объёма фазового пространства (с нецелой, в общем случае, размерностью) обозначим через $d\boldsymbol{z} \equiv d\boldsymbol{r}d^D\boldsymbol{c}$, где D − фрактальная размерность пространства скоростей. Для простоты будем считать, что все частицы имеют одну и ту же массу m и могут взаимодействовать через силу тяжести Ньютона. Величина $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c},t)d\boldsymbol{r}d^D\boldsymbol{c}$ равна среднему числу частиц, находящихся в момент времени t в элементе объёма $d\boldsymbol{r}$ и обладающих скоростями из интервала $d^D\boldsymbol{c}$ нецелого пространства скоростей. Простейшей макроскопической величиной является q-плотность числа частиц $n_q(\boldsymbol{r},t) = \int [f(\boldsymbol{z})]^q d^D\boldsymbol{c}$, которая определяется как число частиц, находящихся в единичном объёме в точке $\boldsymbol{r}$ в момент времени t. Тогда массовая q-плотность в точке $\boldsymbol{r}$ в момент времени t равна $\rho_q(\boldsymbol{r},t) = m\,n_q(\boldsymbol{r},t)$.

Поскольку частица, движущаяся со скоростью $\boldsymbol{c}$, обладает импульсом $m\boldsymbol{c}$ и поскольку в момент времени t в элементе объёма $d\boldsymbol{r}$ содержится $[f(\boldsymbol{z})]^q\,d\boldsymbol{z}$ частиц, скорости которых лежат в элементе $d^D\boldsymbol{c}$ в окрестности $\boldsymbol{c}$, то их полный q-импульс в элементе объёма $d\boldsymbol{r}$ равен $d\boldsymbol{r}\int m\boldsymbol{c}[f(\boldsymbol{z})]^q\,d^D\boldsymbol{c}$. Так как полная q-масса, заключённая в элементе объёма $d\boldsymbol{r}$, равна $\rho_q(\boldsymbol{r},t)d\boldsymbol{r}$, то имеем следующее определение гидродинамической скорости:

$$\boldsymbol{u}_q(\boldsymbol{r},t) \equiv \int m\boldsymbol{c}[f(\boldsymbol{z})]^q\,d^D\boldsymbol{c} \,/\, \rho_q(\boldsymbol{r},t)\,.$$

Скорость молекулы в системе отсчёта, движущейся с локальной гидродинамической скоростью $\boldsymbol{u}_q$ (тепловую скорость) будем обозначать буквой $\boldsymbol{C}_q = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{u}_q$. Рассмотрим теперь энергию частиц, содержащихся в объёме $d\boldsymbol{r}$. Поскольку $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{C}_q + \boldsymbol{u}_q$, то кинетическую энергию частицы можно записать в виде: $\frac{1}{2}m\boldsymbol{c}^2 = \frac{1}{2}m\boldsymbol{C}_q^2 + m\boldsymbol{C}_q\cdot\boldsymbol{u}_q + \frac{1}{2}m\boldsymbol{u}_q^2$. При усреднении этого выражения второй член в правой части не даёт вклада, так как средняя тепловая q-скорость равна нулю. Последний член при усреднении даёт $\rho_q\boldsymbol{u}_q^2/2$; эта величина, очевидно, есть кинетическая энергия элемента континуума, связанная с движением среды как целого. Далее, как известно из классической термодинамики, среднее от $\frac{1}{2}m\boldsymbol{C}_q^2$ равно внутренней энергии газа, поэтому величина

$$\varepsilon_q(\boldsymbol{r},t) \equiv \int \tfrac{1}{2}m\boldsymbol{C}_q^2\,[f(\boldsymbol{z})]^q\,d^D\boldsymbol{c} \,/\, \rho_q(\boldsymbol{r},t)$$

представляет собой удельную внутреннюю энергию (на единицу массы) неэкстенсивной системы.

Векторы потоков. Вектор $\boldsymbol{L}_q(\boldsymbol{r},t) \equiv \int l(\boldsymbol{C}_q)\boldsymbol{C}_q\,[f(\boldsymbol{z})]^q\,d^D\boldsymbol{c}$ является вектором q-потока, связанным с величиной $l(\boldsymbol{C}_q)$. С физической точки зрения вектор $\boldsymbol{L}_q$ важен тем, что скорость потока величины $l(\boldsymbol{C}_q)$ через единичную площадку, движущуюся вместе с газом, равна той компоненте $\boldsymbol{L}_q$, которая направлена по нормали $\boldsymbol{n}$ к поверхности, движущейся с локальной гидродинамической скоростью $\boldsymbol{U}_q$, так что скорость частиц относительно поверхности равна тепловой скорости $\boldsymbol{C}_q$.

Имеется совокупность трёх векторов потоков, связанных с переносом импульса mC_{qj} $(j = 1,2,3)$. Девять компонент этих векторов образуют симметрический тензор второго ранга

$$\boldsymbol{P}_q(\boldsymbol{r},t) = m\int \boldsymbol{C}_q\boldsymbol{C}_q\,[f(\boldsymbol{z})]^q\,d^D\boldsymbol{c}$$

− тензор q-напряжений. Гидростатическое q-давление, или просто давление, определяется как среднее значение нормальных давлений на любые три ортогональные площадки. Следовательно, оно равно $p_q(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{3}\boldsymbol{P}:\boldsymbol{I} = \frac{1}{3}m\int C_q^2\,[f(\boldsymbol{z})]^q\,d^D\boldsymbol{c}$. Здесь $\boldsymbol{I}$ − единичный тензор второго ранга. В частности, если сдвиговые напряжения равны нулю, а нормальные напряжения равны между собой, то $\boldsymbol{P}_q = p_q\boldsymbol{I}$.

Вектор теплового потока получим, полагая $l \equiv \frac{1}{2}mC_q^2$; тогда

$$\boldsymbol{J}_q = \tfrac{1}{2}m\int C_q^2\boldsymbol{C}_q\,[f(\boldsymbol{z})]^q\,d^D\boldsymbol{c}\,.$$

Степенная функция распределения по скоростям. *Р*ассмотрим сначала аномальную континуальную систему, в которой функция распределения не зависит от $\boldsymbol{r}$ (геометрическое пространство однородно) и в которой дальнодействующие гравитационные силы не приводят к нарушению термодинамического равновесия. Предполагая постоянство полной массы $M_q \equiv \rho_q\int d\boldsymbol{r} = m\int [f(\boldsymbol{c})]^q\,d\boldsymbol{z}$, полного импульса $\boldsymbol{u}_q M_q \equiv \int m\boldsymbol{c}[f(\boldsymbol{c})]^q\,d\boldsymbol{z}$ и полной кинетической энергии $e_q M_q \equiv \frac{1}{2}\int m\boldsymbol{c}^2\,[f(\boldsymbol{c})]^q\,d\boldsymbol{z}$ системы, найдём следствия принципа экстремума q-энтропии Тсаллиса. Определим для этого безусловный экстремум функционала

$$L = \frac{k}{(q-1)}\int (f - f^q)d\boldsymbol{z} - \alpha_1 \int m\tfrac{1}{2}\boldsymbol{c}^2 f^q d\boldsymbol{z} - \alpha_2 \int m f^q d\boldsymbol{z} - \boldsymbol{б}_3 \int m\boldsymbol{c}\, f^q d\boldsymbol{z}. \tag{17}$$

где α_k – постоянные множители. Из условия

$$\delta L = \int d\boldsymbol{z}\left[\frac{k}{(q-1)}(1 - qf^{q-1}) - \alpha_1 \tfrac{1}{2}\boldsymbol{c}^2 mqf^{q-1} - \alpha_2 mqf^{q-1} - \boldsymbol{б}_3 \cdot \boldsymbol{c}\, mqf^{q-1}\right] = 0$$

следует равновесное распределение

$$f^{(0)}(\boldsymbol{z},\theta) = \frac{1}{q^{1/(1-q)}}\left\{1 - (1-q)\frac{m}{k}\left[\alpha_1 \tfrac{1}{2}|\boldsymbol{c}|^2 + \alpha_2 + \boldsymbol{б}_3 \cdot \boldsymbol{c}\right]\right\}^{\frac{1}{1-q}}. \tag{18}$$

Если ввести обозначения

$$T_q = \frac{1}{\alpha_1}\left[1 - (1-q)\frac{m}{k}\left(\alpha_2 - \frac{|\boldsymbol{б}_3|^2}{2\alpha_1}\right)\right], \quad \boldsymbol{u} = -\frac{\boldsymbol{б}_3}{\alpha_1}, \tag{19}$$

то распределение (18) может быть переписано в виде

$$f^{(0)}(\boldsymbol{z}) = \tilde{Q}(q)\left\{1 - (1-q)\frac{m}{kT_q}\frac{(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u})^2}{2}\right\}^{\frac{1}{1-q}}, \tag{20}$$

где

$$\tilde{Q}(q) = \frac{(\alpha_1 T_q)^{1/(1-q)}}{q^{1/(1-q)}} = \int d\boldsymbol{z}\left\{1 - (1-q)\frac{m}{kT_q}\frac{(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u})^2}{2}\right\}^{-\frac{1}{1-q}}. \tag{21}$$

Для нахождения параметров $\tilde{Q}(q)$, T_q и $\boldsymbol{u}$, заменяющих постоянные множители Лагранжа α_j, необходимо вычислить следующие три интеграла в пространстве мгновенных скоростей с нецелой размерностью D:

$$\begin{pmatrix} n_q = const \\ n_q\boldsymbol{u}_q = const \\ n_q e_q = const \end{pmatrix} = \tilde{Q}^q \int \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{c} \\ \tfrac{1}{2}\boldsymbol{c}^2 \end{pmatrix}\left[1 + (q-1)\frac{m}{2kT_q}|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}|^2\right]^{-\frac{q}{q-1}} d^D\boldsymbol{c}. \tag{22}$$

Вводя обозначения:

$$\boldsymbol{U} \equiv \sqrt{m/2k|\theta|}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}), \quad \theta \equiv T_q/(q-1), \quad \operatorname{sgn}\theta = \begin{cases} 1, & \textit{если } \theta > 0, \\ -1, & \textit{если } \theta < 0, \end{cases} \tag{23}$$

перепишем сначала интегралы (22) в виде

$$\begin{pmatrix} n_q \\ n_q \boldsymbol{u}_q \\ n_q e_q \end{pmatrix} = \tilde{Q}^q \left(\frac{2k|\theta|}{m} \right)^{\frac{D}{2}} \int \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{U}\sqrt{2k|\theta|/m} \\ \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2 + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{U}\sqrt{\dfrac{2k|\theta|}{m}} + \dfrac{2k|\theta|}{m}\boldsymbol{U}^2 \end{pmatrix} \left[1 + \boldsymbol{U}^2 \operatorname{sgn}\theta \right]^{\frac{q}{1-q}} d^D \boldsymbol{U} \,. \quad (24)$$

По поводу интегрирования по $\boldsymbol{U}$ в пространстве скоростей с нецелой фрактальной размерностью D отметим следующее: известно, что если область D-мерного интегрирования по $\boldsymbol{U}$ сферически симметрична (что, как правило, можно предположить[53] , то $D-$ мерное интегрирование сводится к обычному интегрированию в соответствии с формулой[54]

$$\int f(|\boldsymbol{U}|) d^D |\boldsymbol{U}| = \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \int_0^\infty f(|\boldsymbol{U}|)\, |\boldsymbol{U}|^{D-1} d|\boldsymbol{U}| = \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \int_0^\infty f(x) x^{\frac{D}{2}-1} dx \,, \quad (25)$$

где $x \equiv \boldsymbol{U}^2$; $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \exp(-t) dt$ − Гамма-функция (x − нецелое положительное число, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$). С учётом этой формулы интегралы (24) принимают вид:

$$\begin{pmatrix} n_q \\ n_q \boldsymbol{u}_q \\ n_q e_q \end{pmatrix} = \frac{\tilde{Q}^q}{\Gamma(\frac{D}{2})} \left(\frac{2\pi k}{m|\theta|} \right)^{\frac{D}{2}} \int \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{u} \\ \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2 + (k|\theta|/m)x \end{pmatrix} x^{\frac{D}{2}-1} (1 + x \operatorname{sgn}\theta)^{\frac{q}{1-q}} dx \,. \quad (26)$$

Здесь принято во внимание, что слагаемые в (24) с нечётными по $\boldsymbol{U}$ подынтегральными функциями исчезают при интегрировании.

Для интегралов (26) необходимо определить пределы интегрирования. Если $\operatorname{sgn}\theta = 1$, то $\theta \equiv T_q/(q-1) > 0$. Следовательно, $x \equiv \boldsymbol{U}^2 \equiv \dfrac{m}{2k}\dfrac{T_q}{q-1}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u})^2$ и подынтегральная функция определена для $0 \le x < \infty$. Аналогично можно показать, что если $\operatorname{sgn}\theta = -1$, то подынтегральная функция определена только для $0 \le x \le 1$. В результате интегрирования (26), получим

$$\begin{pmatrix} n_q \\ n_q\boldsymbol{u}_q \\ n_q e_q \end{pmatrix} = \frac{\tilde{Q}^q}{\Gamma(\frac{D}{2})}\left(\frac{2\pi kT_q}{m}\right)^{\frac{D}{2}} \begin{cases} \dfrac{\mathrm{B}(\frac{q}{q-1}-\frac{D}{2},\frac{D}{2})}{|q-1|^{\frac{D}{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{u} \\ |\boldsymbol{u}|^2/2 + \frac{DkT_q/2m}{1-(q-1)\frac{D}{2}} \end{pmatrix}, & \text{для} \quad \operatorname{sgn}\theta = 1; \\ \dfrac{\mathrm{B}(\frac{1}{1-q},\frac{D}{2})}{|q-1|^{\frac{D}{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{u} \\ \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2 + \frac{DkT_q/2m}{1-(q-1)\frac{D}{2}} \end{pmatrix}, & \text{для} \quad \operatorname{sgn}\theta = -1, \end{cases} \tag{27}$$

где $\mathrm{B}(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,\ (x>0,\ y>0)$ − Бета-функция; $\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$. Первое соотношение (27) позволяет выразить параметр $\tilde{Q}(q)$ через среднюю числовую плотность системы:

$$\tilde{Q}(q) = \left\{ n_q \left(\frac{m}{2\pi kT_q}\right)^{\frac{D}{2}} \Lambda^*(q,D) \right\}^{\frac{1}{q}}, \tag{28}$$

где множитель

$$\Lambda^*(q,D) \equiv \begin{cases} \dfrac{|q-1|^{\frac{D}{2}}\,\Gamma(\frac{q}{q-1})}{\Gamma(\frac{q}{q-1}-\frac{D}{2})}, & \text{для} \quad \operatorname{sgn}\theta = 1; \\ \dfrac{|q-1|^{\frac{D}{2}}\,\Gamma(\frac{q}{q-1}+\frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{q}{q-1})}, & \text{для} \quad \operatorname{sgn}\theta = -1. \end{cases} \tag{29}$$

Второе соотношение (27) связывает параметр $\boldsymbol{u}$ со средней гидродинамической скоростью системы

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_q, \tag{30}$$

а третье соотношение сводится к виду

$$e_q = \tfrac{1}{2}\left|\boldsymbol{u}_q\right|^2 + \varepsilon_q \equiv \tfrac{1}{2}\left|\boldsymbol{u}_q\right|^2 + \frac{DkT_q}{2m}\left[1+(1-q)\tfrac{D}{2}\right]^{-1}, \tag{31}$$

где $\varepsilon_q \equiv DkT_q/2m\left[1+(1-q)\frac{D}{2}\right]$ − удельная внутренняя q-энергия системы.

Поскольку определение температуры в q-статистике достаточно произвольно (оно зависит от довольно произвольного определения температуры с точки зрения множителей Лагранжа), то далее мы будем интерпретировать параметр T_q как обобщённую температуру сложной неаддитивной системы. Естественно, что эта температура, в корне отличается от абсолютной термодинамической температуры T, характеризующей интенсивность хаотизации (беспорядочного движения) частиц системы. Заметим, что если определить формулой

$$T_{eff} \equiv T_q / \left[1-(q-1)\tfrac{D}{2}\right] \tag{32}$$

эффективную температуру q-системы[55], то для величины ε_q имеем соотношение $\varepsilon_q = \dfrac{DkT_{eff}}{2m} > 0$ (совпадающее при $q \to 1$ с определением внутренней энергии в статистике БГ), которое соответствует равному распределению энергии по степеням свободы для всех q. Если мы хотим сохранить обычные представления об обобщённой температуре T_q, то тогда выражение (32) накладывает жёсткое ограничение на величину q: в этом случае $1-D(q-1)/2>0$, и, следовательно, энтропийный индекс удовлетворяет неравенству $q<1+2/D$.

Итак, равновесное степенное распределение (20) функции $p(\boldsymbol{c})$ по скоростям для случая равновесия глобальной неэкстенсивной однородной системы принимает следующий вид обобщённого распределения Максвелла:

$$f^{(0)}(\boldsymbol{c}) = \left\{\Lambda^* n_q \left(\frac{m}{2\pi k T_q}\right)^{D/2}\right\}^{1/q} \left\{1+\operatorname{sgn}\theta \frac{m}{2}\left|\frac{q-1}{kT_q}\right|(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}_q)^2\right\}^{1/1-q}, \tag{33}$$

Заметим, что параметры n_q, T_q и $\boldsymbol{u}_q$ в этом выражении постоянны, т.е. не зависят от пространственной координаты $\boldsymbol{r}$ и времени t.

В супераддитивным случаем (когда $0<q<1$), которым мы далее ограничимся, распределение (33) принимает вид:

$$f^{(0)}(\boldsymbol{c}) = \left\{\Lambda\left(\frac{m}{2\pi k}\right)^{\frac{D}{2}}\left(\frac{n_q}{T_q^{D/2}}\right)\right\}^{\frac{1}{q}} \exp_q\left\{-\frac{m(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}_q)^2}{2kT_q}\right\} \equiv Q^{-1}\exp_q\left\{-\frac{m(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}_q)^2}{2kT_q}\right\}, \tag{33*}$$

где

$$\Lambda(q,D) \equiv \frac{(1-q)^{D/2}\,\Gamma(\frac{D}{2})}{\mathrm{B}(\frac{1}{1-q},\,\frac{D}{2})}, \quad Q = Q(n_q,T_q) \equiv \left\{\Lambda\left(\frac{m}{2\pi k}\right)^{D/2}\left(\frac{n_q}{T_q^{\frac{D}{2}}}\right)\right\}^{-\frac{1}{q}}.$$

4. МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Энтропия Тсаллиса (1) влечёт за собой не только обобщение статистической физики и термодинамики, но и обобщение физической кинетики и гидродинамики. Будем далее предполагать, что для любых неоднородных систем, находящихся в термодинамическом равновесии, обобщённая локальная функция распределения по скоростям имеет обобщённый *локально-максвелловский* вид $f_q^{(0)}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{r},t)$, т.е. такую же функциональную форму (33), как и для случая глобального равновесия сложной системы, но с гидродинамическими параметрами $n_q(\boldsymbol{r},t)$, $T_q(\boldsymbol{r},t)$ и $\boldsymbol{u}_q(\boldsymbol{r},t)$, зависящими от времени и координат:

$$f^{(0)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c},t) = Q^{-1}\exp_q\left\{-\frac{m\left[\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}_q(\boldsymbol{r},t)\right]^2}{2kT_q(\boldsymbol{r},t)}\right\} = \\ = Q^{-1}\left\{1-\frac{m}{2kT_q(\boldsymbol{r},t)}(1-q)\left[\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}_q(\boldsymbol{r},t)\right]^2\right\}^{1/(1-q)}, \tag{34}$$

где $Q(\boldsymbol{r},t)\equiv\left\{\Lambda\left(\dfrac{m}{2\pi k}\right)^{D/2}\left(\dfrac{n_q(\boldsymbol{r},t)}{T_q^{D/2}(\boldsymbol{r},t)}\right)\right\}^{-1/q}$. Возможность введения локально-равновесного распределения (34) связана с тем, что существуют в общем случае два масштаба времени, различного порядка величин (см., например, Ферцигер, Капер, 1976): время τ_r для установления квазиравновесного равновесия в системе, зависящее от её полного объёма $V=\int d\boldsymbol{r}$, и другое, значительно меньшее время релаксации $\tau \ll \tau_{\text{r}}$, которое определяет время установления равновесия в макроскопически малом (но содержащем большое число частиц) объёме системы и не зависит от полного объёма системы. Локально-равновесное состояние устанавливается сначала за время τ в малых объёмах, а затем медленно стремится к распределению (33), с характерным временем τ_{r}. Для того чтобы вновь введённые параметры $n_q(\boldsymbol{r},t)$, $T_q(\boldsymbol{r},t)$ и $\boldsymbol{u}_q(\boldsymbol{r},t)$ действительно имели смысл локальной числовой q-плотности, обобщённой q-температуры и гидродинамической q-скорости, они должны подчиняться следующей системе стандартных условий:

$$\begin{pmatrix}\rho_q(\boldsymbol{r},t)\\ \rho_q\boldsymbol{u}_q(\boldsymbol{r},t)\\ \rho_q e_q(\boldsymbol{r},t)\end{pmatrix} = \int[f(\boldsymbol{c},\boldsymbol{r},t)]^q\begin{pmatrix}m\\ m\boldsymbol{c}\\ \frac{1}{2}m|\boldsymbol{c}|^2\end{pmatrix}d^D\boldsymbol{c} = \int[f^{(0)}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{r},t)]^q\begin{pmatrix}m\\ m\boldsymbol{c}\\ \frac{1}{2}m|\boldsymbol{c}|^2\end{pmatrix}d^D\boldsymbol{c}. \tag{35}$$

Эти условия означают, что макроскопические переменные всегда выражаются только через $f^{(0)}$. Конечно, допускается и иной выбор условий такого рода, но рассмотренный выбор приводит к более привлекательной форме теории[58].

Кинетическое конструирование квазигидродинамической системы уравнений для сложной системы было проведено в работе[38] методом моментов на основе модифицированного уравнения Больцмана с интегралом столкновений (ради простоты) в форме Бхатнагара−Гросса−Крука (БГК)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{c}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}+\boldsymbol{F}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{c}}\right)[f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c},t)]^q=-\frac{1}{\tau}\Big\{[f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c},t)]^q-[f^{(0)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c},t)]^q\Big\}\equiv\Im(f^q), \quad (36)$$

в котором $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$− не зависящая от скорости внешняя сила (на единицу массы); τ − положительный параметр, который интерпретируется здесь как характерное время релаксации функции распределения f к обобщённому локально-максвелловскому распределению $f^{(0)}$, определяемому формулой (34); $\Im(f^q)$ − «интеграл столкновений» в БГК− приближении. Заметим, что параметр сглаживания τ (связанный с максвелловским временем релаксации) совпадает по порядку величины со средним временем свободного пробега материальных частиц в системе.

Умножим кинетическое уравнение (36) соответственно на m, $m\boldsymbol{c}$ и $\frac{1}{2}m|\boldsymbol{c}|^2$ и, используя условия (35), проинтегрируем результаты по $\boldsymbol{c}$, при этом различные члены в получаемых интегралах преобразуем с помощью интегрирования по частям. Воспользовавшись вышеприведёнными определениями тензора напряжения $\boldsymbol{P}_q$, вектора теплового потока $\boldsymbol{J}_q$ и удельной внутренней энергии ε_q, преобразуем входящие в получаемые уравнения интегралы следующим образом:

$$\int m\boldsymbol{c}\boldsymbol{c}[f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c},t)]^q d^D\boldsymbol{c}=\int m\left(\boldsymbol{C}_q+\boldsymbol{u}_q\right)\left(\boldsymbol{C}_q+\boldsymbol{u}_q\right)[f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c},t)]^q d^D\boldsymbol{c}=\boldsymbol{P}_q+\rho_q\boldsymbol{u}_q\boldsymbol{u}_q,$$

$$\int \tfrac{1}{2}m|\boldsymbol{c}|^2\boldsymbol{c}[f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c},t)]^q d^D\boldsymbol{c}=\int\left(\tfrac{1}{2}m\boldsymbol{C}_q^2+m\boldsymbol{C}_q\cdot\boldsymbol{u}_q+\tfrac{1}{2}m\boldsymbol{u}_q^2\right)\left(\boldsymbol{C}_q+\boldsymbol{u}_q\right)[f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c},t)]^q d^D\boldsymbol{c}=$$

$$=\boldsymbol{J}_q+\rho_q\left(\varepsilon_q+\tfrac{1}{2}|\boldsymbol{u}_q|^2\right)\boldsymbol{u}_q+\boldsymbol{P}_q\cdot\boldsymbol{u}_q,$$

где

$$\boldsymbol{P}_q(\boldsymbol{r},t)=m\int(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}_q)(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}_q)[f(\boldsymbol{z})]^q d^D\boldsymbol{c}, \quad (37)$$

$$\boldsymbol{J}_q(\boldsymbol{r},t)\equiv\tfrac{1}{2}m\int\left|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}_q\right|^2(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}_q)[f(\boldsymbol{z})]^q d^D\boldsymbol{c}, \quad (38)$$

$$\rho_q\varepsilon_q=\int\tfrac{1}{2}m\left|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}_q\right|^2[f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c},t)]^q d^D\boldsymbol{c}=\frac{Dn_qkT_q}{2}\left[1+(1-q)D/2\right]^{-1} \quad (39)$$

− тензор давлений, тепловой поток и внутренняя энергия (на единицу объёма) соответственно. В результате получим систему обобщённых уравнений q-гидродинамики, имеющую вид:

$$\frac{\partial\rho_q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}(\rho_q\boldsymbol{u}_q)=0, \quad (40)$$

$$\frac{\partial(\rho_q \boldsymbol{u}_q)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\boldsymbol{P}_q + \rho_q \boldsymbol{u}_q \boldsymbol{u}_q\right) - \rho_q \boldsymbol{F} = 0\,, \tag{41}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_q\left(\varepsilon_q + \tfrac{1}{2}\left|\boldsymbol{u}_q\right|^2\right) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\left\{\boldsymbol{J}_q + \rho_q\left(\varepsilon_q + \tfrac{1}{2}\left|\boldsymbol{u}_q\right|^2\right)\boldsymbol{u}_q + \boldsymbol{P}_q\cdot\boldsymbol{u}_q\right\} - \rho_q \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_q = 0\,. \tag{42}$$

Уравнение (42), используя законы сохранения массы и импульса, можно переписать в виде

$$\frac{\partial(\rho_q \varepsilon_q)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\left\{\boldsymbol{q}_q + \rho_q \varepsilon_q \boldsymbol{u}_q\right\} + \boldsymbol{P}_q : \frac{\partial \boldsymbol{u}_q}{\partial \boldsymbol{r}} = 0\,. \tag{43}$$

Если ввести понятие полной производной $\left(d/dt\right)_q = \partial/\partial t + \boldsymbol{u}_q\cdot\partial/\partial\boldsymbol{r}$, которая означает полную производную по времени в аномальной системе, сопровождающей движение среды, то уравнения (40), (41) и (43) можно записать в следующей форме:

$$\frac{1}{\rho_q}\left(\frac{d\rho_q}{d\,t}\right)_q = -\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{u}_q\right), \tag{44}$$

$$\rho_q\left(\frac{d\boldsymbol{u}_q}{d\,t}\right)_q = \rho_q \boldsymbol{F} - \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{P}_q\right), \tag{45}$$

$$\rho_q\left(\frac{d\varepsilon_q}{d\,t}\right)_q = -\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{J}_q\right) - \boldsymbol{P}_q : \frac{\partial \boldsymbol{u}_q}{\partial \boldsymbol{r}}\,, \tag{46}$$

совпадающей с уравнением непрерывности, уравнением движения и уравнением баланса энергии газа или жидкости в классической гидродинамики. Полученные таким образом гидродинамические q-уравнения в общем случае не является замкнутыми, поскольку неизвестна связь тензора давлений $\boldsymbol{C}_q$ и теплового потока $\boldsymbol{J}_q$ с массовой плотностью, скоростью и температурой. Эта связь может быть найдена с помощью решения модельного кинетического уравнения (36). Для этой цели в работе[38] был использован метод Энскога−Чепмена[56], который позволяет найти нужное решение (например, в приближении первого порядка) для состояний, слабо отличающихся от равновесного.

В случае приближения нулевого порядка, когда $f \equiv f^{(0)}$ − обобщённое локально-максвелловское распределение (33), тензор напряжения $\boldsymbol{P}_q^{(0)} \equiv p_q \boldsymbol{I}$ сводится к шаровому тензору, где $p_q - q$-давление. Действительно, в силу (23) имеем:

$$\boldsymbol{P}_q^{(0)}(\boldsymbol{r},t) \equiv m\int d^D\boldsymbol{c}\,[f^{(0)}]^q(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}_q)(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}_q) = \left(\frac{2k}{m}\left|\frac{T_q}{q-1}\right|\right)^{\frac{D+2}{2}}\int d^D\boldsymbol{U}\,[f^{(0)}]^q\, m\boldsymbol{U}\boldsymbol{U} =$$

$$= \boldsymbol{I}\left(\frac{2k}{m}\left|\frac{T_q}{q-1}\right|\right)^{\frac{D}{2}+1}\int d^D\boldsymbol{U}[f^{(0)}]^q mU_1^2 = \frac{n_q kT_q}{1+(1-q)\frac{D}{2}}\boldsymbol{I} = \frac{2}{D}\rho_q\varepsilon_q\boldsymbol{I} \equiv p_q\boldsymbol{I}. \quad (47)$$

Заметим, что поскольку формула (25) для сферически симметричного случая, при выполнении последнего D-мерного интегрирования в (47), не вполне удобна, необходимо прибегнуть к более ухищрённому приёму. Положим $U_1 = U\cos\varphi$, где $0 \le \varphi \le \pi$ является полярным углом, и примем цилиндрическую симметрию для элемента объёма:

$$d^D\boldsymbol{U} = \left\{2\pi^{(D-1)/2} / \Gamma(\tfrac{D-1}{2})\right\}U^{D-1}dUd\varphi .$$

Тогда интегрирование по U и φ для обоих случаев $\operatorname{sgn}\theta = \pm 1$ приводит к Бета-функциям. Однако окончательный результат (47) не зависит от знака величины $\theta \equiv T_q/(q-1)$. Аналогично можно показать, что для локально-максвелловское распределения $f^{(0)}$ тепловой поток $\boldsymbol{J}_q(\boldsymbol{r},t) = 0$. Таким образом, для равновесного случая законы сохранения (44)-(46), после несложных преобразований, принимают вид:

$$\frac{1}{\rho_q}\left(\frac{d\rho_q}{d\,t}\right)_q = -\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{u}_q\right), \quad \rho_q\left(\frac{d\boldsymbol{u}_q}{d\,t}\right)_q = -\frac{\partial p_q}{\partial\boldsymbol{r}} + \rho_q\boldsymbol{F}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{p_q}{\rho_q^{1+\frac{2}{D}}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{n_q}{T_q^{\frac{D}{2}}}\right) = 0 \quad (48)$$

Эта система уравнений является уравнениями Эйлера в q- гидродинамике (описывающая движения «идеального газа»), вместе с законом адиабатического изменения температуры и обобщённым уравнением состояния «совершенного газа»

$$p_q = n_q kT_{eff} \equiv \frac{n_q kT_q}{1+(1-q)D/2}. \quad (49)$$

На основе системы уравнений (48) в работе[46] был получен модифицированный критерий джинсовой неустойчивости протопланетного газопылевого диска с фрактальной структурой поля скоростей.

5. РАВНОВЕСНАЯ q −ЭНТРОПИЯ И УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА ЭНТРОПИИ ТСАЛЛИСА

Найдём теперь уравнение баланса q-энтропии и получим выражения для кинетического потока и интенсивности источника q-энтропии. Покажем также, что для модифицированной модели БГК (36) справедлив аналог *H*-теоремы Больцмана. По аналогии с классической кинетической теорией газов введём удельную плотность $s_q(\boldsymbol{r},t)$ (на единицу массы) q-энтропии газа следующим образом:

$$\rho_q s_q = \int d^D\boldsymbol{c}\; f^q s_q(f) = -k\int d^D\boldsymbol{c}\; f^q \ln_q f, \quad (S_q = \int \rho_q s_q d\boldsymbol{r}). \quad (50)$$

Дифференцируя (50) по времени, с учётом формулы $\dfrac{d(\ln_q f)}{dx} = f^{-q}\dfrac{df}{dx}$ и уравнения (36), находим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_q s_q) = -k\int d^D\boldsymbol{c}\,\left(\,q f^{q-1}\ln_q f + 1\right)\frac{\partial f}{\partial t} = -k\int d^D\boldsymbol{c}\left(\ln_q f + \frac{f^{1-q}}{q}\right)\frac{\partial f^q}{\partial t} =$$

$$= -\frac{k}{q}\int d^D\boldsymbol{c}\,(\ln_q f + 1)\frac{\partial f^q}{\partial t} = -\frac{k}{q}\int d^D\boldsymbol{c}\,(\ln_q f + 1)\left[-\boldsymbol{c}\cdot\frac{\partial f^q}{\partial \boldsymbol{r}} - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot\frac{\partial f^q}{\partial \boldsymbol{c}} + \Im(f^q)\right] \quad (51)$$

Проинтегрируем теперь (51) по частям. Так как по предположению внешние силы $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ не зависят от скорости частиц, а функция распределения f при $\boldsymbol{c}\to\infty$ достаточно быстро обращается в нуль, то второе слагаемое в правой части уравнения (51) равно нулю; в результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_q s_q) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\left(k\int \boldsymbol{c}\, f^q \ln_q f\, d^D\boldsymbol{c}\right) - \frac{k}{q}\int (\ln_q f + 1)\,\Im(f^q)\, d^D\boldsymbol{c} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\left(k\boldsymbol{u}_q\int d^D\boldsymbol{c}\, f^q \ln_q f\,\right) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\left(k\int d^D\boldsymbol{c}\, f^q(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}_q)\ln_q f\,\right) -$$

$$\frac{k}{q}\int d^D\boldsymbol{c}(\ln_q f + 1)\,\Im(f^q). \quad (52)$$

Это уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_q s_q) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot(\rho_q s_q \boldsymbol{u}_q + \boldsymbol{J}_{s_q}) = \sigma_q\,, \quad (53)$$

играющее центральную роль в неравновесной q-термодинамике, имеет вид дифференциального уравнения баланса величины S_q, записанного в локальной форме (53), или (при использовании полной производной) в субстанционального форме

$$\rho_q ds_q/dt + (\partial/\partial\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{J}_{s_q} = \sigma_q\,.$$

Здесь

$$\boldsymbol{J}_{s_q}(\boldsymbol{r},t) = -k\int\left(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}_q\right) f^q \ln_q f\, d^D\boldsymbol{c} = \int\left(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}_q\right) f^q s_q(f) d^D\boldsymbol{c} \quad (54)$$

− субстанциональная плотность потока q-энтропии;

$$\sigma_q(\boldsymbol{r},t) = -\frac{k}{q}\int\left\{1+\ln_q f\right\}\Im(f^q)\, d^D\boldsymbol{c} \quad (55)$$

− производство q-энтропии, т.е. возникновение q-энтропии за единицу времени в единице объёма системы, обусловленное столкновительными процессами в системе.

Найдём теперь конкретное выражение для величины производства q-энтропии (55). С учётом модифицированного кинетического БГК уравнения (36) это выражение может быть получено следующим образом:

$$\sigma_q = \frac{k}{q\tau}\int (1+\ln_q f)\left\{f^q - [f^{(0)}]^q\right\} d^D\boldsymbol{c} = \frac{k}{(q-1)\tau}\int\left(1-\frac{1}{q f^{q-1}}\right)\left\{f^q - [f^{(0)}]^q\right\} d^D\boldsymbol{c} =$$

$$= \frac{k}{(q-1)\tau}\int\left(f^q - [f^{(0)}]^q - \frac{f^q - [f^{(0)}]^q}{q f^{q-1}}\right) d^D\boldsymbol{c} =$$

$$= \frac{k}{(q-1)\tau}\int\left\{(1-q)\left(f^q \ln_q f - [f^{(0)}]^q \ln_q f^{(0)}\right) + f - f^{(0)} - \frac{f^q - [f^{(0)}]^q}{q f^{q-1}}\right\} d^D\boldsymbol{c} =$$

$$= \frac{(\rho_q s_q)^{(0)} - \rho_q s_q}{\tau} + \frac{k}{(q-1)\tau}\int\left(f - f^{(0)} - \frac{f^q - [f^{(0)}]^q}{q f^{q-1}}\right) d^D\boldsymbol{c} =$$

$$= \frac{(\rho_q s_q)^{(0)} - \rho_q s_q}{\tau} + \frac{k}{\tau}\int f^{(0)}\,\Psi\!\left(\frac{f}{f^{(0)}}\right) d^D\boldsymbol{c}\,. \tag{56}$$

При выводе формулы (56) было использовано соотношение $\ln_q f + 1 = \dfrac{q\left\{q^{-1} f^{1-q} - 1\right\}}{(1-q)}$ и введено обозначение $\Psi(x) \equiv \left[x - 1 - x^{1-q}(x^q - 1)/q\right]/(q-1)$.

Первое слагаемое в формуле (56) положительно, поскольку q-энтропия максимальна для функции распределения $f^{(0)}$ [36,57]. Кроме этого, легко показать, что функция $\Psi(x)$ неотрицательна при положительном аргументе, $x > 0$. Отсюда следует, что интенсивность источника энтропии

$$\sigma_q(\boldsymbol{r},t) \geq 0\,, \tag{57}$$

при $q > 0$, причём равенство имеет место только в случае локально-равновесного состояния системы. Аналогично можно видеть, что в равновесном состоянии поток энтропии $\boldsymbol{J}_{s_q}$ равен нулю, так что он также связан с необратимыми изменениями. Неравенство (57), означающее, что интенсивность источника q-энтропии должна быть положительной или равной нулю, в рамках q-кинетической теории газообразной среды является выражением второго закона термодинамики. Это неравенство известно в классической кинетической теории газов под названием H - теоремы Больцмана.

Если теперь проинтегрировать уравнение (53) по всему объёму V, занимаемому системой, и воспользоваться теоремой Гаусса, то можно получить уравнение баланса q-энтропии для ограниченных систем в интегральной (глобальной) форме

$$\frac{d\,S_q}{dt}=\int\limits_V \rho_q\,\frac{ds_q}{dt}d\boldsymbol{r}=-\int\limits_\Omega(\boldsymbol{J}_{s_q}\cdot\boldsymbol{n})d\Omega+\int\limits_V\sigma_q(\boldsymbol{r},t)d\boldsymbol{r}\,. \qquad (53^*)$$

Здесь $d\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{n}d\Omega$ − векторный элемент поверхности, величина которого равна $d\Omega$, а направление определяется внешней нормалью $\boldsymbol{n}$. Отсюда следует, что (q-H)-теорема в интегральном виде, являющаяся обобщением теоремы Больцмана на пространственно-неоднородные системы[8], выражает тот факт, что энтропия замкнутой системы может только расти (при $q>0$) с течением времени и при $t\to\infty$ приближается к некоторому предельному значению. В этом пределе интегралы в правой части (53^*) должны обращаться в нуль. Это возможно, если $f=f^{(0)}$ (см. (56)) и если, поток энергии $\left(\boldsymbol{J}_{s_q}\right)_\Omega$ на поверхности Ω неэкстенсивной системы равен нулю[v]. Таким образом, (q-H) теорема утверждает, что соотношение

$$d\,H_q\,/\,dt=0 \qquad (58)$$

$(H_q=-(1/k)S_q+const)$ является необходимым условием для равновесного состояния системы. Фактически если максвелловское распределение газа у поверхности ограниченной системы имеет температуру, равную локальной температуре поверхности, то будет выполняться условие[58] (60). Таким образом, поскольку в рассматриваемом случае параметры $n_q(\boldsymbol{r},t)$, $T_q(\boldsymbol{r},t)$ и $\boldsymbol{u}_q(\boldsymbol{r},t)$ зависят от $\boldsymbol{r}$, то, в отличие от того положения, которое имеет место в случае однородного газа, условие (58) неоднозначно определяет функцию распределения в ограниченных системах. В такой системе могут существовать макроскопические градиенты и, следовательно, возможен перенос массы, импульса и энергии. Иными словами, в ограниченных системах это условие является необходимым, но не достаточным для существования полного теплового равновесия.

Наконец, используя распределение $f^{(0)}=Q^{-1}\left\{1-\dfrac{m}{2kT_q}(1-q)(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}_q)^2\right\}^{\frac{1}{1-q}}$ и равенство $\left[f^{(0)}\right]^q=f\left[f^{(0)}\right]^{q-1}=f\,Q^{1-q}\left\{1-\dfrac{m}{2kT_q}(1-q)(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}_q)^2\right\}^{-1}$, получим равновесное значение полной q-энтропии системы

$$S_q^{(0)}=-\frac{k}{(1-q)}\left(1-\int d\boldsymbol{z}[f^{(0)}]^q\right)=-\frac{k}{(1-q)}\left(1-\int\frac{f\,Q^{1-q}}{1-k^{-1}(1-q)m\boldsymbol{C}_q^{\,2}/2T_q}d\boldsymbol{z}\right)=$$

[v] Важно иметь в виду, что только в открытых динамических системах, подверженных воздействию внешнего окружения, возможно образование диссипативных структур в астрофизическом диске при необратимых физических процессах[36,59,60].

$$= k\frac{(Q^{1-q}-1)}{1-q} + \frac{1}{T_q}\int\frac{(m\boldsymbol{C}_q^{\,2}/2)Q^{1-q}f}{1-k^{-1}(1-q)m\boldsymbol{C}_q^{\,2}/2T_q}d^D\boldsymbol{c} = k\ln_q Q + \frac{1}{T_q}E_q^{int}, \tag{59}$$

где $E_q^{int} = \int\rho_q\varepsilon_q(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}$ − полная внутренняя энергия системы. Определим полную свободную энергию системы соотношением $F_q \equiv -kT_q\dfrac{(Q^{1-q}-1)}{1-q}$, которое в случае $q=1$ совпадает с определением свободной энергией аддитивной системы $F=-kT\ln Q$. Тогда равновесное распределение (34) перепишется в эквивалентном виде

$$f^{(0)} = \left\{\frac{1-k^{-1}(1-q)(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}_q)^2 m/2T_q}{1-k^{-1}(1-q)F_q/T_q}\right\}^{1/(1-q)}, \tag{60}$$

а из (59) вытекает классическое выражение $T_qS_q = E_q^{int} - F_q$, из которого легко получить следующие дифференциальные соотношения равновесной q-термодинамики $T_q\partial S_q = \partial E_q$, $\partial(T_q^{-1}F_q) = E_q\partial(T_q^{-1})$.

6. МОДИФИКАЦИЯ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ГАЗООБРАЗНЫХ СИСТЕМ С ДАЛЬНИМ ГРАВИТАЦИОННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Как уже было отмечено, длительная эволюция самогравитирующих газообразных астрофизических систем (например, эволюция газообразного аккреционного диска) определяется главным образом относительно быстрыми процессами столкновительной релаксации частиц. Однако, более медленные динамические процессы, связанные с гравитационным межчастичным взаимодействием, также должны быть включены как q-столкновения в q-кинетическую теорию. В этом случае полная масса частиц, полный импульс и полная кинетическая энергия сохраняются на длительной (астрономической) шкале времени, т.е. ведут себя как движущиеся константы. В этом разделе мы покажем, как потенциальная энергия гравитационного взаимодействия частиц в ограниченной системе может быть строго введена в степенное распределение частиц в фазовом пространстве на основе q-кинетического подхода.

Итак, предположим, что функция распределения $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})$ удовлетворяет стационарному модифицированному уравнению Больцмана (36), т. е. $\partial f^q/\partial t = 0$, и обладает тем свойством, что функционал S_q стационарен. Тогда функция q-распределения $f \equiv f^{(0)}$ должна иметь вид (34) и, кроме того, удовлетворять уравнению

$$\boldsymbol{c}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\left[f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})\right]^q + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{c}}\left[f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})\right]^q = 0,$$

или, поскольку $q(1-q)^{-1}f^{2q-1}df^{1-q}/dx = df^q/dx$, его эквивалентной форме

$$\boldsymbol{c}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left[f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})\right]^{1-q}+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{c}}\left[f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})\right]^{1-q}=0\,. \tag{61}$$

Это уравнение накладывает чётко выраженные ограничения характер внешней силы $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$, а также на возможную зависимость параметров n_q, $\boldsymbol{u}_q$ и T_q от координат $\boldsymbol{r}$, тем самым фактически определяет эти параметры единственным образом.

Из выражения (60) имеем $f^{1-q}=\left[Q(n_q,T_q)\right]^{q-1}\left\{1-\frac{m}{2kT_q}(1-q)(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}_q)^2\right\}$ и, следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}f^{1-q}&=Q^{q-1}\frac{m}{kT_q}(1-q)\left\{\frac{kT_q}{qm}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\ln\left(\frac{n_q}{T_q^{D/2}}\right)+\frac{1-q}{q}\frac{C_q^{\,2}}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\ln\left(\frac{n_q}{T_q^{D/2}}\right)\right\}+\\&-Q^{q-1}\frac{m}{kT_q}(1-q)\left\{\boldsymbol{C}_q\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}_q}{\partial \boldsymbol{r}}+\frac{C_q^{\,2}}{2}\frac{\partial \ln T_q}{\partial \boldsymbol{r}}\right\},\end{aligned} \tag{62}$$

а также

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{c}}f^{1-q}=-Q^{q-1}\frac{m}{kT_q}(1-q)\boldsymbol{C}_q\,. \tag{63}$$

Подставляя эти выражения в (61) и записывая его в порядке возрастания степеней компонент скорости $\boldsymbol{C}_q$, получим

$$\begin{aligned}&\frac{kT_q}{qm}\left[\boldsymbol{u}_q\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\ln\left(\frac{n_q}{T_q^{D/2}}\right)\right]+\boldsymbol{C}_q\cdot\left[\frac{kT_q}{qm}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\ln\left(\frac{n_q}{T_q^{D/2}}\right)+\left(\boldsymbol{u}_q\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}_q}{\partial \boldsymbol{r}}\right)-\boldsymbol{F}_q\right]+\\&\left[\boldsymbol{C}_q\boldsymbol{C}_q:\frac{\partial \boldsymbol{u}_q}{\partial \boldsymbol{r}}+\frac{C_q^{\,2}}{2}\boldsymbol{u}_q\cdot\left\{\frac{1-q}{q}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\ln\left(\frac{n_q}{T_q^{D/2}}\right)+\frac{\partial \ln T_q}{\partial \boldsymbol{r}}\right\}\right]+\\&+\frac{C_q^{\,2}}{2}\boldsymbol{C}_q\cdot\left[\frac{1-q}{q}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\ln\left(\frac{n_q}{T_q^{D/2}}\right)+\frac{\partial \ln T_q}{\partial \boldsymbol{r}}\right]=0.\end{aligned} \tag{64}$$

Так как это равенство выполняется тождественно, то все выражения в квадратных скобках должны обращаться в нуль. Следовательно, для всех значений $\boldsymbol{C}_q$ имеем

$$\frac{1-q}{q}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\ln\left(\frac{n_q}{T_q^{D/2}}\right)+\frac{\partial \ln T_q}{\partial \boldsymbol{r}}=0\,. \tag{65}$$

Поскольку при $f \equiv f^{(0)}$ первое слагаемое в (65) в рассматриваемом стационарном случае равно нулю (см. (48)), то отсюда следует, что $\partial T_q / \partial \boldsymbol{r} = 0$, т. е. что q-температура неэкстенсивной среды не должна меняться от точки к точке («изотермическая» среда) и движение частиц происходит под действием гравитационных сил. Если учесть теперь обращение в нуль третьего члена в левой части уравнения (64), то, при использовании (65), получим

$$\boldsymbol{C}_q \boldsymbol{C}_q : \frac{\partial \boldsymbol{u}_q}{\partial \boldsymbol{r}} = 0 . \qquad (66)$$

Поскольку тензор $\partial \boldsymbol{u}_q / \partial \boldsymbol{r}$ можно единственным образом представить в виде суммы симметрического и антисимметрического тензоров, то первый из них должен обратиться в нуль в силу условия (66) (так как тензор $\boldsymbol{C}_q \boldsymbol{C}_q$ − симметрический). Однако, второй тензор может и не быть равным нулю. Наиболее общий вид вектора скорости $\boldsymbol{u}_q$, совместимый с приведёнными соображениями, следующий: $\boldsymbol{u}_q = \boldsymbol{u}'_q + \Omega \times \boldsymbol{r}$, где $\boldsymbol{u}'_q$ и Ω −произвольные постоянные векторы. Это означает, что частицы рассматриваемой системы, подобно твёрдому телу, могут совершать винтовое движение.

Выберем теперь декартову систему координат с осью Oz вдоль оси вращения диска. Тогда $\boldsymbol{u}_q$ будет иметь компоненты $u_{qx} = u'_{qx} - \Omega y$, $u_{qy} = u'_{qy} - \Omega x$ и $u_{qz} = u'_{qz}$. Поскольку в этом случае вектор $\left(\boldsymbol{u}_q \cdot \partial \boldsymbol{u}_q / \partial \boldsymbol{r}\right)$ имеет компоненты $\Omega u'_{qy} - \Omega^2 x$, $\Omega u'_{qx} - \Omega^2 y$ и 0, то он может быть записан с помощью центробежного потенциала $\Phi_0(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{2}(\Omega \times \boldsymbol{r})^2 = -\frac{1}{2}\Omega^2 (x^2 + y^2)$ в виде

$$\left(\boldsymbol{u}_q \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}_q}{\partial \boldsymbol{r}} \right) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \Phi_0(\boldsymbol{r}) + \Omega \times \boldsymbol{u}'_q . \qquad (67)$$

Полагая теперь равным нулю второй член в левой части уравнения (64), приходим к равенству

$$\boldsymbol{C}_q \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \left(\Phi_0 + \frac{kT_q}{m} \ln \left(\frac{n_q}{T_q^{D/2}} \right)^{\frac{1}{q}} \right) + \Omega \times \boldsymbol{u}'_q - \boldsymbol{F}_q \right] \qquad (68)$$

которое должно выполняться для всех значений $\boldsymbol{C}_q$. Поскольку $\Omega \times \boldsymbol{u}'_q$ является постоянным вектором, то это возможно лишь при условии

$$\boldsymbol{F}_q = \Omega \times \boldsymbol{u}'_q + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \left(\Phi_0 + \frac{kT_q}{m} \ln \left(\frac{n_q}{T_q^{D/2}} \right)^{\frac{1}{q}} \right). \qquad (69)$$

В этом соотношении первое слагаемое является той силой, которая необходима, чтобы уравновесить силу Кориолиса, действующую на всякое тело, совершающее одновременно вращательное и поступательное движение[61]. Таким образом, в случае когда $\Omega \times \boldsymbol{u}'_q = 0$, сила $\boldsymbol{F}_q(\boldsymbol{r}) = -\partial\Phi_q(\boldsymbol{r}) / \partial\boldsymbol{r}$ должна быть равна взятому с обратным знаком градиенту некоторого потенциала $\Phi_q(\boldsymbol{r})$, т.е. быть потенциальной. Отсюда вытекает следующее распределении числовой q -плотности в присутствии внешних сил

$$n_q(\boldsymbol{r}) = n_{q0} \exp\left\{ -q \frac{m\left(\Phi_q(\boldsymbol{r}) - \frac{1}{2}(\Omega \times \boldsymbol{r})^2 \right)}{kT_q} \right\}. \tag{70}$$

Известно, что проблема изотермической атмосферы, находящейся под постоянным влиянием силы тяжести была описана в рамках классической кинетической теории на основе распределения Максвелла-Больцмана в виде так называемой барометрической формулы. Из (70) следует, что если, например, среда покоится ($\Phi_0 = 0$) и на её частицы действует сила тяжести $F_{qz} = -g$, отнесённая к единичной массе (тогда $\Phi(z) = gz$ − соответствующий гравитационный потенциал; здесь g − ускорение в гравитационном поле и z − высота), то соотношение (70) является обобщением классической барометрической формулы (а в случае $q = 1$ полностью совпадает с ней) в рамках неэкстенсивной статистики. С другой стороны, в отсутствие внешних сил соотношение (70) определяет неоднородность в распределении числовой q-плотности, обусловленную наличием центробежной силы с потенциалом $\Phi_0(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{2}(\Omega \times \boldsymbol{r})^2$. Для самогравитирующих систем гравитационный потенциал $\Phi_q(\boldsymbol{r}) \equiv -\mathrm{G}\int \frac{p^q d\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}$ удовлетворяет уравнению Пуассона $\partial^2\Phi_q / \partial\boldsymbol{r}^2 = 4\pi G\int [f^{(0)}]^q d^D\boldsymbol{c} = 4\pi G n_q$, где G − гравитационная постоянная.

Наконец, при использовании первого член из левой части уравнения (64) и тождества $\boldsymbol{u}_q \cdot \partial\Phi_0 / \partial\boldsymbol{r}$, получим условие

$$\boldsymbol{u}_q \cdot \partial\Phi_q / \partial\boldsymbol{r} = 0, \tag{71}$$

означающее, что движение частиц среды должно происходить всюду вдоль эквипотенциальных поверхностей $\Phi_q(\boldsymbol{r}) = const$. Поэтому, если $\Omega = 0$, а $\boldsymbol{u}'_q \neq 0$, потенциал Φ_q не должен зависеть от z; если $\boldsymbol{u}'_q = 0$, а $\Omega \neq 0$, потенциал $\Phi_q(\boldsymbol{r})$ должен быть инвариантным относительно вращений вокруг оси Oz; если $\boldsymbol{u}'_q \neq 0$ и $\Omega \neq 0$, потенциал $\Phi_q(\boldsymbol{r})$ должен быть постоянным вдоль спиральной кривой с осью Oz. Очевидно, если форма поверхности Ω рассматриваемой космической системы является гладкой и не изменяется со временем, то возможные движения частиц системы должны зависеть от этой формы.

Таким образом, если система (астрофизический объект) ограниченна неподвижной поверхностью Ω, то состояние полного теплового равновесия в ней возможно лишь при выполнении двух следующих условий: 1) частицы должны находиться в состоянии покоя или, если поверхность Ω обладает симметрией относительно некоторой оси, частицы среды могут вращаться относительно этой оси; 2) внешняя сила $\boldsymbol{F}_q(\boldsymbol{r})$, действующая на частицы, должна быть потенциальной. Когда система находится в тепловом равновесии, температура во всех точках одинакова и равна температуре поверхности[58] Ω. В квазиравновесной газообразной среде функция q-распределения $f^{(0)}$ имеет форму

$$f^{(0)}=\left\{n_{q0}\Lambda\left(\frac{m}{2\pi kT_q}\right)^{\frac{D}{2}}\right\}^{\frac{1}{q}}\exp\left\{-\frac{m\left(\Phi_q-\frac{1}{2}(\Omega\times\boldsymbol{r})^2\right)}{kT_q}\right\}\left\{1-(1-q)\frac{m(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}_q)^2}{2kT_q}\right\}^{\frac{1}{1-q}}\equiv$$
$$\equiv\left\{n_{q0}\frac{(1-q)^{\frac{D}{2}}\Gamma(\frac{D}{2})}{\mathrm{B}(\frac{1}{1-q},\,\frac{D}{2})}\left(\frac{m}{2\pi kT_q}\right)^{\frac{D}{2}}\right\}^{\frac{1}{q}}\exp\left\{-\frac{m\left(\Phi_q+\Phi_0\right)}{kT_q}\right\}\exp_q\left\{-\frac{m(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}_q)^2}{2kT_q}\right\}. \qquad (72)$$

По поводу этой формулы следует заметить следующее. Проблеме подключения ньютоновского потенциала самогравитации к степенному q-распределению частиц в астрофизической литературе было уделено большое внимание[22,23, 62-68]. Конечной целью этих работ являлась попытка приспособления степенного q-распределения (60) к ограниченным изотермическим системам, находящимся под длительным воздействием сил гравитации, или, в более общем случае, определение степени изменчивости движения динамической континуальной среды (описываемой в рамках неэкстенсивной кинетической теории) под влиянием длительного дальнодействующего силового воздействия. При этом в ряде работ[22,65,66-69] делается малообоснованная попытка ввести потенциалы $(\Phi_q+\Phi_0)$ для газообразных сред под знак деформированной экспоненты $\exp_q$. Не вдаваясь в критическую оценку этих работ, отмечу лишь, что полученные в них результаты нуждаются, с моей точки зрения, в основательном переосмыслении.

7.ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ

Рассмотрим неэкстенсивную систему, описываемую равновесным распределением (60) Найдём критерий устойчивости системы при изменении термодинамического параметра $\beta\equiv 1/T_q$. Легко видеть, что производная по β от микроскопической энтропии $s_q(f)$ равняется

$$\frac{\partial s_q(f)}{\partial\beta}=\frac{1}{1-k^{-1}(1-q)\beta F_q}\left\{\tfrac{1}{2}m(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}_q)^2-E_q^{int}f^{1-q}\right\}.$$

Поскольку $Q^{1-q} = 1 - k^{-1}T_q^{-1}(1-q)F_q$ (см. (60)), то для производной $\partial s_q(f)/\partial\beta$ равенство

$$\boldsymbol{E}_q\left[\frac{\partial s_q(f)}{\partial\beta}\right] = Q^{q-1}\int(\tfrac{1}{2}m(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}_q)^2 - E_q^{int}f^{1-q})f^q d\boldsymbol{z} = 0$$

выполняется тождественно. Для среднего значения второй производной микроскопической энтропии имеем

$$\int \frac{\partial^2 s_q(f)}{\partial\beta^2} f^q d\boldsymbol{z} =$$
$$= \int\left(\frac{\partial Q^{q-1}}{\partial\beta}\Delta_q[\tfrac{1}{2}m(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}_q)^2] - Q^{q-1}\frac{\partial E_q}{\partial\beta}f^{1-q} - Q^{q-1}E_q\frac{\partial f^{1-q}}{\partial\beta}\right)f^q d\boldsymbol{z} = -Q^{q-1}\frac{\partial E_q}{\partial\beta} \tag{73}$$

Используя теперь определение теплоёмкости системы $C_q = -\beta^2(\partial E_q/\partial\beta)$ и второй производной для энтропии $\partial^2 S_q/\partial E_q^2 = -1/T_q^2 C_q = -\beta^2/C_q$, перепишем (73) в следующем виде

$$\boldsymbol{E}_q\left[\frac{\partial^2 s_q(f)}{\partial\beta^2}\right] = Q^{q-1}\beta^{-2}C_q = -Q^{q-1}\frac{\partial^2 S_q(f)}{\partial E_q^2}. \tag{74}$$

Согласно статистическому критерию устойчивости неэкстенсивной системы (16), из неравенства (74) следуют условия (при $0 < q < 1$)

$$C_q > 0, \quad \frac{\partial^2 S_q(f)}{\partial E_q^2} < 0, \tag{75}$$

откуда

$$C_q = \frac{\partial}{\partial T_q}\int d\boldsymbol{z}\,\rho_q\varepsilon_q = \int d\boldsymbol{z}\frac{\partial}{\partial T_q}\left(\frac{DkT_q\rho_q}{2m\left[1+(1-q)\frac{D}{2}\right]}\right) = \frac{Dk}{2m\left[1+(1-q)\frac{D}{2}\right]}\int d\boldsymbol{z}\,\rho_q > 0,$$

что накладывает следующее ограничение на верхнюю границу фрактальной размерность пространства скоростей $0 < D < 2/1-q$.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена методика введения ньютоновского потенциала самогравитации и центробежного потенциала в квазиравновесное степенное q-распределение, полученное в рамках неэкстенсивной кинетики на основе модифицированного уравнения Больцмана, а также приведён вывод критерия термической устойчивости аномальной системы. К сожалению, q-кинетическая теория самогравитирующих систем всё-ещё остаётся недооценённой и по мнению автора необходимы дополнительные исследования (в том числе численное моделирование), чтобы в полной мере задействовать в теории q-столкновения, связанные с медленным гравитационным или кулоновским межчастичным взаимодействием. Эти исследования представляют безусловный интерес, поскольку позволяют более аккуратно определить влияние дальнодействующих сил на эволюцию газообразной космической системы, в частности, на эволюцию протопланетных аккреционных дисков.

Основываясь на q-распределении (72) в последующих публикациях автора будет проведено дополнительное рассмотрение проблемы, связанное со структурой и стабильностью газоподобных астрофизических дисков в рамках статистики Тсаллиса с ненормированным распределением p^q. В качестве иллюстрации данного подхода, полученное степенное распределение предполагается использовать при исследовании задачи о гравитационной устойчивости самогравитирующего газообразного диска.

«Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 15-01-03490 а».

REFERENCES

[1] C. Tsallis, "Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs-Statistics", *J. Stat. Phys.* **52**(1-2), 479-487 (1988).

[2] C. Tsallis, "Nonextensive Statistic: Theoretical, Experimental and Computational Evidences and Connections", *Brazilian J. Phys.* **29**(1), 1-35 (1999).

[3] C. Tsallis, *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics−Approaching a Complex Word*. Springer. New York. (2009).

[4] E.M.F. Curado, C. Tsallis, "Generalized statistical mechanics: Connection with thermodynamics", *J. Phys. A: Math. Gen.* **24**, L69-L72 (1991).

[5] C. Tsallis, R.S. Mendes, A.R. Plastino, "The role of constraints within generalized Nonextensive statistics", *Physica A.* **261**, 534-554 (1998).

[6] P A.R. Plastino, A. Plastino, C. Tsallis. "Entropy and the Vlasov-Poisson Equations", *Brazilian J. Phys.* **29** (1), 79-89 (1999).

[7] S. Abe, "A note on the q-deformation-theoretical aspect of the generalized entropies in nonextensive physics", *Phys. Lett A.* **224**, 326-330 (1997).

[8] J.A. Lima, R. Sibva, A.R. Plastino, "On Tsallis' nonextensive thermostatistics and H-theorem", *Phys. Rev. Lett.* **86,** 2938-2941 (2001).

[9] *Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applications,* Ed.by S. Abe and Y. Okamoto. Series Lecture Notes in Physics. Berlin, New York, Heidelberg: Springer-Verlag (2001).

[10] M. Gell-Mann, C. Tsallis, *Nonextensive Entropy- Interdisciplinary Applications.* Oxford University Press. New York. (2004).

[11] A.I. Olemskoi, *Sinergetika slozhnykh sistem: Fenomenologiia I statisticheskaia teoriia*. M.: KRASAND, (2009).

[12] A. Taruya, M. Sakagami, "Gravothermal catastrophe and Tsallis' generalized entropy of self-gravitating systems", *Physica A.* **307**(1-2), 185-206 (2002).

[13] A. Taruya, M. Sakagami, "Gravothermal catastrophe and Tsallis' generalized entropy of self-gravitating systems II. Thermodynamic properties of stellar polytrope", *Physica A.* **318**(3-4), 387-413 (2003).

[14] A. Taruya, M. Sakagami, “Gravothermal catastrophe and Tsallis' generalized entropy of self-gravitating systems III. Quasi-equilibrium structure using normalized q-values”, *Physica A.* **322**, 285-312 (2003).
[15] A. Taruya, M. Sakagami, “Antonov Problem and Quasi-Equilibrium States in N-body System”, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **364**, 990-1010 (2005).
[16] M. Sakagami, A. Taruya, “Self-gravitating stellar systems and non-extensive hermostatistics”, *Continuum Mechanics and Thermodynamics.* **16**(3), 279-292 (2004).
[17] C. Tsallis, *Nonextensive Statistical Mechanics and Thermodynamics: Historical Backgroud and Present Status*, Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applications, ed. S. Abe and Y.Okamoto, Series Lecture Notes in Physics, Berlin, New York, Heidelberg: Springer-Verlag. (2001).
[18] P.-H. Chavanis, “Gravitational instability of slowly rotating isothermal spheres”, *Astronomy and Astrophysics.* **396,** 315-329 (2002).
[19] P.-H. Chavanis, “Gravitational instability of isothermal and polytropic spheres”, *Astronomy and Astrophysics.* **401**, 15-42 (2003).
[20] P.-H. Chavanis, C. Sire, “Anomalous diffusion and collapse of self-gravitating Langevin particles in *D* dimensions”, *Phys. Rev.* **69**(1)**,** id. 016116 (2004).
[21] P.-H. Chavanis, C. Sire, “On the interpretations of Tsallis functional in connection with Vlasov Poisson and related systems: Dynamics vs thermodynamics”, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* **356**(2-4), 419-446 (2005).
[22] J.A.S. Lima, R. Silva, J. Santos, “Jeans' gravitational instability and nonextensive kinetic theory”, *Astronomy and Astrophysics*. **396**, 309-313 (2002).
[23] J.L. Du, “What does the nonextensive parameter stand for in self-gravitating systems?”, *Astrophys. Space Sci.* **305**, 247-251 (2006).
[24] A.S. Eddington, *The internal constitution of stars.* Cambridge University Press. (1926).
[25] V.A. Antonov, “Most probable phase distribution in spherical star systems and conditions for its existence*”, IAU Symposium 113, Dynamics of Globular Clusters, ed. J. Goodman and P. Hut.* Dordrecht: Reidel. (1985).
[26] D. Lynden-Bell, R. Wood, “The gravo-thermal catastrophe in isothermal spheres and the onset of red-giant structure for stellar systems”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. **138**, 495-525 (1968).
[27] R. Elson, P. Hut and S. Inagaki, “Dynamical evolution of globular clusters”, *Ann. Rev. Astron. Astrophys*. **25**, 565-601 (1987).
[28] T. Padmanabhan, “Antonov instability and gravothermal catastrophe – Revisited”, *Astrophys. J. Suppl*. **71**, 651-664 (1989).
[29] T. Padmanabhan, “Statistical mechanics of gravitating systems”, *Phys.Rep*. **188**, 285-362. (1990).
[30] A. R. Plastino, A. Plastino, “Stellar polytropes and Tsallis' entropy*”, Physics Letters A*. **174**(5-6), 384-386 (1993).
[31] R. Emden, *Gaskugeln: Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische und meteorologische Probleme.* Teubner Verlag, Leipzig. (1907).
[32] S. Chandrasekhar, *An introduction to the theory of stellar structure*. New York: Dover. (1967).
[33] E.M.F. Curado, “General Aspects of the Thermodynamical Formalism”, *Brazilian J. Phys*. **29**(1), 36-45 (1999).
[34] S. Martinez, F. Nicolas, F. Pennini, A. Plastino, “Tsallis’entropy maximization procedure revisited”, *Physica A.* **286**, 489-502 (2000).
[35] Z. Daroczy, “Generalized information function”, *Inform. Control*. **16**, 36-51 (1970).
[36] R.G. Zaripov, *Samoorganizatsiia i neobratimost v neekstensivniekh sistemakh*. Kazan : Fen. (2002).

[37] R.G. Zaripov, "O termodinamicheskom ravnovesii neekstensivniekh system", Zhurnal tekhnicheskoi fiziki. **76**(11), 1-5 (2006).
[38] A.V. Kolesnichenko, B.N. Chetverushkin, "Kinetic derivation of a quasi-hydrodinamic system of equations on the base of nonextensive statistics", *RJNAMM* (*Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*). **28**(6), 547-576 (2013).
[39] *Nonextensive statistical mechanics and thermodynamics*: *bibliography*// http:// tsallis.cat. cbpf.br/ biblio.htm.
[40] B.B. Mandelbrot, *Fractals: form, change and dimension*. San Francisco: Freeman. (1977).
[41] J. Havrda, F. Charvat, "Quantification method of classification processes", *Kybernetika*. **3**, 30–35 (1967).
[42] R.S. Johal, R. Rai, "Nonextensive thermodynamic formalism for chaotic dynamical systems", *Physica A*. **282**, 525–535 (2000).
[43] Q.A. Wang, L. Nivanen, A. Le. M´ehaut´e, "Fractal geometry, information growth and nonextensive thermodynamics", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. **340**(1), 117-125 (2004).
[44] O. Sotolongo-Costa, L. M. Gaggero-Sager, M. E. Mora-Ramos, "A nonextensive statistical model of multiple particle breakage", *arXiv: cond-mat.stat-mech/1412.1122v1*. (2014).
[45] A.V. Kolesnichenko, "On construction of the entropy transport model based on the formalism of nonextensive statistics", *Mathematical Models and Computer Simulations*. **6**(6), 587-597 (2014).
[46] A.V. Kolesnichenko, M.Ya. Marov, "Modification of the Jeans instability criterion for fractal-structure astrophysical objects in the framework of nonextensive statistics", *Solar System Research*. **48**(5), 354-365 (2014).
[47] Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. "Modification of the Jeans and Toomre Instability Criteria for Astrophysical Fractal Objects Within Nonextensive Statistics", *Solar System Research*. **50**(4), 251-261 (2016).
[48] A.V. Kolesnichenko, "Modifikatsiia v ramkakh neekstensivnoi statistiki Tsallisa kriteriev gravitatsionnoi neustoichivosti astrofizichesrikh vrashchaiushchikhsia diskov s fraktal'noi struktyroi", Preprinti IPM im. M. V. Keldysha. No 55. (2014).
[49] A.V. Kolesnichenko, "Modifikatsiia v ramkakh statistiki Tsallisa kriteriev gravitatsionnoi neustoichivosti astrofizichesrikh diskov s fraktal'noi struktyroi fazovogo prostranstva", *Mathematica Montisnigri*. **32**, 93-118 (2015).
[50] S. Abe, "Heat and generalized Clausius entropy of nonextensive systems", *Eprint arXiv:cond-mat/0012115*. (2000).
[51] S. Abe, S. Martínez, F. Pennini, A. Plastino, "Nonextensive thermodynamic relations", *Phys. Lett. A*. **281**(2-3), 126-130 (2001).
[52] D.P. Zubarev, *Neravnovesnaia statisticheskaia mekhanika*. M.: Nauka, (1971).
[53] V.E. Tarasov, *Modeli teoreticheskoi fiziki s integro- diferentsirovaniem drobnogo poriadka*. M.: Izhevsk: Izhevskii institute komp'iuternikh issledovanii. (2011).
[54] Dzh. Kollinz, *Perenornirovka*. M.: Mir. (1988).
[55] A.R. Plastino, A. Plastino, C. Tsallis, "The classical N-body problem within a generalized statistical mechanics", *J. Phys. A: Math. Gen.* **27**, 5707-5714 (1994).
[56] B.M. Boghosian, "Navier-Storts Equations for Generalized Thermostatistics", *Bras. J. Phys*. **29**(1), 91-107 (1999).
[57] M. Kohler, "Behandlung von Nichtgleichgewichtsvorgangen mit hilfe rines Extremal prinzipes", *Zs. Phys*. 1948. **124**, 772-789 (1948).

[58] Dzh. Fertsiger, G. Kaper, *Matematicheskaia teoriia protsessov perenosa v gazakh*. M.: Mir. (1976).
[59] A.V. Kolesnichenko, "Informatsionno-termodinamicheskaia kontseptsiia formirovaniia protsessov samoorganizatsii v otkritikh sistemakh pod vozdeistviem protsessov samoorganizatsii v otkritikh sistemakh", Mathematica Montisnigri. 35, 80-106 (2016).
[60] Iu. L. Klimantovich, *Statisticheskaia teoriia otkritikh system*, T. 1. M.: TOO «Ianus», (1995).
[61] H. Goldstein, *Classical mechanics*. Cambridge, MA: Addison-Wesley. (1950).
[62] J.L. Du, "Nonextensivity in nonequilibrium plasma systems with Coulombian long-range interactions", *Phys. Lett.A.* **329**, 262-267 (2004).
[63] J.L. Du, "The nonextensive parameter and Tsallis distribution for self-gravitating sysems", *Europhys. Lett*. **67**, 893-899 (2004).
[64] J.L. Du, "The hydrostatic equilibrium and Tsallis' equilibrium for self-gravitating systems", *Central European J. Phys*. **3**, 376-381 (2005).
[65] J.L. Du, "Nonextensive and the power- law distributions for the systems with self-gravitating long-range interactions", *Astrophys. Pace Sci.* **312,** 47-55 (2007).
[66] J.L. Du, "A new form of Tsallis distribution based on the probabilistically independent postulate", *Chin. Phys. B*. **19** (7), id. 070501 (2010).
[67] J.A.S. Lima, J. R. Bezerra, R. Silva, "Reply to Comment on Conservative Force Fields in Nonextensive Kinetic Theory", eprint arXiv:cond-mat/0306258 (2003).
[68] J.A.S. Lima, J.R. Bezerra, R. Silva, "Conservative Force Fields in Nonextensive Kinetic Theory", *Physica.* A **316**, 289-296 (2003).
[69] J.L. Du, "The nonextensive parameter for the astrophysical system in an external rotating field", eprint arXiv:1508.02290. (2015).

The results were presented at the 15-th International seminar "Mathematical models &modeling in laser-plasma processes & advanced science technologies" (September 26 -October 1, 2016, Petrovac, Montenegro).

Received July, 28 2016.