

ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА В РАСШИРЕННОЙ НЕОБРАТИМОЙ ТЕРМОДИНАМИКЕ

А.Г. КАПТИЛЬНЫЙ¹, А.А. КАРАБУТОВ²

¹Объединенный институт высоких температур РАН, Москва, Россия
e-mail: Kalexandr48@gmail.com

²Международный учебно-научный лазерный центр МГУ имени М.В. Ломоносова,
Москва, Россия
e-mail: aak@ilc.edu.ru

Ключевые слова: модели процессов переноса, локально-неравновесная термодинамика, нелокальность, гиперболические уравнения переноса.

Аннотация. В рамках Расширенной Необратимой Термодинамики (РНТ) представлен краткий обзор моделей переноса не опирающихся на принцип локальности и гипотезу сплошной среды, а учитывающей временную и пространственную нелокальность процессов, которые описываются в терминах уравнений в частных производных гиперболического типа.

TRANSPORT PROCESSES IN EXTENDED NON-EQUILIBRIUM THERMODYNAMICS

A.G. KAPTILNIY¹, A.A. KARABUTOV²

¹Joint Institute for High Temperatures of RAS, Moscow, Russia
e-mail: Kalexandr48@gmail.com

²International Laser Center of Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
e-mail: aak@ilc.edu.ru

Summary. Here is a short review of trends of Extended Non-equilibrium Thermodynamics (ENT). It is one of the most elaborated thermodynamic theories and is not based on the principle of locality and hypothesis of continuous medium. ENT considers temporal and space nonlocality of transport processes. These processes are described by partial differential parabolic and hyperbolic equations.

2010 Mathematics Subject Classification: 74A15, 80A10, 80A17, 80A20.

Key words and Phrases: Model of Transport Processes, Local Non-equilibrium Thermodynamics, Non-locality.

«Теория производит тем большее впечатление, чем проще ее предпосылки, чем разнообразнее предметы, которые она связывает, и чем шире область ее применения. Отсюда глубокое впечатление, которое произвела на меня классическая термодинамика. Это единственная теория общего содержания, относительно которой я убежден, что в рамках применимости ее основных понятий она никогда не будет опровергнута».

Эйнштейн

1 ВВЕДЕНИЕ

Широкое распространение процессов переноса энергии и вещества в природе и технике определяет принципиальное значение построения теории процессов и создания эффективных методов решения задач переноса.

Методы математического моделирования, от равновесных в целом систем к локально-равновесным и далее к локально-неравновесным, являются одним из основных инструментов научных исследований распространенных природных явлений. Проблемы, связанные с моделированием и расчетами требуют для своей реализации соответствующих математических моделей. Адекватное математическое описание явлений переноса опирается на различные физические представления и подходы, среди которых: термодинамический, кинетический, молекулярно-динамический и др. Примером работ, в которых используются эти подходы могут служить¹⁻³

Данная работа посвящена краткому обзору современных моделей переноса в локально-неравновесных системах, предложенных в рамках расширенной неравновесной термодинамики.

2 ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕРМОДИНАМИКИ

2.1 Классическая равновесная термодинамика (термостатика)

Термодинамика это феноменологическая наука, описывающая макроскопическими параметрами такими как: T – температура, P – давление, C – концентрация и т.п. процессы, происходящие в системах, состоящих из большого числа частиц.

Аксиоматика термодинамики основана (построена) на нескольких постулатах – началах, границы применимости термодинамики определяются статистической физикой.

Первое начало термодинамики – универсальный закон сохранения энергии: представлен в простейшем виде – теплота, полученная системой, идёт на увеличение внутренней энергии системы и на совершение этой системой работы:

$$\delta Q = \delta A + dU. \quad (1)$$

Здесь dU – полный дифференциал внутренней энергии системы, δQ – элементарное количество теплоты, переданное системе, а δA – элементарная работа, совершённая системой. Работа и теплота не являются функциями состояния, а зависят от процесса перехода системы из одного состояния в другое – δQ и δA – это бесконечно малые величины, которые нельзя считать дифференциалами какой-либо функции.

Второе начало термодинамики – физический принцип, накладывающий ограничение на направление процессов, которые могут происходить в

термодинамических системах и позволяет ввести ещё одну функцию термодинамического состояния S – энтропию, её полный дифференциал для квазистатических процессов записывается как

$$dS = \delta Q / T \quad (2)$$

В совокупности с температурой – T и внутренней энергией – U энтропия – S составляет полный набор величин, необходимых для математического описания термодинамических процессов. Лишь две из трёх величин являются независимыми.

$$S = S(U, T) \quad (3)$$

Фундаментальное уравнение Гиббса – Дюгема определяющее выражение для полного дифференциала внутренней энергии для открытой простой однородной системы имеет вид

$$dU = TdS - PdV + \sum_j \mu_j dN_j \quad (4)$$

где μ_j – химический потенциал j – й компоненты, dN_j – количество j – й компоненты. Почти вся аксиоматика равновесной термодинамики сводится к постулированию самого этого уравнения и свойств входящих в него термодинамических переменных.

Третье начало термодинамики сформулировано Максом Планком (1911 год) как условие обращения в нуль энтропии всех тел при стремлении температуры к абсолютному нулю:

$$S \rightarrow 0 \text{ при } T \rightarrow 0. \quad \text{Отсюда} \quad S_0 = 0,$$

что даёт начало отсчета и возможность определять абсолютное значение энтропии и других термодинамических потенциалов.

Третье начало термодинамики относится только к равновесным состояниям.

Общее начало термодинамики - изолированная термодинамическая система со временем самопроизвольно приходит в состояние термодинамического равновесия, что позволяет ввести функцию, определяющую это состояние системы, температуру – T , Условие термодинамического равновесия изолированной системы:

$$T = \text{const}; \quad T = \text{idem} \quad (5)$$

Все уравнения термодинамики получены дедуктивным способом из рассмотренных выше постулатов с применением преобразований Лежандра к полному дифференциалу (термодинамических) функций независимых переменных (Пфафовых форм).

В уравнениях классической термодинамики отсутствует время и, соответственно, отсутствует понятие переноса – это определяет ее ограничение как термостатики.

2.2 Приближение локального термодинамического равновесия

Классическая теория процессов переноса^{4,5,6} опирается на приближения локального термодинамического равновесия и сплошной среды.

Локальную энтропию S физически бесконечно малых объёмов можно характеризовать температурой $T(x)$, химическими потенциалами $\mu(x)$ и другими термодинамическими параметрами, но не постоянными, а зависящими от пространственных координат x_i , времени t и подчиняющимися уравнениям термостатики.

Состояние физически малого объема в окрестности точки x в момент времени t описывается локальной энтропией:

$$S = S(U(x, t), v(x, t), C(x, t)), \quad (6)$$

где в качестве независимых переменных используются: $U(x, t)$ - локальная плотность внутренней энергии, $v(x, t)$ - локальный удельный объем, $C(x, t)$ - локальная концентрация различных химических компонентов. Для термодинамических параметров, определенных также, как и энтропия S в (6) справедливо уравнение Гиббса:

$$dU = TdS - PdV + \sum_j \mu_j dN_j, \quad (7)$$

где T, P, μ_i - локальные температура, давление и химический потенциал соответственно.

Медленные неравновесные процессы переноса (теплопроводность, диффузия и т. п.) описываются дифференциальными уравнениями в частных производных параболического типа и носят волновой характер. Они получены из законов сохранения (массы, энергии, импульса или их аналогов) и линейного соотношения между потоками переноса и градиентами потенциала переноса - термодинамическими силами.

$$\vec{j}_i = -\beta_i \nabla \Psi_i, \quad (8)$$

где \vec{j}_i - плотность потока переноса, Ψ_i - потенциал переноса (температура, масса, и т. п.), β_i - коэффициент переноса (кинетический коэффициент), i - тип (вид) потока переноса (тепло, масса, импульс и т. п.), $\nabla \Psi_i$ - градиент потенциала переноса - термодинамическая сила

Линейная зависимость между термодинамическими силами и потоками переноса означает, что система находится в локальном термодинамическом равновесии.

2.3 Принцип локальности и приближение сплошной среды

Принцип локальности предполагает, что законы механики справедливы и для системы в целом и для каждой из ее частей, какой бы малой она ни была.

Принцип локальности коррелируется с приближениями механики сплошной среды: отсутствие у среды структуры позволяет в интегральных законах сохранения совершать предельный переход при стремлении объема интегрирования к нулю и получать эквивалентные «континуальные» законы сохранения в форме дифференциальных уравнений в частных производных.

С физической точки зрения такая процедура некорректна, игнорируется микроструктура, обладающая качественно новыми свойствами, но дискретностью вещества можно пренебречь и рассматривать такую систему в приближении сплошной среды, если выполняется условие:

$$L \sim \Psi_i / (d\Psi_i/dx) \gg h \quad (9)$$

$$t_o \sim \Psi_i / (d\Psi_i/dt) \gg \tau, \quad (10)$$

где Ψ_i - макропараметр системы - потенциал переноса (температура, концентрация и т. п.), x - координата, t - время, τ - время релаксации, $v = (a/\tau)^{1/2}$ - скорость распространения возмущений в среде^{8,10}, a - коэффициент переноса

(температуропроводности, диффузии и т. д.), $h = \tau v$ – пространственный микромасштаб, на котором происходит релаксация системы к локальному термодинамическому равновесию – корреляционная длина, $L = a/V$, – макромасштаб – характерный размер фронта бегущей волны, $t_o = a/V^2$ – характерное время изменения макропараметров системы.

Если характерный макромасштаб рассматриваемого процесса L много больше характерного масштаба микроструктуры среды h , т.е.

$$L \gg h, \quad (11)$$

то такой процесс локален, т.е. подчиняется уравнениям переноса в локальной форме.

Соотношения (9) и (10) эквивалентны следующим неравенствам

$$v \gg V \quad (12)$$

$$t_o \gg \tau \quad (13)$$

Классическая теория переноса справедлива, если характерная скорость данного процесса много меньше скорости распространения возмущений в таких средах, а время релаксации τ , в течение которого устанавливается равновесие в малых, но (макроскопических областях), намного меньше характерного времени рассматриваемого процесса t_o ^{7,8,9}.

Процессы переноса описываются дифференциальными уравнениями в частных производных параболического типа с бесконечно большой скоростью распространения возмущений от мгновенного точечного источника^{8,9,10}, что с физической точки зрения неприемлемо. Для достаточно медленных процессов, бесконечно большая скорость распространения возмущений понимается в смысле неравенства (12).

Основываясь на принципе локального термодинамического равновесия и принципе локальности, классическая термодинамика необратимых процессов приводит к уравнению теплопереноса параболического типа (уравнение диффузии имеет аналогичный вид)^{4,5}:

$$\frac{dT}{dt} = a\Delta T + W \quad (14)$$

где a – коэффициент температуропроводности, W – источник тепла.

Классическое уравнение переноса (14) не содержит пространственных и временных микромасштабов оно локально, как во времени, так и в пространстве.

2.4 Время релаксации

Время релаксации τ , определяющее величину скорости распространения возмущений в среде, характеризует скорость релаксации $v = (a/\tau)^{1/2}$ системы^{8,10} к локальному термодинамическому равновесию и зависит от молекулярно-кинетических свойств среды, a – коэффициент переноса (температуропроводности, диффузии).

Уравнение Больцмана,¹¹ было рассмотрено в релаксационном приближении, где τ трактовалось как время релаксации системы к состоянию с максвелловской функцией распределения для газов и Ферми-Дирака для электронов в металле. В этом случае при нормальной температуре $\tau \sim 10^{-13}$ сек.

Применительно к гетерофазным системам под временем релаксации следует понимать характерное время межфазного теплообмена¹².

2.5 Пределы применимости локально-равновесных теорий процессов переноса

Принцип локального термодинамического равновесия - принцип локальности наиболее сильно ограничивает область применимости классической теории процессов переноса^{4,5,6}.

Предположение о локальном термодинамическом равновесии является слишком грубым допущением для таких объектов как:

- сверхкороткие процессы взаимодействия концентрированных потоков энергии с веществом,
- гидродинамика фононов,
- ударные волны,
- системы с памятью,
- сверхтекучие жидкости,
- наноматериалы,
- распространение ультразвука в газах и т. д.

Процессы переноса в локально равновесной теории носят волновой характер и, в указанных выше приближениях, описываются параболическими уравнениями с бесконечно большой скоростью распространения возмущений.

Ограничения, накладываемые принципом локального равновесия на скорость моделируемого процесса, снимаются в таких подходах к построению неравновесной термодинамики, как расширенная необратимая (неравновесная) термодинамика и рациональная термодинамика.

В данной работе рациональная термодинамика не рассматривается.

3 РАСШИРЕННАЯ НЕОБРАТИМАЯ ТЕРМОДИНАМИКА

3.1 Область применения расширенной необратимой термодинамики

Экстремальные условия – воздействие сверхкоротких концентрированных потоков энергии на вещество,³⁰⁻³⁴ высокий уровень градиентов и потоков переноса (в ударных волнах^{28,35}), большие характерные скорости или малые характерные времена процессов, низкие температуры,^{8,10,20,36} процессы в дисперсных системах,³⁷⁻⁴¹ – приводят к локально-неравновесному характеру протекания различных явлений.

В этих случаях время релаксации системы к локальному равновесию сравнимо с характерным временем самого процесса.

Детально разработанными термодинамическими теориями, не опирающимися на принцип локального равновесия и учитывающими пространственно-временную нелокальность процессов переноса, являются:

- "расширенная необратимая термодинамика" (РНТ),^{8,14-18}
- волновая теория Дьярмати^{5,19}
- Кроме того, изучение таких систем может быть основано на различных версиях:
 - локально-неравновесной термодинамики,^{6-8,10,13,19-20}
 - кинетической,^{11,22-24}
 - молекулярно-динамической^{25,26} (уравнения переноса получены из уравнения Больцмана при помощи теории случайных блужданий и др.^{5-9,11,18-27}),
 - феноменологической и других вариантах локально-неравновесных теорий и методов (ссылки в^{8,10,13,20,25-27}).

3.2 Основные положения расширенной необратимой термодинамики

Введение новых независимых переменных:

РНТ для описания состояния системы вдали от локального равновесия помимо классических независимых переменных, использует в качестве новых независимых переменных диссипативные потоки, т.е. поток тепла q , поток массы J и тензор напряжения P . Таким образом, в локально-неравновесной системе энтропия S является функцией не только классических локально-равновесных переменных (см. (6)), но и диссипативных потоков:

$$S = S(U(x, t), v(x, t), C(x, t), q(x, t), J(x, t), P(x, t)) \quad (15)$$

С физической точки зрения новые переменные существенно отличаются от классических – потоки в общем случае не подчиняются законам сохранения и являются относительно "быстрыми" переменными, скорость изменения которых при релаксации системы к локальному равновесию может быть высока. (Поток означает направленное движение носителей такая система более упорядочена – энтропия в системе с потоками должна быть меньше).

В рамках локально-неравновесной термодинамики рассматриваются три основные модели сред:

- среды с внутренними степенями свободы;
- среды скоростного типа;
- среды с памятью

Наиболее общей моделью являются среды с памятью – среды скоростного типа и среды с внутренними степенями свободы можно рассматривать как частный случай сред с памятью. Отдельно надо рассмотреть среды с учетом их микроструктуры.

Различаются следующие варианты определения температуры в РНТ.

«Классическое» определение температуры: в классической термодинамике температура « T » определяется только для равновесных или локально-равновесных систем.

Различные версии РНТ вводят понятия локально-неравновесных энтропии S и внутренней энергии U , что и дает основания в рамках этих теорий определить локально-неравновесную температуру, как⁸:

$$T^l = \partial S / \partial U \quad (16)$$

Термодинамическая температура: для сред, состояние которых зависит от скорости изменения температуры, абсолютная температура может быть заменена «термодинамической» температурой,⁷ являющейся функцией абсолютной температуры и скорости ее изменения. Эти обе температуры совпадают, когда скорость изменения абсолютной температуры равна нулю. Поэтому термодинамическая температура может быть представлена как разложение в ряд Тейлора по степеням абсолютной температуры и скорости ее изменения.⁷

Величина отклонения термодинамической температуры от абсолютной, пропорциональная скорости изменения последней, характеризует степень локальной неравновесности системы. Такая трактовка термодинамической температуры может быть, по-видимому, использована и для сред другого типа.

Понятие «кинетической» температуры вводят в молекулярной динамике как меру средней кинетической энергии молекул, определяемую по локально-неравновесной функции распределения.^{28,29}

При небольших отклонениях от локального равновесия, неравновесность системы влияет только на величину теплового потока, который при этом уже не определяется законом Фурье, а зависит от времени релаксации системы к локальному термодинамическому равновесию.

Эволюционные уравнения для диссипативных потоков

Использование определения локально-неравновесной энтропии (15) и формулировки второго начала термодинамики РНТ приводит к дифференциальным уравнениям для диссипативных потоков эволюционного (релаксационного) типа, называемых уравнениями Максвелла – Каттанео^{8,10,22} :

$$\vec{j}_i + \tau_i \frac{\partial j_i}{\partial t} = -\beta_i \nabla \Psi_i \quad (17)$$

Для сравнения представлена плотность потока переноса для локально-равновесного процесса:

$$\vec{j}_i = -\beta_i \nabla \Psi_i, \quad (18)$$

где \vec{j}_i – плотность потока переноса, Ψ_i – потенциал переноса ($\nabla \Psi_i$ – термодинамическая сила), β_i – коэффициент переноса (кинетический коэффициент), i - тип (вид) потока переноса (тепло, масса, импульс и т.п.), τ_i - время релаксации « i - го» потока переноса.

Из уравнения (17) следует, что в системе с нулевым градиентом температуры начальное значение теплового потока q_0 релаксирует к равновесному значению $q = 0$ по экспоненциальному закону:

$$q(t) = q_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_T}\right) \quad (19)$$

В общем случае система может эволюционировать к локальному равновесию, проходя последовательно несколько стадий с различными временами релаксации, причем такой процесс может быть еще и пространственно-нелокален, т.е. происходить в некоторой пространственно - временной области.

3.3 Потоки высшего порядка

Включение диссипативных потоков в ряд независимых переменных приводит к тому, что эти потоки уже не определяются градиентом соответствующего потенциала переноса, а являются решениями эволюционных уравнений (17). Эти уравнения описывают процесс релаксации диссипативных потоков к своим локально-равновесным значениям.

Уравнение Максвелла-Каттанео (17), применительно к потоку тепла может быть представлено как:

$$\rho \frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\rho}{\tau} (q + \lambda \nabla T) \quad (20)$$

Это уравнение, связывающее между собой тепловой поток и градиент температуры в среде с тепловой релаксацией, обобщает классический закон Фурье $q = -\lambda \nabla T(t)$.

Дополнительный член $\tau dq/dt$ в законе Максвелла-Каттанео (17) может рассматриваться как проявление инерционности процесса теплопереноса.

Процесс теплопереноса в локально-неравновесных средах обладает инерционными свойствами: тепловой поток реагирует на изменение градиента температуры не в тот же момент времени t , а на время релаксации τ позже:

$$q(t + \tau) = -\lambda \nabla T(t) \quad (21)$$

Правая часть этого уравнения может рассматриваться с феноменологической точки зрения как источник. Для того чтобы это уравнение имело форму полного закона сохранения, РНТ вводит дополнительный член в дивергентной форме⁸, т.е.:

$$\rho \frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\rho}{\tau} (q + \lambda \nabla T) - \nabla q_2 \quad (22)$$

где q_2 - поток теплового потока или поток второго порядка, представляющий собой тензор второго ранга, описывающий пространственно нелокальные эффекты. Сравнение с кинетической теорией показывает, что поток q_2 связан с четвертым моментом неравновесной функции распределения по скоростям.^{8,61}

$$\nabla q_2 = l^2 \nabla^2 q \quad (23)$$

Учет потока второго порядка q_2 с нулевым временем релаксации $\tau_2 = 0$ приводит к появлению дополнительного члена: $l^2 \nabla^2 q$, который описывает пространственно нелокальный эффект процесса теплопереноса, где l – характерный масштаб нелокальности (корреляционная длина).

Таким образом, последовательное введение потоков высшего порядка приводит к иерархии уравнений для теплового потока, которые учитывают различные степени отклонения системы от локального термодинамического равновесия, а также и пространственно нелокальные эффекты.

Для практических целей обычно достаточно взять лишь несколько дополнительных потоков, например, в (23) достаточно учесть поток второго порядка с нулевым временем релаксации, чтобы описать тепловые волны и другие особенности процесса переноса.⁸

3.4 Уравнения переноса в локально-неравновесных системах

Введение теплового потока q в ряд независимых переменных и появление, как следствие, релаксационного члена в законе Максвелла-Каттанео приводят к уравнению теплопроводности гиперболического типа.⁶¹

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_T \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a \nabla^2 T + \frac{W}{\rho c_p} + \frac{\tau_T}{\rho c_p} \frac{\partial W}{\partial t} \quad (24)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \tau_T \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = a \nabla (\nabla q) - a \nabla W \quad (25)$$

В этом случае для определения пространственно-временной эволюции теплового потока q возникает независимое уравнение (25), которое также является уравнением в частных производных гиперболического типа.

Уравнения теплопроводности гиперболического типа (24) и (25) – тепловой сигнал (или высокочастотные тепловые возмущения) распространяются в локально-

неравновесных условиях с конечной скоростью $V_T = (a/\tau_T)^{1/2}$, где $a = \lambda/\rho C_p$ – коэффициент температуропроводности.

Это свойство решений гиперболических уравнений переноса устраняет "парадокс бесконечной скорости распространения возмущений", неприемлемый с физической точки зрения, так как нарушается принцип причинности.

Постановка краевой задачи для уравнений (24) и (25) требует задания начального значения не только температуры, как в классическом локально-равновесном случае, но и начальных значений $\partial T/\partial t$, q и $\partial q/\partial t$, поскольку (24) и (25) являются уравнением второго порядка, а тепловой поток q – независимой переменной.

Уравнение теплопроводности гиперболического типа (24) сочетает в себе свойства как классического уравнения теплопроводности, описывающего чисто диссипативный способ передачи энергии, так и волнового уравнения (вторая производная по времени), описывающего распространение незатухающих волн. Это позволяет объяснить экспериментально наблюдаемые волновые свойства процесса теплопереноса при низких температурах – распространение тепловой волны с конечной скоростью.^{36,42-44}

Одной из особенностей нелокальных уравнений переноса (24) является наличие в их правых частях не только функции источника W , но и ее производных. Не меняя суммарного теплосодержания системы они могут заметно исказить пространственно-временные распространения температуры и теплового потока в системе.

Учет потока второго порядка q_2 с временем релаксации $\tau_2 > 0$ приводит также к уравнению гиперболического типа второго порядка с конечной скоростью распространения возмущений V_2^{*65} :

$$V_2^* = \left(\frac{a}{\tau_T} + \frac{l^2}{\tau_T \tau_2} \right)^{1/2} \quad V_2^* > V_T = (a/\tau_T)^{1/2} \quad (26)$$

Из (26) следует, что тепловая волна (сильный разрыв), с учетом потоков второго порядка, распространяется с большей скоростью, чем обычная тепловая волна (уравнение (24)). Скорость распространения тепловой волны, соответствующая последовательности гиперболических уравнений, будет увеличиваться и стремиться к конечному пределу.¹⁸

3.5 Двухтемпературная модель

Двухтемпературные (2Т) модели диффузионного типа^{13,16,30,45-58} справедливы при условии, что время установления равновесия в подсистемах много меньше времени установления равновесия между ними³⁰, между подсистемами происходит обмен энергией, т.е. они имеют разные температуры T_1 и T_2).

Такие условия реализуются, например, при:

- облучении металлов сверхкороткими импульсами энергии, когда на определенной стадии процесса температура электронного газа может значительно превышать температуру решетки³⁰⁻³⁴,
- в ударных волнах роль подсистем со своей собственной температурой играют различные степени свободы молекул.³⁵

Тогда пространственно-временная эволюция температур (T_1 и T_2) описывается парой связанных уравнений параболического типа (т.е. классических локально-равновесных уравнений переноса^{50,56}):

$$C_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \lambda_i \nabla^2 T_i \pm g(T_2 - T_1) + W_i \quad (27)$$

где $i = 1, 2$, C_i – теплоемкость i -той подсистемы, g – коэффициент теплообмена между подсистемами, знак плюс соответствует $i = 1$, минус $i = 2$, W_i – интенсивность источников тепловыделения. Все коэффициенты в (27) относятся к единице объема неомогенной среды.

В более общем случае, учитывающем процессы релаксации внутри каждой подсистемы, двухтемпературная модель должна состоять из системы уравнений переноса гиперболического типа¹³:

$$C_1 \rho_1 \tau_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial t^2} + C_1 \rho_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \lambda_1 \Delta T_1 + W_1 + \tau_1 \frac{\partial W_1}{\partial t} + g(T_2 - T_1) + g \tau_1 \frac{\partial (T_2 - T_1)}{\partial t} \quad (28)$$

$$C_2 \rho_2 \tau_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial t^2} + C_2 \rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \lambda_2 \Delta T_2 + W_2 + \tau_2 \frac{\partial W_2}{\partial t} + g(T_2 - T_1) + g \tau_1 \frac{\partial (T_2 - T_1)}{\partial t}, \quad (29)$$

где T_1 и T_2 – температуры каждой из подсистем, g – коэффициент теплообмена между ними, τ_1 и τ_2 – время релаксации к локальному равновесию подсистемы 1 и 2 соответственно. В двухкомпонентной системе (28) – (29) тепловая волна будет распространяться по каждой из подсистем со своей собственной скоростью: $v_1 = (a_1/\tau_1)^{1/2}$ и $v_2 = (a_2/\tau_2)^{1/2}$

Анализ теплопереноса в двухтемпературной среде⁶¹, подчиняющейся системе связанных локальных уравнений теплопроводности (27), показал, что такой процесс нелокален как во времени, так и в пространстве.

Характерными масштабами нелокальности являются время релаксации энергии между подсистемами τ_l и пространственный масштаб l , равный по порядку величины глубине прогрева системы за время τ_l .

Параметры τ_l и l , являются внутренними (молекулярно-кинетическими) характеристиками как, например, C_p или λ , и могут быть определены экспериментально.

Соотношение между пространственно-временными масштабами нелокальности (микромасштабами) и характерными макромасштабами самого процесса переноса определяет тип (параболический или гиперболический) уравнения переноса в частных производных, соответствующего данному процессу.

3.6 Среды с дискретной структурой.

Модели среды дискретного типа. Система состоит из взаимодействующих дискретных объектов, состояние которых изменяется через конечные промежутки времени и процесс переноса имеет дискретную пространственно-временную структуру.

Аксиоматика дискретного подхода к моделированию процессов переноса может быть основана на теории случайных блужданий^{8,13,53,27,59,60} – блуждающая частица, переносящая энергию и/или массу, совершает скачки длиной h в положительном или отрицательном направлении оси x с равной вероятностью, причем такой скачок происходит на каждом временном шаге через равные промежутки времени τ , обмен энергией между дискретными элементами происходит именно в промежутке между стационарными состояниями

Учет дискретности по времени процесса обмена энергией между соседними элементами системы в первом приближении эквивалентен введению тепловой памяти среды^{20,61}.

В случае среды с дискретной структурой температура и тепловой поток также являются независимыми переменными – значение теплового потока не может быть получено дифференцированием распределения температуры в системе, как это обычно делается в локально-равновесном случае.

Для описания процесса теплопереноса наряду с дискретным уравнением для температуры необходимо сформулировать и независимое дискретное уравнение для потока тепла, описывающего пространственно-временную эволюцию самого потока.

В дискретных средах уравнение переноса и взаимосвязь между тепловым потоком и температурой (обобщенный закон Фурье) нелокальны, т. е. они связывают между собой термодинамические переменные не в точке, а в некоторой пространственно-временной области.

Причем пространственная нелокальность симметрична – при замене h на $(-h)$ вид этих уравнений не изменяется. Временная нелокальность « τ » этих уравнений такой симметрии не содержит, что отражает необратимый характер релаксационных процессов.

Для того чтобы совершить предельный переход от дискретных уравнений к континуальным уравнениям в частных производных необходимо задать закон предельного перехода, т. е. взаимосвязь между τ и h при $\tau \rightarrow 0$; $h \rightarrow 0$. Такой предел содержит бесконечное число членов ряда Тейлора с двумя малыми параметрами τ и h .

Закон предельного перехода определяется характером процессов, протекающих в данной системе.

Рассмотрим два основных случая предельного перехода.

«Диффузионный» закон предельного перехода. При разложении дискретного уравнения переноса в модели случайных блужданий²⁷ предполагают, что коэффициент переноса (диффузии) $a = h^2/4\tau$ остается конечной величиной при $\tau \rightarrow 0$; $h \rightarrow 0$. «Диффузионный» закон предельного перехода, описывая волновой процесс переноса, предполагает бесконечно большую скорость распространения возмущений $V^* \rightarrow \infty$, так как в этом случае $V = h/\tau = 2a/h \rightarrow \infty$.

$$\lim_{\tau, h \rightarrow 0} \frac{h^2}{2\tau} = a = \text{const} > 0, \quad (30)$$

где a – коэффициент переноса. В этом случае нулевое приближение по τ имеет вид классического уравнения переноса параболического типа:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + W, \quad (31)$$

где Θ потенциал переноса. В этом приближении получаем классический закон Фурье (или закон Фика при массопереносе):

$$q = -\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \quad (32)$$

где $\lambda = \text{arc}_p$ – коэффициент теплопроводности.

«Волновой» закон предельного перехода. В этом случае скорость распространения возмущений $V^* = h/2\tau$, остается конечной величиной при $\tau \rightarrow 0$; $h \rightarrow 0$. Такой закон предельного называется «волновым»⁶¹.

$$\lim_{\tau, h \rightarrow 0} \frac{h}{\tau} = V^* < \infty \quad (33)$$

В первом приближении по τ в этом случае:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{V^{*2} \tau}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + W + \frac{\tau}{2} \frac{\partial W}{\partial t} \quad (34)$$

$$q + \frac{\tau}{2} \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{V^{*2} \tau c_p}{2} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (35)$$

При «волновом» законе предельного перехода перенос будет описываться уравнениями (34, 35) в частных производных с конечной скоростью распространения теплового сигнала V^* .

Эти уравнения совпадают соответственно с гиперболическими уравнениями переноса (24, 25) и законом Максвелла-Каттанео (20), полученными в РНТ путем введения теплового потока в ряд независимых переменных, описывающих локально-неравновесное состояние системы.

Выбор закона предельного перехода диктуется скоростью протекания процесса переноса. Для относительно медленных процессов "диффузионного" типа с характерной скоростью V , много меньшей скорости распространения возмущений V^* , следует пользоваться диффузионным законом предельного перехода. Высокоскоростным режимам процессов переноса, т.е. когда $V \sim V^*$, соответствует волновой закон предельного перехода. Закон предельного перехода определяет тип уравнений в частных производных и некоторые фундаментальные свойства их решений.

Пространственно-временная нелокальность дискретного уравнения переноса и дискретного аналога закона Фурье имеет ясный физический смысл: энергия (масса и т. д.) из одной области пространства в некоторый момент времени переносится в другую область пространства и попадает туда в другой момент времени.

3.7 Интегральная модель

Расширенная необратимая термодинамика приводит к пространственно-временной нелокальности уравнений для диссипативных потоков (тепла и массы).

Эти уравнения, дополненные соответствующими законами сохранения, приводят к нелокальным уравнениям переноса для температуры и концентрации. Эта процедура обычно прodelывается с законами сохранения в форме локального уравнения в частных производных.

Строго говоря, корректный вывод уравнений переноса должен быть основан на нелокальной форме законов сохранения, содержащих столько же нелокальных членов, сколько их присутствует в уравнениях для диссипативных потоков.

Предположение о пространственно-временной нелокальности законов сохранения приводит одновременно к нелокальным уравнениям переноса и нелокальным уравнениям для диссипативных потоков.

Система классических (локальных) уравнений состоит из закона сохранения энергии, закона Гиббса и уравнения баланса энтропии (записанных в самом простом

представлении), которые в случае изотропного твердого тела имеют следующий вид (пример)⁶¹.

$$\rho \frac{dU}{dt} = -\nabla q \quad (36)$$

$$dS = T^{-1} dU \quad (37)$$

$$\rho \frac{dS}{dt} + \dots \nabla J_s = \sigma_s, \quad (38)$$

где j_s и σ_s – поток и производство энтропии соответственно. Как уже отмечалось выше, дифференциальная форма уравнений (36) – (38) является следствием предположения о пространственно-временной локальности, когда объем интегрирования в законах сохранения стремится к нулю. В общем же случае интегральные уравнения, соответствующие (36) – (38), имеют следующий вид⁶¹:

$$\rho[U(x, t + \tau) - U(x, t)] = \frac{1}{\Omega} \int_t^{t+\tau} \oint q(x, t) d\eta dt \quad (39)$$

$$S(x, t + \tau) - S(x, t) = T^{-1}[U(x, t + \tau) - U(x, t)] \quad (40)$$

$$\rho[S(x, t + \tau) - S(x, t)] + \frac{1}{\Omega} \int_t^{t+\tau} \oint_\eta J_s(x, t) d\eta dt = \int_t^{t+\tau} \int \sigma_s d\Omega dt, \quad (41)$$

где τ – временной масштаб нелокальности, Ω – объем и η – поверхность, соответствующие линейному масштабу нелокальности h , т.е. $\Omega \sim h^3$ и $\eta \sim h^2$.

Подчеркнем, что уравнения (39) – (41) нелокальны не только в пространстве, но и во времени, так как скорости изменения энергии и энтропии, т.е. их первые производные по времени, представляющие собой локальные члены, заменены на конечные разности с характерным масштабом нелокальности τ . В одномерном случае (1.38) может быть переписано как⁶¹

$$\rho[U(x, t + \tau) - U(x, t)] = -\frac{\tau}{2h} \left[q \left(x + h, t + \frac{\tau}{2} \right) - q \left(x - h, t + \frac{\tau}{2} \right) \right] \quad (42)$$

Подставляя (42) в (40), получим выражения для потока и производства энтропии, соответствующие интегральной формулировке (39) – (41). Согласно второму закону термодинамики, производство энтропии должно быть положительным. Из этого требования вытекают следующие соотношения, представленные в виде рядов Фурье с малыми параметрами τ и h ⁶¹

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \dots = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + \dots \right) \quad (43)$$

$$q + \tau \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \dots = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + \dots \right) \quad (44)$$

Уравнение теплопроводности и уравнение для теплового потока (43, 44) в соответствующих приближениях и при соответствующем законе предельного перехода содержат в себе классическое уравнение переноса параболического типа и закон Фурье, уравнение переноса гиперболического типа (телеграфное уравнение) и закон Максвелла - Каттанео.

Интегральная формулировка (39 – 41) и соответствующий ей второй закон термодинамики приводят к появлению в уравнениях переноса нелокальных членов,

совпадающих (или равных по порядку величины) с членами в уравнениях переноса, полученных в РНТ или других термодинамических и статистических методах на основе локальной формулировки законов сохранения.

Таким образом строгий подход к исследованию динамики нелокальных систем должен быть основан на законах сохранения в интегральной или какой-либо иной нелокальной форме⁶¹.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- Локально-неравновесные теории – РНТ процессов переноса могут рассматриваться как «релятивистские» по отношению к классической локально-равновесной теории.
- В РНТ вводится несколько вариантов представления температуры применительно к локально-неравновесным процессам переноса, например, понятие термодинамической температуры, а также модель среды с памятью.
- РНТ для описания состояния системы вдали от локального равновесия использует в качестве новых независимых переменных диссипативные потоки, т.е. поток тепла q , поток массы J и тензор напряжения. Эти «быстрые» переменные в общем случае не подчиняются законам сохранения, скорость изменения которых при релаксации системы к локальному равновесию может быть высока.
- Диссипативные потоки становятся независимыми переменными они уже не определяются градиентом соответствующего потенциала переноса, а являются решениями эволюционных уравнений. Эти уравнения описывают процесс релаксации диссипативных потоков к своим локально-равновесным значениям.
- В общем случае система может эволюционировать к локальному равновесию, проходя последовательно несколько стадий с различными временами релаксации, причем такой процесс может быть еще и пространственно - нелокален.
- Модели РНТ, описывающие локально-неравновесные процессы переноса, представляют собой иерархическую последовательность уравнений в частных производных параболического и гиперболического типов, порядок которых увеличивается с увеличением степени отклонения системы от локального равновесия.
- Характерные времена релаксации и (микро) масштабы пространственной нелокальности являются внутренними параметрами самой системы и не зависят от внешних условий. Адекватный выбор модели переноса и типа уравнений зависят от соотношений между характерными пространственно-временными макро и микромасштабами процесса переноса, определяющими релаксацию системы к локальному равновесию и некоторые фундаментальные свойства волновых процессов переноса.
- При переходе от дискретных уравнений переноса к их континуальным приближениям различной точности в виде уравнений в частных производных следует задавать закон предельного перехода. Этот закон определяет тип уравнений в частных производных и некоторые фундаментальные свойства их решений.
- Дискретные модели процессов переноса особенно удобны для компьютерного моделирования, так как они не требуют перевода на язык дискретной математики, поскольку представлены непосредственно в рекуррентной форме. Основой для

такого анализа могут служить модели случайных блужданий и сред с памятью - теоретические методы описания динамики систем, не опирающиеся на принцип локального равновесия⁶¹.

- Процедура разложения по малому параметру (или нескольким параметрам) часто встречается в термодинамических и статистических теориях, например, в теории Навье-Стокса, методах Треда и Чепмена-Энскога и т.п., следовательно, в этих случаях также может оказаться полезной идея о введении различных законов предельного перехода, определяющих взаимное поведение параметров разложения при стремлении их к нулю⁶¹.
- Применительно к Гамильтоновой формулировке неравновесной термодинамики⁸ разработаны мощные численные методы. Связи между принципом Гамильтона и интегральным вариационным принципом Дьярмати посвящён раздел в монографии⁵.

REFERENCES

- [1] A.V. Kolesnichenko. "Informational-thermodynamic conception of processes formation of self-organization in open systems under influence of external environment". *Mathematica Montisnigri*, **XXV**, 80-107 (2016)
- [2] V.I. Mazhukin, A.A. Samokhin, "Boundary conditions for gas-dynamical modeling of evaporation processes" *Mathematica Montisnigri*, **XXIV**, 8 - 17 (2012).
- [3] V.I. Mazhukin, A.V. Shapranov, A.A. Samokhin, A.Yu. Ivochkin, "Mathematical modeling of non-equilibrium phase transition in rapidly heated thin liquid film", *Mathematica Montisnigri*, **XXVII**, 65 - 90 (2013).
- [4] C. De Groot, P. Masur, *Neravnovesnaya termodinamika*, M.: Mir, (1964)
- [5] I. Djarmati, *Neravnovesnaya termodinamika*, M.: Mir, (1974)
- [6] U.A. Day, *Termodinamika prostykh sred s pamiatju*, M.: Mir, (1974).
- [7] N. Petrov, I. Brannoe, *Sovremennye problemy termodinamiki*, M. Mir, (1986).
- [8] D. Jou, J. Casas-Vazquez, G. Lebon, "Extended Irreversible Thermodynamics", *J. Non-Equilib. Thermodyn.*, **21**, 103 (1996); *Rep. Prog. Phys.* **51**, 1105 (1988)
- [9] E.I. Levanov, E.N. Sotskyi, "Teploperenos s uchetom relaksacii teplovogo potoka", *Matematicheskoye modelirovanie. Nelinejnye differencialnye uravnenia matematicheskoi fiziki*, Pod. Red. A.A. Samarskogo, S.P. Kurdjumova, V.I. Mazhukina, M.: Nauka, s. 155-190 (1987).
- [10] D. D. Joseph, L. Preziosi, "Heat Waves", *Rev. Mod. Phys.* **v. 61**, p. 41 (1989); **v. 62**, p. 375 (1990).
- [11] B.B. Mikic, "A model rate equation for transient thermal conduction", *Int. J. Heat Mass Transfer*, **10**, pp. 1899–1904 (1967)
- [12] N.V. Antonishin, M.A. Geler, A.L. Parnas, "Giperbolicheskoe uravnenie teploprovodnosti dispersnyh system", *Injenerno Fizicheskii Jurnal*, **26** (3), p. 503 (1974)
- [13] S.L. Sobolev, "Processy perenosa i begushie volny v lokalno-neravnovesnyh sistemah", *Uspehi Fisicheskikh Nauk*, **161** (5) (1991)
- [14] I. Muller, T. Ruggeri, *Extended Thermodynamics*, New York: Springer, (1993)
- [15] B.C. Eu, *Kinetic Theory and Nonequilibrium Thermodynamics*, New York: Willey, (1992)
- [16] R.E. Nettleton, S.L. Sobolev, "Applications of Extended Thermodynamics to Chemical Rheological, and Transport Processes: A Special Survey Part I. Approaches and Scalar Rate Processes", *Journal of Non Equilibrium Thermodynamics*, **20** (3), 205-229 (1995)
- [17] J. Casas-Vazquez, D. Jou, "Nonequilibrium temperature versus local-equilibrium temperature", *Phys. Rev. E*, **49**, 1040 (1994)

- [18] J. Camacho, D. Jou, "Equations of state of a dilute gas under a heat flux", *Phys Rev E* **52**, 3490–3494 (1995). D. Jou & D. Pavon, "Non local and Nonlinear effects in shock waves", *Phys. Rev. A*, **44** (10), 6496 (1995)
- [19] D.A. Fekete, "Systematic Application of Gyarmati's Wave Theory of Thermodynamics to Thermal Waves in Solids", *Physica Status Solidi* (b), **105**, 161–174 (1981).
- [20] S.L. Sobolev, "Avtovolny v lokalno-neravnesnyh sredah", *Preprint OIHF AN SSSR, Chernogolovka*, (1989)
- [21] S. Machlyp, L. Onsager, "Fluctuations and Irreversible Processes", *Phys. Rev.*, **91**, 1512 (1953).
- [22] J.C. Maxwell, "On the Dynamical Theory of Gases / J.C. Maxwell", *Phil. Trans. Royal Soc., London*, **157**, 49–88 (1867).
- [23] V.A. Bubnov, "Molekuliarno-kineticheskoi obosnovanie uravnenia perenosa tepla", *Injenerno Fizicheskii Jurnal*, **28**, 670 (1975).
- [24] V. A. Bubnov, "More concepts in the theory of heat." *Int. J. Heat Mass Transfer*, **19**, 175-184 (1976).
- [25] M.E. Gurtin, A.C. Pipkin, "General Theory of Heat. Conduction with Finite Wave Speeds", *Arch.Rat. Mech.*, **31** (2), 112 (1968).
- [26] J. W. Nunziato, "On the heat conduction in materials with memory", *Quart. Appl. Math.* **29**, 187-204 (1971)
- [27] H.D. Weymann. "Finite speed of propagation in heat conduction, diffusion, and viscous shear motion", *II Amer. J. Phys.*, **35** (6), 488-496 (1967).
- [28] S.L. Chereshev, A.P. Genich, S.V. Kulikov, G.B. Manelis, "Effekty postupatelnoi neravnesnosti v udarnykh volnah v gazah", *Preprint OIHF AN SSSR, Chennogolovka*, (1988)
- [29] R.A. McDonald, D. H. Tsai, "Molecular dynamical calculations of energy transport in crystalline solids", *Phys.Rep.*, **46** (36), 1–41 (1978).
- [30] S.I. Anisimov, Ja. A. Imas, G.S. Romanov, Yu.V. Hodyko, *Deistvie izluchenia Bolshoi moshnosti na metally*, M. Nauka, (1970).
- [31] S.D. Bronson, J.G. Fujimoto, and E.P. Ippen, "Femtosecond electronic heattransport dynamics in thin gold films", *Phys. Rev. Lett.*, **59**, (1962)
- [32] H.E. Elsayed-Ali, T.B. Norris, M.A. Pessot, G.A. Mourou, "Time-Resolved Observation Of Electron-Phonon Relaxation In Cooper", *Phys. Rev. Lett.*, **58**(12), 1212 (1987).
- [33] R. W. Schoenlein, W. Z. Lin, J. G. Fujimoto, and G. L. Eesley, "Femtosecond studies of nonequilibrium electronic processes in metals", *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1680 (1987).
- [34] P. B. Corkum, F. Brunel, N. K. Sherman, and T. Srinivasan-Rao, "Thermal response of metals to Ultrashort-Pulse Laser Excitation", *Phys. Rev. Lett.*, **61**, 2886 (1988).
- [35] E.V. Stupochenko, S.A. Losev, A.I. Osipov, *Relaksacionnye process v udarnykh volnah*, M Nauka, (1965).
- [36] R. Gutfeld, *Fizicheskaya akustika*, Pod redakciei Mezona, M. Mir, **5**, (1973)
- [37] N.V. Antonishin, M.A. Geller, A.L. Parnas, "Giperbolicheskoe uravnenie teploprovodnosti dispersnyh system", *Injenerno Fizicheskii Jurnal*, **26** (3), 503-507 (1974).
- [38] I.N. Taganov, "Modelirovanie processov masso- I energoperenosa", *L. Himia*, (1979).
- [39] I.A. Novikov, "Elektroteplovaia analogia v nasledstvennyh sredah I ee primenenie", *Injenerno Fizicheskii Jurnal*, **55** (4), 643-649 (1988).
- [40] W. Kaminski, "Heat-conduction with finite wave-propagation velocity for materials of nonhomogeneous inner structure", *Inz. Chem. Proc.*, **9**, 81 (1988).
- [41] O.U. Dinariev, O.V. Nikolaev, "O relaksacionnyh processah v nizkopronicaemykh poristykh materialah", *Injenerno Fizicheskii Jurnal*, **58** (1), 78-82 (1990).
- [42] V.A. Shklovsky, V.M.Kuzmenko, "Vzryvnaya kristalizacia amorfnykh veshestv", *Uspehi Fizicheskikh Nauk*, **157**, 311 (1989).

- [43] R.J. Van Gutfeld, "In Physical Acoustics: Principles and Methods", **V**, (Ed. W P Mason) New York, London: Academic, 233 (1968)
- [44] J.R. Torczynski, D. Gerthsen, T. Roesgen, "Schlieren Photography of Second Sound Shock Waves in Superfluid Helium", *Phys. Fluids*, **27**, 2418 (1984).
- [45] V.M. Jdanov, S.V. Alievsky, *Processy perenosa v molekuliarnykh gazakh*, M.: Nauka, (1989)
- [46] S.I. Potynyakov, V.S. Babkin, U.M. Laevskiy, V.I. Drobyshvich, "Issledovanie teplovoy struktury volny Filtracionnogo gorenaya gazov", *Fizika Gorennya I Vzryva*, **21** (2), 19-25 (1985)
- [47] A.P. Aldushin, B.S. Sepliarsky, K.I. Shadinsky, "K teorii filtracionnogo gorennya", *Fizika gorennya I vzryva*, **1**, 36-45 (1980).
- [48] O.V. Kiselev, U.Sh. Matros, "Rasprostranenie fronta gorennya gazovoi smesi v zernistom sloe katalizatora", *Fizika gorennya I vzryva*, **2**, 25-30 (1980)
- [49] X. Wen, W.A. Tolbert, D.D. Dlott, "Ultrafast Temperature Jump in Polimers: Phonons and Vibrations Heat up at Different Rates", *J. Chem. Phys.*, **99**, 4140-4151 (1993)
- [50] S.L. Sobolev, "Uravnenie teploprovodnosti dlia system s negomogennoi vnytrennei strukturoi", *Injenerno Fizicheskii Zhurnal*, **66**, 492 (1994)
- [51] G.I. Barenblatt, "Samoorganizatsiya", *Nelineinye volny*, M. Nauka, 191 (1983)
- [52] L.D. Landau, E.M. Lifshic, *Gidrodinamika*, M. Nauka, (1986)
- [53] S.L. Sobolev, "Two-temperature discrete model for nonlocal heat conduction", *J.de Phys. III*, **3**, 2261 (1993)
- [54] S.L. Sobolev, G.B. Manelis, "2-Temperature model of nonlocal heat-transfer in relaxing systems and traveling waves", *Khimicheskaya Fizika*, **13** (5), 88-96 (1994)
- [55] D.W. Tang and N. Araki, "The wave characteristics of thermal conduction in metallic films irradiated by ultra-short laser pulses", *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **29**, 2527 (1996)
- [56] S.L. Sobolev, "The local-nonequilibrium temperature field around the melting and crystallization front induced by picosecond pulsed laser irradiation", *Phys. Lett. A*, **197** 243 (1995)
- [57] W. Kaminski, "Hyperbolic heat conduction equation for materials with a non-homogeneous inner structure", *Trans ASME. J. Heat Transfer*, **112**, 555 (1990)
- [58] V. Luikov, "Application of methods of thermo-dynamics of irreversible processes to investigation of heat and mass transfer in a boundary layer", *Int. J. Heat Mass Trans.*, **9** (139) (1966)
- [59] S.L. Sobolev, "Discrete model for transfer processes", *Phys. Lett. A*, **163** (101) (1992)
- [60] S.L. Sobolev, "Equations of transfer in non-local media", *Int. J. Heat Mass Trans.*, **37** (14), 2175-2182 (1994)
- [61] S.L. Sobolev, "Lokalno-neravnovesnye modeli v processakh perenosa", *Uspehi Fizicheskikh Nauk*, **167** (10), 1095-1106 (1997).

The results were presented at the 14-th International seminar "Mathematical models & modeling in laser-plasma processes & advanced science technologies" (July 4 - 9, 2016, Moscow, Russia).

Received May, 15 2016.