О ТОЧНОСТИ ОЦЕНКОВ ТЕЙЛОРОВСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУНКЦИЙ КЛАССА $A_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ И НЕКОТОРЫХ ЕГО ПОДКЛАССОВ

И. В. ОГАНИСЯН *

*Армянский национальный политехнический университет

Ереван, Армения

e-mail: ishkhanh@gmail.com

Ключевые слова: Классы Островского и Джрбашяна, коэффициенты Тейлора, произведения Бляшке и М. М. Джрбашяна.

Аннотация. В данной работе рассмотрены вопросы точности известных оценок для тейлоровских коэффициентов функций классов $A_\alpha\left(-1<\alpha<\infty\right)$ и $A_\alpha^*\left(-1<\alpha\le 0\right)$ - специальный подкласс ограниченных функций класса $A_\alpha\left(-1<\alpha\le 0\right)$.

ON THE ACCURACY OF SOME ESTIMATIONS FOR TAYLOR COEFFICENTS OF FUNCTIONS OF CLASSES $A_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ AND SOME ITS SUBCLASSES

I. V. HOVHANNISYAN*

* National Polytechnic University of Armenia
Yerevan, Armenia

e-mail: ishkhanh@gmail.com

Summary. In this paper we consider the accuracy of the estimates of Taylor coefficients of functions of classes $A_\alpha\left(-1<\alpha<\infty\right)$ and $A_\alpha^*\left(-1<\alpha\le 0\right)$ - special subclass of bounded functions of class $A_\alpha\left(-1<\alpha\le 0\right)$.

2010 Mathematics Subject Classification: 30J10, 31A20, 32A35.

Key words and Phrases: classes of Ostrovski and Djrbashyan, Taylor coefficients, Blaschke and Djrbashyan products.

1 ВВЕДЕНИЕ

Классам аналитических в единичном круге функций посвящены многочисленные исследования. Среди них важное место занимают введенные М. М. Джрбашяном общеизвестные классы $A_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$, обладающие свойством

$$A_\alpha \subset A_0 \left(-1<\alpha<0\right),$$
$$A_0 \subset A_\alpha \left(0<\alpha<+\infty\right),$$

где $A_0 \equiv A$ - известный класс Островского.

Согласно хорошо известной теореме Р. Неванлинны[1,2] класс A аналитических в круге $|z|<1$ функций для которых

$$\underset{0<r<1}{Sup}\left\{\int_0^{2\pi}\log^+\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi\right\}<+\infty$$

совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих факторизационное представление вида

$$f(z)=e^{i\alpha}z^\lambda B(z)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\psi(\theta)\right\},\ |z|<1,$$

где $\alpha\left(\operatorname{Im}\alpha=0\right)$ - постоянная, $\lambda>0$ - целое число, $B(z)$ функция Бляшке

$$B(z;z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z_k-z}{1-\overline{z}_k z}\frac{|z_k|}{z_k} \tag{1}$$

и $\psi(\theta)$ - вещественная функция с конечным полным изменением на $[0,2\pi]$.

Для функции класса A С. Н. Мергеляном[2] получена оценка тейлоровских коэффициентов

$$|a_n|\le\exp\left\{2\sqrt{cn}\left(1+o(1)\right)\right\},n\to\infty\,. \tag{2}$$

Обозначим через $A_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ класс аналитических в круге $|z|<1$ функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$\underset{0<r<1}{Sup}\left\{\int_0^{2\pi}D_{(+)}^{-\alpha}\log\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi\right\}<+\infty,$$

где

$$D_{(+)}^{-\alpha}\log\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|=\begin{cases}D^{-\alpha}\log\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|, & D^{-\alpha}\log\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|\ge 0,\\ 0, & D^{-\alpha}\log\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|\le 0,\end{cases}$$

$D^{-\alpha}$ - интегра-дифференциальный оператор произвольного порядка в смысле Римана – Лиувилля с началом в нулевой точке, который определяется следующим образом:

$$D^{-\alpha}f(r)\equiv\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^r(r-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt,\left(0<\alpha<+\infty\right),$$

$$D^{-\alpha}f(r)\equiv\frac{d}{dr}D^{-(1+\alpha)}f(r),\ \left(-1<\alpha<0\right).$$

Для специального случая $\alpha=0$ оператор D^0 определяется как тождественный оператор, т.е.

$$D^0 f(r) \equiv f(r).$$

Напомним основную теорему М. М. Джрбашяна[3] о факторизации классов A_α:

Класс $A_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$ совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих представление вида

$$f(z) = Cz^\lambda B_\alpha(z;z_k)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\psi(\theta)\right\}, \tag{3}$$

где C - постоянная, λ - целое число, $\psi(\theta)$ - вещественная функция с конечным полным изменением на $[0,2\pi]$,

$$S_\alpha(z) = \Gamma(1+\alpha)\left\{\frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}} - 1\right\}.$$

$B_\alpha(z;z_k)$ - сходящиеся в круге $|z|<1$ произведения Джрбашяна

$$B_\alpha(z;z_k) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-W_\alpha(z;z_k)},$$

где

$$W_\alpha(z;\xi) = \int_{|\xi|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\cdot$$

$$\cdot\left\{\zeta^{-k}\int_0^{|\xi|}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx - \bar{\zeta}^k\int_{|\xi|}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}dx\right\}z^k,$$

при условии

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-|z_k|\right)^{1+\alpha} < +\infty. \tag{4}$$

С. С. Степаняном[4] получена неулучшаемая оценка тейлоровских коэффициентов для функций классов $A_\alpha(-1<\alpha\le 0)$

$$|a_n| \le \exp\left\{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\sqrt[\alpha+2]{c_\alpha(1+\alpha)n^{1+\alpha}}\,(1+o(1))\right\},\ n\to\infty, \tag{5}$$

которая при значении параметра $\alpha=0$ совпадает с оценкой (2).

Обозначим через $A_\alpha^*(-1<\alpha<+\infty)$ множество тех функций из A_α в представлении (3) которых функция $\psi(\theta)$ невозрастающая.

Классы $A_\alpha^*(-1<\alpha<0)$ являются некоторыми подклассами ограниченных аналитических функций класса A_α. Для тейлоровских коэффициентов этих функций (в том числе и для произведений B_α) известна[5] более точная оценка:
если функция

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n,\ |z|<1$$

принадлежит классу $A_\alpha^*(-1<\alpha\le 0)$, то имеет место оценка

$$|a_n| = O(n^\alpha),\ n\to\infty. \tag{6}$$

Так как

$$A_\alpha^* \subset A_\alpha \subset A,\ -1<\alpha<0,$$

то оценка (2) верна также для функций классов $A_\alpha(-1<\alpha\leq\infty)$ и $A_\alpha^*(-1<\alpha\leq 0)$, а оценка (5) верна для функций классов $A_\alpha^*(-1<\alpha\leq 0)$, которые, естественно, не могут быть точными.

В работе[6] доказана следующая

ТЕОРЕМА A. При условии

$$\sum\left(1-|z_k|\right)^{1+\alpha}<+\infty,\ -1<\alpha<0$$

имеет место представление

$$B_\alpha(z,z_k)=B(z,z_k)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega(\theta)\right\},$$

где $\omega(\theta)$ - некоторая невозрастающая функция ограниченной вариаций на $[0;2\pi]$.

М. М. Джрбашяном[7] доказана также

ТЕОРЕМА B. Для того, чтобы функция Бляшке принадлежала классу $A_\alpha(-1<\alpha<0)$ необходимо и достаточно выполнение условия (4).

Следующая теорема[8] распространяет указанную оценку Степаняна на все значения параметра $\alpha\in(-1;+\infty)$.

ТЕОРЕМА C. Если функция

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n,\ |z|<1$$

принадлежит классу $A_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$, то имеет место следующая оценка

$$|a_n|\leq\exp\left\{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\sqrt[\alpha+2]{c_\alpha(1+\alpha)n^{1+\alpha}}\left(1+o(1)\right)\right\},\ n\to+\infty, \tag{7}$$

где c_α - некоторая положительная константа.

А в работе[8] доказана

ЛЕММА. Для функции

$$F_\alpha(z)=\exp\left\{\frac{c}{(1-z)^{1+\alpha}}\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}b_n^{(\alpha)}z^n,\ |z|<1,\ c>0$$

класса $A_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$ справедлива оценка

$$b_n^{(\alpha)}=\exp\left\{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\sqrt[\alpha+2]{c_\alpha(1+\alpha)n^{1+\alpha}}\left(1+o(1)\right)\right\},\ n\to+\infty.$$

2 ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

Из приведенной леммы непосредственно следует.

ТЕОРЕМА 1. Оценка (7) неулучшаемая если $\alpha\in(-1;+\infty)$.

Далее докажем следующее.

ТЕОРЕМА 2. Если множество нулей $\{z_k\}_1^\infty$ при $-1<\alpha<0$ удовлетворяет условию (4), то для произведения Бляшке

$$B(z,z_k)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n,\ |z|<1 \tag{8}$$

справедлива оценка

$$|a_n| = O\left(n^{\alpha}\right),\ n \to \infty .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1) имеем

$$B'(z, z_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{|z_k|^2 - 1}{\left(1 - \bar{z}_k z\right)^2} \frac{|z_k|}{z_k} \prod_{p \neq k} \frac{z_p - z}{1 - \bar{z}_p z} \frac{|z_p|}{z_p} \right\}.$$

Откуда, имея ввиду неравенство

$$\left| \frac{\xi - z}{1 - \bar{\xi} z} \right| \le 1,\ |z| < 1,\ |\xi| < 1,$$

имеем

$$\left| B'\left(re^{i\varphi}; z_k\right) \right| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - |z_k|^2}{\left|1 - \bar{z}_k re^{i\varphi}\right|^2} .$$

Интегрируя последнее неравенство, при этом применив оценку[9],

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\left|1 - re^{i\varphi}\right|^{\beta}} \le \frac{C}{(1-r)^{\beta - 1}},\ \beta > 1,$$

получим

$$\int_0^{2\pi} \left| B'\left(re^{i\varphi}; z_k\right) \right| d\varphi \le C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - |z_k|}{1 - |z_k| r} =$$

$$= C \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - |z_k|\right)^{\frac{1+\alpha}{2}} \frac{\left(1 - |z_k|\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}}{1 - |z_k| r}.$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, находим

$$\int_0^{2\pi} \left| B'\left(re^{i\varphi}; z_k\right) \right| d\varphi \le C \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - |z_k|\right)^{1+\alpha} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1 - |z_k|\right)^{1-\alpha}}{\left(1 - |z_k| r\right)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Отсюда, имея ввиду условие (4), а также неравенство

$$\left(1 - |z_k| r\right)^2 = \left(1 - |z_k| r\right)^{2+2\alpha} \left(1 - |z_k| r\right)^{-2\alpha} \ge (1-r)^{2+2\alpha} \left(1 - |z_k| r\right)^{-2\alpha},$$

получим

$$\int_0^{2\pi} \left| B'\left(re^{i\varphi}; z_k\right) \right| d\varphi \le C \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1 - |z_k|\right)^{1-\alpha}}{(1-r)^{2+2\alpha} \left(1 - |z_k|\right)^{-2\alpha}} \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= C \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1 - |z_k|\right)^{1+\alpha}}{(1-r)^{2+2\alpha}} \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{C}{(1-r)^{1+\alpha}} .$$

Но, с другой стороны, из (8) имеем

$$na_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} B'(z; z_k) z^{-n} dz$$

поэтому

$$|a_n| \le \frac{r^{1-n}}{n} \int_0^{2\pi} \left| B'\left(re^{i\varphi}; z_k\right) \right| d\varphi \le C \frac{r^{1-n}}{n(1-r)^{1+\alpha}},$$

откуда, минимизируя функцию

$$\frac{r^n}{n(1-r)^{1+\alpha}}$$

при $0<r<1$, получаем, что

$$|a_n| \le C \cdot n^{\alpha} .$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Из теоремы А следует, что при условии (4) $B(z,z_k)\in A_\alpha \setminus A_\alpha^*, \alpha\in(-1;0)$, но имеет место оценка (6). Так что оценка (6) является только необходимым условием для того, чтобы функция класса $A_\alpha(-1<\alpha<0)$ принадлежала подклассу $A_\alpha^*(-1<\alpha<0)$.

Докажем аналогичное утверждение для класса A при $-\frac{3}{4}<\alpha<0$.

ТЕОРЕМА 3. Существуют произведения Бляшке, не принадлежащие ни одному классу $A_\alpha\left(-\frac{3}{4}<\alpha<0\right)$, тейлоровские коэффициенты которых имеют порядок $O\left(n^{\alpha}\right)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для данного $\alpha\left(-\frac{3}{4}<\alpha<0\right)$ выберем возрастающую последовательность положительных действительных чисел $\{z_k\}_1^{\infty}$ таким образом, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-z_k)<+\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty}(1-z_k)^{1+\alpha}=+\infty \tag{9}$$

и рассмотрим соответственное произведение Бляшке

$$B(z,z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z_k-z}{1-z_k z}\frac{|z_k|}{z_k}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n .$$

Имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|B\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n} .$$

Теперь, исходя из известного свойства произведений Бляшке

$$\lim_{r\to 1-0} B\left(re^{i\theta}\right)=1,\ \theta\ne 0(\operatorname{mod} 2\pi),$$

и законности, по теореме Лебега, предельного перехода под знаком интеграла, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2=1 \tag{10}$$

Но, с другой стороны, полагая $z=re^{i\theta}, 0\le\theta\le\pi$ получим

$$\left|B\left(re^{i\theta}\right)\right|^2=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{|1-z_k z|^2-|z_k-z|^2}{|1-z_k z|^2}\right)=$$

$$=\prod_{k=1}^{\infty}\left\{1-\frac{(1-z_k z)(1-z_k\overline{z})-(z_k-z)(z_k-\overline{z})}{|1-z_k z|^2}\right\}=$$

$$=\prod_{k=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1-z_k\overline{z}-z_k z+z_k^2|z|^2-z_k^2+z_k\overline{z}+z_k z-|z|^2}{|1-z_k z|^2}\right\}=$$

$$=\prod_{k=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1+z_k^2r^2-z_k^2-r^2}{\left|1-z_kz\right|^2}\right\}=\prod_{k=1}^{\infty}\left\{1-\frac{\left(1-r^2\right)\left(1-z_k^2\right)}{\left|1-z_kz\right|^2}\right\}>$$

$$>1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(1-r^2\right)\left(1-z_k^2\right)}{\left|1-z_kz\right|^2},$$

откуда

$$1-\left|B\left(re^{i\theta}\right)\right|^2<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(1-r^2\right)\left(1-z_k^2\right)}{\left|1-z_kz\right|^2}\quad.$$

Далее, используя условие (9), а также

$$\left|1-z_kz\right|^2=\left(1-z_kr\cos\theta\right)^2+\left(z_kr\sin\theta\right)^2=\left(1-z_kr\right)^2+2rz_k\left(1-\cos\theta\right)=$$

$$\left(1-z_kr\right)^2+4z_kr\sin^2\frac{\theta}{2}\geq C\left(\left(1-r\right)^2+\theta^2\right),$$

получим

$$1-\left|B\left(re^{i\theta}\right)\right|^2<C\frac{1-r^2}{\left(1-r^2\right)+\theta^2}.$$

Поэтому

$$\int_0^{2\pi}\left(1-\left|B\left(re^{i\theta}\right)\right|^2\right)d\theta=2\int_0^{\pi}\left(1-\left|B\left(re^{i\theta}\right)\right|^2\right)d\theta<$$

$$<2\int_0^{\sqrt{1-r}}d\theta+2C\int_{\sqrt{1-r}}^{\pi}\frac{1-r}{(1-r)^2+\theta^2}d\theta<2\sqrt{1-r}+$$

$$+2C\int_{\sqrt{1-r}}^{\infty}\frac{1-r}{\left(1-r\right)^2+\theta^2}d\theta<2\sqrt{1-r}+2C\left(\frac{\pi}{2}-arctg\frac{1}{\sqrt{1-r}}\right)<C\sqrt{1-r},$$

так как

$$\lim_{r\to1}\frac{\frac{\pi}{2}-arctg\frac{1}{\sqrt{1-r}}}{\sqrt{1-r}}=1.$$

Используя (10), получим

$$2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|^2\left(1-r^{2n}\right)<C\sqrt{1-r}.$$

Следовательно, для любого $\beta\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, имеем

$$\int_0^1\left\{\frac{1}{\left(1-r\right)^{1+\beta}}\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|^2\left(1-r^{2n}\right)\right\}dr<\infty,$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|^2\int_0^1\frac{1-r^n}{\left(1-r\right)^{1+\beta}}dr<\infty,$$

но, интегрируя по частям

$$\int_0^1 \frac{1-r^n}{(1-r)^{1+\beta}}dr = -\frac{1}{\beta} + \frac{n}{\beta}\int_0^1 \frac{r^{n-1}}{(1-r)^{\beta}}dr$$

и используя следующее свойство бетта функций Эйлера

$$\int_0^1 x^n (1-x)^{\alpha-1} dx = B(n+1,\alpha) \sim C\frac{1}{n^{\alpha}},$$

находим

$$\int_0^1 \frac{1-r^n}{(1-r)^{1+\beta}}dr \sim Cn^{\beta},$$

откуда и заключаем

$$|a_n|^2 n^{\beta+1} = o(1),$$

или

$$|a_n| = o\left(\frac{1}{n^{\frac{\beta+1}{2}}}\right) \text{ для любого } \beta \in \left(0,\frac{1}{2}\right),$$

то есть имеем

$$|a_n| = o\left(n^{\alpha}\right),\ n \to \infty,$$

для любого $\alpha \in \left(-\frac{3}{4},0\right)$.

Но с другой стороны, согласно (9) и теоремы B, заключаем

$$B(z) \notin A_{\alpha}\left(-\frac{3}{4} < \alpha < 0\right).$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Из теоремы B следует, что в рассмотренном случае $B \in A \setminus A_{\alpha}$, $-\frac{3}{4} < \alpha < 0$, но имеет место оценка (6). Так что оценка (6) является только необходимым условием для того, чтобы функция класса A принадлежала подклассу A_{α}^{*}, $-\frac{3}{4} < \alpha < 0$.

REFERENCES

[1] R.H. Nevanlinna, *Odnoznachnye analiticheskie funkcii*, M. Gostekhizdat, (1941).
[2] I.I. Privalov, *Granichnye svojstva analiticheskix funkcij*, 2-e izd. M.-L., (1950).
[3] M.M. Djrbashyan, *Integralnye preobrazovaniya i predstavleniya funkcij v kompleksnoj oblasti,* M. Nauka, (1966).
[4] S.S. Stepanyan, “O nailuchshej ochenke Tejlorovskix koefficientak funkcij klassa A_α”, DAN ArmSSR, **75** (3), 107-113 (1982).
[5] I.V. Hovhannisyan, “Ob odnom predstavlenii funkcii klassa N_α $(-1 < \alpha \leq 0)$”, DAN ArmSSR,. **88** (2), 55-60 (1989).

[6] M.M. Djrbashyan, V.S. Zakaryan, “O faktorizacii funkcii $B_{\alpha}(z)$”, Matem. Zametki, **4** (I), 3-10. (1968).
[7] M.M. Djrbashyan, “Ob odnom svojstve funkcij Blashke”, DAN SSSR, **175** (5), 981-984 1967.
[8] I.V. Hovhannisyan, “O nailuchshej ochenke Tejlorovskix koefficientak funkcij klassa *”,* DAN ArmSSR, **115** (4), 261-265 2015.
[9] M.M. Djrbashyan, V.S. Zakaryan, *Klassi I granichnie svojstva funkcij meromorfnix v kruge*, Moskva, Nauka, (1993).

Received December, 5 2015.