НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ НА ДЕКАРТОВЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ОКРУЖНОСТЕЙ

А.Г. АРАКЕЛЯН[*]
[*] Национальный политехнический университет Армении,
Ереван, Армения
e-mail: arman.arakelyan@gmail.com

Ключевые слова: декартова конфигурация, действие групп, инверсия.

Аннотация . Для всевозможных декартовых конфигураций четырех попарно касающихся кругов расматриваются интересные геометриеские действия некоторых элементов группы $Aut(Q_D)$, где $Q_D = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 - \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{4} x_i)^2$ квадратичная форма Декарта.

ON SOME GEOMETRIC ACTIONS ON DESCARTES CONFIGURATION

A.H. ARAKELYAN
[*] National polytechnical university of Armenia,
Yerevan, Armenia
e-mail: arman.arakelyan@gmail.com

Summary. We describe some specific elements of the group $Aut(Q_D)$, where $Q_D = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 - \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{4} x_i)^2$ is Descartes quadratic form, that have a nice geometrically interpretable actions on every Descartes configuration of four mutually tangent ccircles, visualizable in terms of inversions, and whose associated matrices have integer entries.

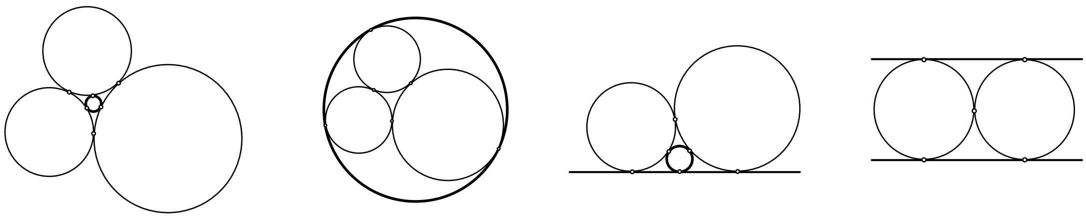
2010 Mathematics Subject Classification: 52C26, 57S25.
Key words and Phrases: Descartes configurations, group action, inversions.

1. ВВЕДЕНИЕ

Согласно теореме Декарта, для любых четырех взаимно касающихся окружностей (рис.1) радиусы окружностей удовлетворяют некоторомы квадратному уравнению, содержание которого, в терминах ориентированных кривизин окружностей, выражается следующей формулой [см. 1]

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_4^2 - \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4)^2 = 0. \qquad (1)$$

Отметим, что если участвующая в конфигурации окружность с радиусом r_i имеет с другими только внешнее касание, то его кривизна β_i принимается равной $1/r_i$, и $-1/r_i$, если она имеет с остальными только внутреннее касание. Примем, также что прямая имеет бесконечный радиус, следовательно, ее кривизна равна нулью.



(а) **(б)** **(в)** **(г)**

Рисунок 1: Декартовые конфигурации четырех взаимно касающихся окружностей

Расматривая вектор кривизин четырех окружностей $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)^{\mathrm{T}}$, уравнение (1) можно переписать в следующей матричной форме:

$$\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{Q}_D \boldsymbol{\beta} = 0,$$

где $\mathbf{Q}_D := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ - матрица *квадратичной формы Декарта*

$$Q_D = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2.$$

Определив следующую матрицу координат:

$$\mathbf{W}_D := \begin{pmatrix} \overline{\beta}_1 & \beta_1 & \beta_1 x_1 & \beta_1 y_1 \\ \overline{\beta}_2 & \beta_2 & \beta_2 x_2 & \beta_2 y_2 \\ \overline{\beta}_3 & \beta_3 & \beta_3 x_3 & \beta_3 y_3 \\ \overline{\beta}_4 & \beta_4 & \beta_4 x_4 & \beta_4 y_4 \end{pmatrix},$$

где (x_i, y_i), $i = \overline{1,4}$ координаты центров окружностей, а $\overline{\beta}_i$- ориентированные кривизны окружностей получаемые при инверсии C_i относительно единичной окружности. теорему Декарта можно смодифицировать так, чтоб она включала в себя не только кривизны, но и расположение окружностей конфигурации (см. [2]).

Теорема. *Для декартовой конфигурации* D *справедливо следующее соотношение*

$$\mathbf{W}_D^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_D\mathbf{W}_D = \mathbf{Q}_W, \tag{2}$$

где $\mathbf{Q}_W = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Верно и обратное утверждение: любое действительное решение $\mathbf{W}$ *уравнения (2) есть матрица координат некой декартовой конигурации.*

Если ввести в расмотрение группу автоморфизмов квадратичной формы Q_D:

$$Aut(Q_D) = \{\mathbf{U} \in GL(4,\mathbb{R}) \mid \mathbf{U}^T\mathbf{Q}_D\mathbf{U} = \mathbf{Q}_D\},$$

то как показано в работе [2], группа $Aut(Q_D)$ действует транзитивно на множеством $\mathbb{M}_D$ всех ориентированных декартовых конфигураций, т.е. геометрическое действие группы $Aut(Q_D)$ слева на произвольную кофигурацию Декарта производит новую ориентированную конфигурацию Декарта, координаты которой смешивают друг с другом координаты различных кругов из оригинальной конфигурации. Однако, действие группы не имеет геометричского смысла на индивидуальные кгруги в конфигуирации.

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ ГРУППЫ $\mathrm{AUT}(\mathbf{Q}_\mathbf{D})$

Рассмотрим некоторые типы элементов $Aut(\mathrm{Q}_D)$, действие которых на конфигурации Декарта имеют интересные геометрические интерпретации. Элементам первого типа соответствуют операции инверсий относительно окружностей определяемых тремя различными точками касания окружностей декартовой конфигурации D. Так как, конфигурация Декарта состоит из четырех попарно касаюшихся окружностей, то возможны четыре таких инверсий. Каждая из инверсий фиксирует начальные три окружности и переводит четвертую окружность на другую единственную окружность, которая также касается с начальными тремя. Эти типы инверсий назовем отражаюшим операторами. Отражаюший оператор преобразовывает одну декартову конфигурацию в другую. Обозначим через $s_1 = s_1[D]$ преобразование Мебиуса, которая является отражаюшим оператором и переводит декартову конфигурацию $D = (C_1, C_2, C_3, C_4)$ в декартову конфигурацию $s_1(D) = (C'_1, C_2, C_3, C_4)$ (рис. 2).

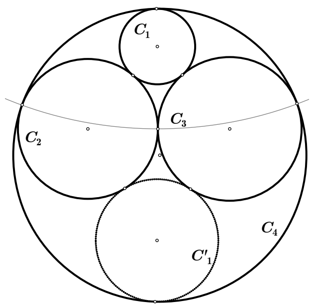


Рисунок 2: Геометрическое действие отражающего оператора s_1.

Ясно, что оператор отражения зависит от конкретной конфигурации Декарта, однако для всех декартовых конфигураций D справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *Отражаюшие операторы* $s_i = s_i[D], i = \overline{1,4}$ *преобразовывают данную декартовую конфигурацию в другую, при этом имеет место следующие соотношения*

$$\mathbf{W}_{s_1(\mathrm{D})} = \mathbf{S}_1 \mathbf{W}_D \,, \tag{3}$$

где $\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{S}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Чтобы доказать (3) достаточно убедиться что $\mathbf{S}_i \in Aut(\mathrm{Q}_D)$, тогда, согласно теореме, $\mathbf{S}_i \mathbf{W}_D = \mathbf{W}_{D'}$. Здесь D' декартова конфигурация, где три окружности и их ориентации наследованы из начальной конфигурации D, а четвертая окружность заменена единственной другой окружностью, которая касается данным трем окружностям и имеет ориентацию однозначно определяеммую заданными тремя окружностями. С другой стороны $s_1(\mathrm{D})$ есть декартова конфигурация соответственно с теми же окружностями и их ориентациами что и в D'.

Элементам $Aut(\mathrm{Q}_D)$ второга типа соответствует операции инверсии относительно одного из окружностей в конфигурации Декарта. Допустим это окружность C_i и обозначим эту инверсию через $s_i^{\perp}$. Ясно, что в результате действия $s_i^{\perp}$, окружность C_i останется неподвижной, в то время как другие три изменятся. Аналогично утверждению 1, можно доказать следующее.

Утверждение 2. *Операторы инверсий* $s_i^{\perp} = s_i^{\perp}[D], i = \overline{1,4}$ *преобразовывают данную декартовую конфигурацию в другую, при этом имеет место следующие соотношения*

$$\mathbf{W}_{s_1^{\perp}(\mathrm{D})} = \mathbf{S}_1^{\perp} \mathbf{W}_D,$$

где $\mathbf{S}_i^{\perp} = \mathbf{S}_i^{\mathrm{T}}$, т.е. $\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{S}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Геометрическое действие оператора $s_1^{\perp}$ показано на рис.3.

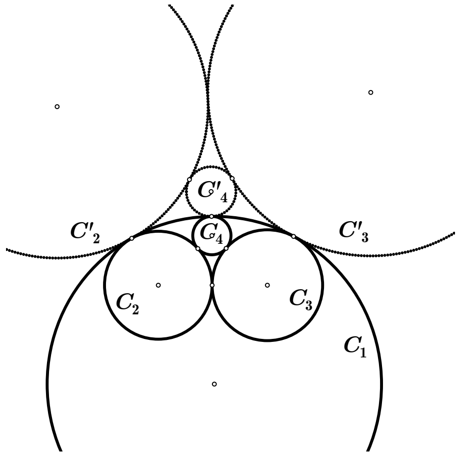


Рисунок 3: Геометрическое действие инверсного оператора $s_1^{\perp}$.

Следующий оператор, который мы назовем *оператором двойственности*, отображает данную декартову конфигурацию D в другую декартову конфигурацию D', где каждая окружность проходят через тройку точек касания окружностей из начальной конфигурации, которые не находятся на одной окружности (Рис. 4). Заметим что полученная конфигурация имеет те же шесть точек касания как и исходная конфигурации, а окружности из конфигурации D' перпендикулярны к окружностям из D в этих точках касания.

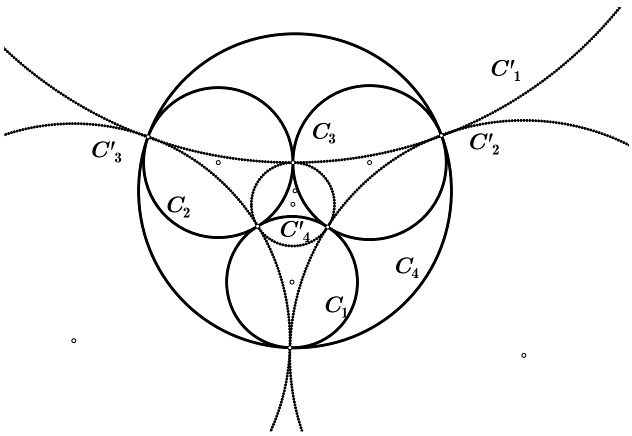


Рисунок 4: Геометрическое действие двойственного оператора

Утверждение 3. *Оператор двойственности* $\delta = \delta[D]$ *преобразовывает данную декартовую конфигурацию в другую, при этом имеет место следующие соотношения*

$$\mathbf{W}_{\delta[D]} = \mathbf{D}\mathbf{W}_D,$$

где $\mathbf{D} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Заметим, что $\mathbf{D} = -\mathbf{Q}_D \in Aut(Q_D)$. Следовательно, для оператора двойственности $\delta = \delta[D]$ существует преобразование Мебиуса переводящее $D \mapsto \delta(D) = D'$.

Путем прямых вычислений можно показать следующие связи между матрицами геометрических операторов действующих на декартовые конфигурации.

Утверждение 4. *Матрицы операторов отражения инверсии и двойственности удовлетворяют следующим соотношениям*

$$\mathbf{S}_i^2 = (\mathbf{S}_i^{\perp})^2 = \mathbf{I}, \quad i = \overline{1,4},$$
$$(\mathbf{S}_i\mathbf{S}_j^{\perp})^2 = (\mathbf{S}_j^{\perp}\mathbf{S}_i)^2 = \mathbf{I}, \quad i \neq j,$$
$$\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_i\mathbf{D} = \mathbf{S}_i^{\perp}, \quad i = \overline{1,4}.$$

REFERENCES

[1] Descartes R. *Oeuvres de Descartes, Correspondance IV* /C, Adam and P. Tannery, Eds.- Paris: Leopold Cerf (1901).
[2] J.C. Lagarias, C.L. Mallows, A.R. Wilks. “Beyond the Descartes Circle Theorem”, *American Mathematical Monthly*, **109** (4), 338-361 (2002).

Received November, 16 2015