КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ТИПА ШТУРМ-ЛИУВИЛЛЯ ПРИ *N* ПОСТОЯННЫХ ЗАПАЗДЫВАНИЙ И АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

БИЛЯНА ВОЈВОДИЧ, МИЛЕНКО ПИКУЛА

Министерство науки и технологий Республики Сербской
Баня Лука, Республика Сербская, Босния и Герцеговина
e-mail: b.vojvodic@mnk.vladars.net,web page: http://www.vladars.net

Ключевые слова: Краевая задача; Характеристическая функция; Асимптотика собственных значений

Аннотация. В настоящей работе мы рассматриваем краевую задачу дифференциального оператора типа Штурма-Лиувилля при *N* постоянных запаздываний. В самом начале, мы создаем решение краевой задачи методом последовательных приближений. Затем определяем характеристическую функцию и дальше исследуем вопрос о существовании и асимптотике собственных значений.

THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE DIFFERENTIAL OPERATORS STURM-LIOUVILLE TYPE WITH *N* CONSTANT DELAYS AND ASYMPTOTICS OF EIGENVALUES

BILJANA VOJVODIC, MILENKO PIKULA

Ministry of Science and Technology Republic of Srpska
Banja Luka, Republic of Srpska, Bosnia and Hercegovina
e-mail: b.vojvodic@mnk.vladars.net,web page: http://www.vladars.net

Abstract. This paper deals with the boundary value problem for the operator Sturm-Liouville type with *N* constant delays. At the beginning we construct the solution of the boundary value problem by the method of successive approximation. Then we determine the characteristic function and consider asymptotic behavior of the eigenvalues.

2010 Mathematics Subject Classification: Primary 34B24; Secondary 34L05, 57E05
Keywords: the boundary value problem; characteristic function; asymptotics of eigenvalues

1 ВВЕДЕНИЕ

Известно, что обратные спектральные задачи для классических операторов Штурма-Лиувилля изучены полностью, в то время как обратные задачи для дифференциальных операторов с запаздыванием изучены недостаточно.

Некоторые из основных методов в теории обратных задач для классических операторов Штурма-Лиувилля, таких как метод спектральных отображений и метод преобразования оператора, не подходят для дифференциальных операторов с запаздыванием.

Основные результаты для классических операторов Штурма-Лиувилля представлены в работах Левитана, Марченко, Фрейлинга, Юрко и других авторов[1-3], а некоторые из результатов для дифференциальных операторов с запаздыванием можно найти в работах Пикулы, Юрко и других авторов[4-8].

Класс операторов с двумя запаздываниями наименее изучен, но некоторые результаты для этого класса операторов представлены в работах [9-13].

2 СОЗДАНИЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим краевую задачу:

$$-y''(x)+\sum_{i=1}^{N}q_i(x)y(x-\tau_i)=\lambda y(x), x\in(0,\pi] \tag{1}$$

$$0<\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_N<\pi, y(x-\tau_N)\equiv 0, x\in[0,\tau_N] \tag{2}$$

$$y(\pi)=0 \tag{3}$$

предполагая, что $q_i\in L_2[0,\pi], i=1,2,\ldots,N$. В начале, методом вариации постоянных нетрудно доказать следующую лемму.

Лемма 1. *Краевая задача (1)-(2) эквивалентна интегральному уравнению*

$$y(x,z)=sinzx+\frac{1}{z}\sum_{i=1}^{N}\int_{\tau_i}^{x}q_i(t)sinz(x-t)y(t-\tau_i,z)dt\,, \lambda=z^2. \tag{4}$$

Введем следующие обозначения:

$$b_{s^2}^{(i)}(x,z)=\int_{\tau_i}^{x}q_i(t)sinz(x-t)sinz(t-\tau_i)dt,$$

$$b_{s^{l+1}}^{(i)}(x,z)=\int_{l\tau_i}^{x}q_i(t)sinz(x-t)b_{s^l}^{(i)}(t-\tau_i,z)dt, l=2,3,\ldots,\left[\frac{\pi}{\tau_i}\right], i=1,2,\ldots N$$

$$b_{s^3}^{(i,j)}(x,z)=\int_{\tau_i+\tau_j}^{x} q_i\,(t) sinz(x-t) b_{s^2}^{(j)}(t-\tau_i,z)dt, i,j=1,2,\dots,N, i\neq j. \tag{5}$$

Обозначим через $S_{i_1+i_2+\dots+i_k}(k^{i_k},(k-1)^{i_{k-1}},\dots 1^{i_1})$ множество всех перестановок с повторением i_k элементов $k, k=1,\dots N$. (Если $i_k=0$ тогда в перестановке $S_{i_1+i_2+\dots+i_k}(k^{i_k},(k-1)^{i_{k-1}},\dots 1^{i_1})$ нет элементов k.) Через $S_{i_1+i_2+\dots+i_k}{}^{(j)}(k^{i_k},(k-1)^{i_{k-1}},\dots 1^{i_1})$ обозначаем подмножество множества $S_{i_1+i_2+\dots+i_k}(k^{i_k},(k-1)^{i_{k-1}},\dots 1^{i_1})$, содержающее перестановки в начале имеющие j. Нам также понадобится ввести следующие обозначения:

$$\boldsymbol{b}_{s^{i_1+\dots+i_N+1}}^{\boldsymbol{P_1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})=\int_{\boldsymbol{i_1\tau_1+\dots i_N\tau_N}}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{q_i\,(t) sinz(x-t) b}_{s^{i_1+\dots+i_N}}^{\boldsymbol{P_2}}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{\tau_i},\boldsymbol{z})\boldsymbol{dt}, \boldsymbol{P_1}=(\boldsymbol{i},\boldsymbol{P_2}) \tag{6}$$

Мы создаем перестановку P_1 в (6) добавлением i в начале перестановки P_2. Считаем также, что для $j=1,\dots N$

$$\boldsymbol{b}_{s^{i_1+\dots+i_N+1}}^{(j)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})=\boldsymbol{b}_{s^{i_1+\dots+i_N+1}}^{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}),\qquad \boldsymbol{P}=(\boldsymbol{N^0},\dots,(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{1})^{\boldsymbol{0}},\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{i_1+\dots+i_N}},(\boldsymbol{j}-\boldsymbol{1})^{\boldsymbol{0}}\dots,\boldsymbol{1^0}).$$

Решение краевой задачи (1) - (2) дает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $q_i\in L_2[0,\pi], i=1,\dots,N$, *и пусть числа* M_i *и* $M_{k-i}^{i_{k-i+1},\dots i_k}$ *определены как*

$$M_i=\left[\frac{\pi}{\tau_i}\right], i=1,2,\dots,N,$$

$$M_{k-i}^{i_{k-i+1},\dots i_k}=\left[\frac{\pi-i_k\tau_k-\sum_{j=1}^{i-1}M_{k-j}^{i_{k-j+1},\dots,i_k}\tau_{k-j}}{\tau_{k-i}}\right], k=2,\dots N, i=1,2,\dots,k-1, i_k=1,\dots,M_k, \tag{7}$$

Пусть далее $\sigma=max_{\substack{k=2,\dots,N\\ i_k=1,\dots,M_k}}\left\{M_1\tau_{1,}i_k\tau_k+\sum_{j=1}^{k-1}M_{k-j}^{i_{k-j+1},\dots,i_k}\tau_{k-j}\right\}$. *Тогда решение краевой задачи (1)-(2) на* $(\sigma,\pi]$ *имеет вид*

$$y(x,z)=sinzx+\sum_{k=1}^{M_1}\frac{1}{z^k}b_{s^{k+1}}^{(1)}(x,z)+$$

$$\sum_{k=2}^{N}\sum_{i_k=1}^{M_k}\sum_{i_{k-1}=0}^{M_{k-1}^{i_k}}\sum_{i_{k-2}=0}^{M_{k-2}^{i_{k-1},i_k}}\dots\sum_{i_2=0}^{M_2^{i_3,\dots,i_k}}\sum_{i_1=0}^{M_1^{i_2,\dots,i_k}}\frac{1}{z^{i_1+\dots+i_k}}\sum_{P\in S_{i_1+\dots+i_k}(k^{i_k},(k-1)^{i_{k-1}},\dots,1^{i_1})}b_{s^{i_1+\dots+i_k+1}}^{P}(x,z) \tag{8}$$

Доказательство. Мы определяем решение интегрального уравнения (4) методом последовательных приближений. Поэтому определяем следующую рекуррентную формулу:

$$y_{(N^{i_N},(N-1)^{i_{N-1}},\dots,1^{i_1})}(x,z) =$$

$$\frac{1}{z}\sum_{l=1}^{N}\int_{i_1\tau_1+\cdots+i_N\tau_N}^{x} q_l\,(t) sinz(x-t) y_{\left(N^{i_N},\dots,(l+1)^{i_{l+1}},l^{i_l-1},(l-1)^{i_{l-1}}\dots,1^{i_1}\right)}(t-\tau_l,z)dt \tag{9}$$

$$x > i_1\tau_1 + i_2\tau_2 + \cdots + i_N\tau_N,$$

$$y_{(N^{i_N},(N-1)^{i_{N-1}},\dots,1^{i_1})}(x,z) = 0 \text{ } для\ x\ \le i_1\tau_1 + i_2\tau_2 + \cdots + i_N\tau_N,$$

$$y_{(N^0,(N-1)^0,\dots,1^0)}(x,z) = sinzx, i_k = 0,1,\dots M_k, k = 1,2,\dots,N,$$

$$y_{\left(N^{i_N},\dots,(l+1)^{i_{l+1}},l^{i_l-1},(l-1)^{i_{l-1}}\dots,1^{i_1}\right)}(x,z) = 0 \text{ } для\ \ i_l = 0, l = 1,2,\dots,N.$$

Дальше будем писать значения функций (9) только для $x > i_1\tau_1 + i_2\tau_2 + \cdots + i_N\tau_N$, предполагая, что их значения равны нулю для $x \le i_1\tau_1 + i_2\tau_2 + \cdots + i_N\tau_N$.

Из (9) следует, что для каждой линейной комбинации запаздываний $i_1\tau_1 + i_2\tau_2 + \cdots + i_N\tau_N$ есть одна функция $y_{(N^{i_N},(N-1)^{i_{N-1}},\dots,1^{i_1})}(x,z)$, определяемая рекуррентной формулой. Более конкретно, мы получаем из (9), что решение интегрального уравнения (4), в любом интервале принадлежащем $(0,\pi]$, определяет функции $y_{(N^{i_N},(N-1)^{i_{N-1}},\dots,1^{i_1})}(x,z)$, в которых $i_1\tau_1 + i_2\tau_2 + \cdots + i_N\tau_N$ меньше или равно верхнему пределу интервала. Поэтому нам нужно определить линейные комбинации запаздываний, которые являются самыми близкими к π.

Учитывая (7), получаем, что $i_k\tau_k + M_{k-1}^{i_k}\tau_{k-1} + \cdots + M_1^{i_2,\dots i_k}\tau_1$ для $k = 2,\dots,N,$ есть линейная комбинация запаздывания вида $i_k\tau_k + i_{k-1}\tau_{k-1} + \cdots + i_2\tau_2 + i_1\tau_1$, которая является самой близкой к π, и потому, что $\sigma = max_{\substack{k=2,\dots,N \\ i_k=1,\dots,M_k}} \left\{M_1\tau_{1,} i_k\tau_k + \sum_{j=1}^{k-1} M_{k-j}^{i_{k-j+1},\dots,i_k}\tau_{k-j}\right\}$ получаем, что между σ и π не будет других линейных комбинаций запаздываний. Поэтому решение в интервале $(\sigma,\pi]$ будет равным сумме функций $y_{(N^0,\dots,(k+1)^0,k^{i_k},(k-1)^{i_{k-1}},\dots,1^{i_1})}(x,z)$, которые определены запаздываниями: $i_k\tau_k + i_{k-1}\tau_{k-1} + \cdots + i_2\tau_2 + i_1\tau_1,\ k = 1,\dots N, i_k = 0,1,\dots,M_k, i_l = 0,1,\dots,M_l^{i_{l+1},\dots,i_k}$ для $l = 1,\dots k-1$.

Отсюда получаем, что решение интегрального уравнения (4) в интервале $(\sigma,\pi]$ имеет вид

$$y(x,z) = sinzx + \sum_{k=1}^{M_1} y_{(N^0,\dots,2^0,1^k)}(x,z) + \sum_{k=2}^{N}\sum_{i_k=1}^{M_k}\sum_{i_{k-1}=0}^{M_{k-1}^{i_k}} \dots \sum_{i_2=0}^{M_2^{i_3,\dots,i_k}}\sum_{i_1=0}^{M_1^{i_2,\dots,i_k}} y_{(N^0,\dots,(k+1)^0,k^{i_k},\dots,1^{i_1})}(x,z) \quad (10)$$

Теперь определим функции $y_{(N^{i_N},(N-1)^{i_{N-1}},\dots,1^{i_1})}(x,z)$ из формулы (9).

1. Для $i_N = i_{N-1} = \dots = i_2 = 0, i_1 = 1$ из (9) имеем

$$y_{(N^0,\dots,2^0,1^1)}(x,z) = \frac{1}{z}\int_{\tau_1}^{x} q_1(t) sinz(x-t) y_{(N^0,\dots,2^0,1^0)}(t-\tau_1,z)dt =$$

$$\frac{1}{z}\int_{\tau_1}^{x} q_1(t) sinz(x-t) sinz(t-\tau_1)dt = \frac{1}{z} b_{s^2}^{(1)}(x,z), \quad x > \tau_1.$$

Для $i_1 = 2$ имеем

$$y_{(N^0,\dots,2^0,1^2)}(x,z) = \frac{1}{z}\int_{2\tau_1}^{x} q_1(t) sinz(x-t) y_{(N^0,\dots,2^0,1^1)}(t-\tau_1,z)dt =$$

$$\frac{1}{z}\int_{2\tau_1}^{x} q_1(t) sinz(x-t) \frac{1}{z} b_{s^2}^{(1)}(t-\tau_1)dt = \frac{1}{z^2} b_{s^3}^{(1)}(x,z), \quad x > 2\tau_1.$$

Нетрудно показать, что функции $y_{(N^0,\dots,2^0,1^k)}(x,z)$ имеют вид

$$y_{(N^0,\dots,2^0,1^k)}(x,z) = \frac{1}{z^k} b_{s^{k+1}}^{(1)}(x,z), x > k\tau_2, k = 1,2,\dots M_1. \quad (11)$$

2. Для $i_N = i_{N-1} = \dots = i_3 = 0, i_2 = 1, \; i_1 = 0$ имеем

$$y_{(N^0,\dots,2^1,1^0)}(x,z) = \frac{1}{z}\int_{\tau_2}^{x} q_2(t) sinz(x-t) y_{(N^0,\dots,2^0,1^0)}(t-\tau_2,z)dt =$$

$$\frac{1}{z}\int_{\tau_2}^{x} q_2(t) sinz(x-t) sinz(t-\tau_1)dt = \frac{1}{z} b_{s^2}^{(2)}(x,z), x > \tau_2$$

и для $i_2 = 1, i_1 = 1$ получаем

$$y_{(N^0,\dots,2^1,1^1)}(x,z) = \frac{1}{z}\int_{\tau_1+\tau_1}^{x} q_1(t) sinz(x-t) y_{(N^0,\dots,2^1,1^0)}(t-\tau_1,z)dt +$$

$$\frac{1}{z}\int_{\tau_1+\tau_1}^{x} q_2(t) sinz(x-t) y_{(N^0,\dots,2^0,1^1)}(t-\tau_2,z)dt =$$

$$\frac{1}{z}\int_{\tau_1+\tau_2}^{x} q_1\,(t_1) sinz(x-t_1)\frac{1}{z}b_{s^2}^{(2)}(t_1-\tau_1,z)dt_1 +$$

$$\frac{1}{z}\int_{\tau_1+\tau_2}^{x} q_2\,(t_1) sinz(x-t_1)\frac{1}{z}b_{s^2}^{(1)}(t_1-\tau_2,z)dt_1 =$$

$$\frac{1}{z^2}b_{s^3}^{(1,2)}(x,z)+\frac{1}{z^2}b_{s^3}^{(2,1)}(x,z) = \frac{1}{z^2}\sum_{P\in S_2(2,1)} b_{s^3}^{P}(x,z)\,, x>\tau_1+\tau_2.$$

Таким образом, для $x>\tau_2+2\tau_1\ (i_2=1, i_1=2)$ получаем

$$y_{(N^0,\dots,2^1,1^2)}(x,z)=\frac{1}{z}\int_{\tau_2+2\tau_1}^{x} q_1\,(t) sinz(x-t) y_{(N^0,\dots,2^1,1^1)}(t-\tau_1,z)dt +$$

$$\frac{1}{z}\int_{\tau_2+2\tau_1}^{x} q_2\,(t) sinz(x-t) y_{(N^0,\dots,2^0,1^2)}(t-\tau_2,z)dt =$$

$$\frac{1}{z}\int_{\tau_2+2\tau_1}^{x} q_1\,(t) sinz(x-t)\left(\frac{1}{z^2}b_{s^3}^{(1,2)}(t_1-\tau_1,z)+\frac{1}{z^2}b_{s^3}^{(2,1)}(t_1-\tau_1,z)\right)dt_1 +$$

$$\frac{1}{z}\int_{\tau_2+2\tau_1}^{x} q_2\,(t_1) sinz(x-t_1)\frac{1}{z^2}b_{s^3}^{(1)}(t_1-\tau_2,z)dt_1 =$$

$$\frac{1}{z^3}\left(b_{s^4}^{(1,2,1)}(x,z)+b_{s^4}^{(1,1,2)}(x,z)+b_{s^4}^{(2,1,1)}(x,z)\right)=\frac{1}{z^3}\sum_{P\in S_3(2^1,1^2)} b_{s^4}^{P}(x,z).$$

Теперь, по математической индукции нетрудно показать, что функции $y_{(N^0,\dots,2^1,1^k)}(x,z)$ имеют вид:

$$y_{(N^0,\dots,2^1,1^k)}(x,z)=\frac{1}{z^{k+1}}\sum_{P\in S_{k+1}(2^1,1^k)} b_{s^{k+2}}^{P}(x,z)\,, x>\tau_2+k\tau_1, k=1,2,\dots M_1^1. \quad (12)$$

Также

$$y_{(N^0,\dots,2^2,1^0)}(x,z)=\frac{1}{z}\int_{2\tau_2}^{x} q_2\,(t) sinz(x-t) y_{(N^0,\dots,2^1,1^0)}(t-\tau_2,z)dt =$$

$$\frac{1}{z}\int_{2\tau_2}^{x} q_2\,(t_1) sinz(x-t_1)\frac{1}{z}b_{s^2}^{(2)}(t_1-\tau_1,z)dt_1 = \frac{1}{z^2}b_{s^3}^{(2)}(x,z), x>2\tau_2,$$

и нетрудно по индукции показать, что

$$y_{(N^0,\dots,2^2,1^k)}(x,z)=\frac{1}{z^{k+2}}\sum_{P\in S_{k+2}(2^2,1^k)} b_{s^{k+3}}^{P}(x,z)\,, x>2\tau_2+k\tau_1, k=1,\dots M_1^2. \quad (13)$$

3. Дальше для $k = 1,2, \dots M_2$ из (9) получаем

$$y_{(N^0,\dots,2^k,1^0)}(x,z) = \frac{1}{z}\int_{k\tau_2}^{x} q_2\,(t) sinz(x-t) y_{(N^0,\dots,2^{k-1},1^0)}(t-\tau_2,z)dt =$$

$$\frac{1}{z}\int_{k\tau_2}^{x} q_2\,(t_1) sinz(x-t_1)\frac{1}{z^{k-1}} b_{s^k}^{(2)}(t_1-\tau_1,z)dt_1 = \frac{1}{z^k} b_{s^{k+1}}^{(2)}(x,z), x > k\tau_2,$$

и учитывая (12)-(13), по индукциии мы показываем, что для $n = 1,2, \dots M_2$ функции $y_{(N^0,\dots,2^n,1^k)}(x,z),\ \ x > n\tau_2 + k\tau_1$ имеют вид

$$y_{(N^0,\dots,2^n,1^k)}(x,z) = \frac{1}{z^{n+k}} \sum_{P\in S_{n+k}(2^n,1^k)} b_{s^{n+l+1}}^{P}(x,z)\,,\ \ k = 1,2, \dots M_1^n. \tag{14}$$

4. Таким образом доказываем, что для $l = 1,2, \dots M_3,\ n = 1,2, \dots M_2^k, k = 1,2, \dots M_1^{n,l}$, $\quad x > l\tau_3 + n\tau_2 + k\tau_1$ будет

$$y_{(N^0,\dots,3^l,2^n,1^k)}(x,z) = \frac{1}{z^{l+n+k}} \sum_{P\in S_{l+n+k}(3^l,2^n,1^k)} b_{s^{l+n+k+1}}^{P}(x,z)$$

5. Дальше нетрудно по индукции показать, что для $x > n\tau_l, l = 3, \dots N, n = 1,2, \dots M_l$ будет

$$y_{(N^0,\dots,(l+1)^0,l^n,(l-1)^0,\dots,1^0)}(x,z) = \frac{1}{z}\int_{n\tau_l}^{x} q_l\,(t) sinz(x-t) y_{(N^0,\dots,(l+1)^0,l^{n-1},(l-1)^0,\dots,1^0)}(t-\tau_l,z)dt =$$

$$\frac{1}{z}\int_{n\tau_l}^{x} q_l\,(t) sinz(x-t)\frac{1}{z^{n-1}} b_{s^n}^{(l)}(t-\tau_l,z)dt = \frac{1}{z^n} b_{s^{n+1}}^{(l)}(x,z).$$

6. Наконец, мы покажем по индукции, что для всех $i_N = 1,2, \dots M_N, i_{N-1} = 1,2, \dots M_{N-1}^{i_N}, i_{N-2} = 1,2, \dots M_{N-2}^{i_{N-1},i_N}, \dots, i_2 = 1,2, \dots, M_2^{i_3,\dots,i_N}, i_1 = 1,2, \dots, M_1^{i_2,\dots,i_N}$ имеет место равенство

$$y_{(N^{i_N},(N-1)^{i_{N-1}}\dots,2^{i_2},1^{i_1})}(x,z) = \frac{1}{z^{i_1+i_2+\dots+i_N}} \sum_{P\in S_{i_1+i_2+\dots+i_N}(N^{i_N},\dots,2^{i_2},1^{i_1})} b_{s^{i_1+i_2+\dots+i_N+1}}^{P}(x,z) \tag{15}$$

Предположим, что (15) имеет место для всех $i_N \le M_N,\ i_{N-1} \le M_{N-1}^{i_N}, i_{N-2} \le M_{N-2}^{i_{N-1},i_N}, \dots, i_2 \le M_2^{i_3,\dots,i_N}, i_1 \le n < M_1^{i_2,\dots,i_N}$. Тогда

$$y_{(N^{i_N},\dots,2^{i_2},1^{n+1})}(x,z)=\frac{1}{z}\int_{i_N\tau_N+\cdots+(n+1)\tau_1}^{x} q_1(t)sinz(x-t)y_{(N^{i_N},\dots,2^{i_2},1^{n})}(t-\tau_1,z)dt+$$

$$\frac{1}{z}\int_{i_N\tau_N+\cdots+(n+1)\tau_1}^{x} q_2(t)sinz(x-t)y_{(N^{i_N},\dots,2^{i_2-1},1^{n+1})}(t-\tau_2,z)dt+\cdots+$$

$$\frac{1}{z}\int_{i_N\tau_N+\cdots+(n+1)\tau_1}^{x} q_N(t)sinz(x-t)y_{(N^{i_{N-1}},\dots,2^{i_2},1^{n+1})}(t-\tau_N,z)dt=$$

$$\frac{1}{z}\int_{i_N\tau_N+\cdots+(n+1)\tau_1}^{x} q_1(t)sinz(x-t)\frac{1}{z^{n+i_2+\cdots+i_N}}\sum_{P\in S_{n+\cdots+i_N}(N^{i_N},\dots,1^n)} b^P_{s^{n+i_2+\cdots+i_N+1}}(t-\tau_1,z)dt+$$

$$\frac{1}{z}\int_{i_N\tau_N+\cdots+(n+1)\tau_1}^{x} q_2(t)sinz(x-t)\frac{1}{z^{n+\cdots+i_N}}\sum_{P\in S_{n+\cdots+i_N}(N^{i_N},\dots,2^{i_2-1},1^{n+1})} b^P_{s^{n+\cdots+i_N+1}}(t-\tau_2,z)dt$$

$$+\cdots+$$

$$\frac{1}{z}\int_{i_N\tau_N+\cdots+(n+1)\tau_1}^{x} q_N(t)sinz(x-t)\frac{1}{z^{n+\cdots+i_N}}\sum_{P\in S_{n+\cdots+i_N}(N^{i_{N-1}},\dots 2^{i_2},1^{n+1})} b^P_{s^{n+\cdots+i_N+1}}(t-\tau_N,z)dt$$

$$=\frac{1}{z^{n+i_2+\cdots+i_N+1}}\sum_{P\in S^{(1)}_{n+i_2+\cdots+i_N+1}(N^{i_N},\dots,2^{i_2},1^{n+1})} b^P_{s^{n+i_2+\cdots+i_N+2}}+$$

$$\frac{1}{z^{n+i_2+\cdots+i_N+1}}\sum_{P\in S^{(2)}_{n+i_2+\cdots+i_N+1}(N^{i_N},\dots,2^{i_2},1^{n+1})} b^P_{s^{n+i_2+\cdots+i_N+2}}+\cdots+$$

$$\frac{1}{z^{n+i_2+\cdots+i_N+1}}\sum_{P\in S^{(N)}_{n+i_2+\cdots+i_N+1}(N^{i_N},\dots,2^{i_2},1^{n+1})} b^P_{s^{n+i_2+\cdots+i_N+2}}=$$

$$\frac{1}{z^{n+1+i_2+\cdots+i_N}}\sum_{P\in S_{n+1+i_2+\cdots+i_N}(N^{i_N},\dots,2^{i_2},1^{n+1})} b^P_{s^{n+1+i_2+\cdots+i_N+1}}$$

то есть (15) точно для $i_1=n+1$.

7. Включая функции $y_{(N^{i_N},(N-1)^{i_{N-1}}\ldots,2^{i_2},1^{i_1})}$ в (10), мы получим решение краевой проблемы в (σ, π] в виде (8), и теорема доказана. □

3 АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

В этом разделе мы будем изучать асимптотическое поведение собственных значений оператора L, которое будет основой для дальнейшего рассмотрения обратной задачи этого класса операторов. Как известно, собственные значение λ_n оператора L есть квадраты нуль характеристической функции. Включая x = π в (8) и используя условие (3), получим характеристическую функцию оператора L в виде

$$F(z) = sinz\pi + \sum_{k=1}^{M_1} \frac{1}{z^k} b^{(1)}_{s^{k+1}}(\pi, z) +$$

$$\sum_{k=2}^{N} \sum_{i_k=1}^{M_k} \sum_{i_{k-1}=0}^{M_{k-1}^{i_k}} \sum_{i_{k-2}=0}^{M_{k-2}^{i_{k-1},i_k}} \cdots \sum_{i_2=0}^{M_2^{i_3,\ldots,i_k}} \sum_{i_1=0}^{M_1^{i_2,\ldots,i_k}} \frac{1}{z^{i_1+\cdots+i_k}} \sum_{P\in S_{i_1+\cdots+i_k}(k^{i_k},(k-1)^{i_{k-1}},\ldots,1^{i_1})} b^P_{s^{i_1+\cdots+i_k+1}}(\pi, z) \tag{16}$$

Дальше мы будем писать $b(z)$ вместо $b(\pi, z)$. Асимптотическое поведение характеристической функции задано следующей леммой.

Лемма 2. Для $|z| \to \infty$ имеет место асимптотическая формула:

$$F(z) = sinz\pi + \frac{1}{z}\sum_{k=1}^{N} b^{(k)}_{s^2}(z) + \frac{1}{z^2}\left(\sum_{k=1}^{N} b^{(k)}_{s^3}(z) + \sum_{k=2}^{N}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{P\in S_2(k,j)} b^P_{s^3}(z)\right) + O\left(\frac{e^{|\gamma|(\pi-3\tau_1)}}{z^3}\right), \tag{17}$$

где $\gamma = Imz$.

Доказательство. Из (16) получаем

$$F(z) = sinz\pi + \frac{1}{z}\sum_{i=1}^{N} b^{(i)}_{s^2}(z) + \frac{1}{z^2}\left(\sum_{i=1}^{N} b^{(i)}_{s^3}(z) + \sum_{k=2}^{N}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{P\in S_2(k,j)} b^P_{s^3}(z)\right) +$$

$$\frac{1}{z^3}\left(\sum_{i=1}^{N} b^{(i)}_{4}(z) + \sum_{k=2}^{N}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{P\in S_3(k,j^2)} b^P_{s^4}(z) + \sum_{k=3}^{N}\sum_{j=2}^{k-1}\sum_{i=1}^{j-1}\sum_{P\in S_3(k,j,i)} b^P_{s^4}(z)\right) +$$

$$\sum_{k=2}^{N}\sum_{i_k=1}^{M_k}\sum_{i_{k-1}=0}^{M_{k-1}^{i_k}}\sum_{i_{k-2}=0}^{M_{k-2}^{i_{k-1},i_k}}\cdots\sum_{i_2=0}^{M_2^{i_3,\dots,i_k}}\sum_{\substack{i_1=0\\ i_1+\cdots+i_k\geq 4}}^{M_1^{i_2,\dots,i_k}}\frac{1}{z^{i_1+\cdots+i_k}}\sum_{P\in S_{i_1+\cdots+i_k}(k^{i_k},(k-1)^{i_{k-1}},\dots,1^{i_1})}b^{P}_{s^{i_1+\cdots+i_k+1}}(z) \tag{18}$$

Используя (10) и (15), из (18) получаем $F(z)$ в виде

$$F(z)=sinz\pi+\sum_{k=1}^{N}y_{(N^0,\dots(k+1)^0,k^1,(k-1)^0,\dots,1^0)}(\pi,z)+\sum_{k=1}^{N}y_{(N^0,\dots(k+1)^0,k^2,(k-1)^0,\dots,1^0)}(\pi,z)+$$
$$\sum_{k=2}^{N}\sum_{j=1}^{k-1}y_{(N^0,\dots,k^1,\dots,j^1,\dots,1^0)}(\pi,z)+\sum_{k=1}^{N}y_{(N^0,\dots(k+1)^0,k^3,(k-1)^0,\dots,1^0)}(\pi,z)+$$
$$\sum_{k=2}^{N}\sum_{j=1}^{k-1}y_{(N^0,\dots,k^1,\dots,j^2,\dots,1^0)}(\pi,z)+\sum_{k=3}^{N}\sum_{j=2}^{k-1}\sum_{i=1}^{j-1}\sum_{P\in S_3(k,j,i)}y_{(N^0,\dots,k^1,\dots,j^1,\dots,i^1,\dots,1^0)}(\pi,z)+$$
$$\sum_{k=2}^{N}\sum_{i_k=1}^{M_k}\sum_{i_{k-1}=0}^{M_{k-1}^{i_k}}\sum_{i_{k-2}=0}^{M_{k-2}^{i_{k-1},i_k}}\cdots\sum_{i_2=0}^{M_2^{i_3,\dots,i_k}}\sum_{\substack{i_1=0\\ i_1+\cdots+i_k\geq 4}}^{M_1^{i_2,\dots,i_k}}y_{(N^0,\dots,(k+1)^0,k^{i_k},(k-1)^{i_{k-1}},\dots,1^{i_1})}(\pi,z) \tag{19}$$

По математической индукции может быть показано, что для функций $y_{(N^{i_N},\dots,1^{i_1})}(x,z)$ для $|z|\to\infty$ имеет место следующая асимптотика:

$$y_{(N^{i_N},\dots,1^{i_1})}(x,z)=O\left(\frac{e^{|\gamma|(x-i_1\tau_1-i_2\tau_2-\cdots i_{N-1}\tau_{N-1}-i_N\tau_N)}}{z^{i_N+i_{N-1}+\cdots+i_2+i_1}}\right),x>i_1\tau_1+i_2\tau_2+\cdots i_{N-1}\tau_{N-1}+i_N\tau_N \tag{20}$$

Так как $\pi-3\tau_1>\pi-i_1\tau_1-i_2\tau_2-\cdots-i_N\tau_N$ при $i_1+i_2+\cdots+i_N=3$, используя (20) получаем, что для $|z|\to\infty$

$$\sum_{k=1}^{N}y_{(N^0,\dots(k+1)^0,k^3,(k-1)^0,\dots,1^0)}(\pi,z)+\sum_{k=2}^{N}\sum_{j=1}^{k-1}y_{(N^0,\dots,k^1,\dots,j^2,\dots,1^0)}(\pi,z)+$$
$$\sum_{k=3}^{N}\sum_{j=2}^{k-1}\sum_{i=1}^{j-1}\sum_{P\in S_3(k,j,i)}y_{(N^0,\dots,k^1,\dots,j^1,\dots,i^1,\dots,1^0)}(\pi,z)+$$
$$\sum_{k=2}^{N}\sum_{i_k=1}^{M_k}\sum_{i_{k-1}=0}^{M_{k-1}^{i_k}}\sum_{i_{k-2}=0}^{M_{k-2}^{i_{k-1},i_k}}\cdots\sum_{i_2=0}^{M_2^{i_3,\dots,i_k}}\sum_{\substack{i_1=0\\ i_1+\cdots+i_k\geq 4}}^{M_1^{i_2,\dots,i_k}}y_{(N^0,\dots,(k+1)^0,k^{i_k},(k-1)^{i_{k-1}},\dots,1^{i_1})}(\pi,z)=O\left(\frac{e^{|\gamma|(\pi-3\tau_1)}}{z^3}\right), \tag{21}$$

что то же самое

$$\frac{1}{z^3}\left(\sum_{i=1}^{N}b_4^{(i)}(z)+\sum_{k=2}^{N}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{P\in S_3(k,j^2)}b^{P}_{s^4}(z)+\sum_{k=3}^{N}\sum_{j=2}^{k-1}\sum_{i=1}^{j-1}\sum_{P\in S_3(k,j,i)}b^{P}_{s^4}(z)\right)+$$

$$\sum_{k=2}^{N}\sum_{i_k=1}^{M_k}\sum_{i_{k-1}=0}^{M_{k-1}^{i_k}}\sum_{i_{k-2}=0}^{M_{k-2}^{i_{k-1},i_k}}\cdots\sum_{i_2=0}^{M_2^{i_3,\dots,i_k}}\sum_{\substack{i_1=0\\ i_1+\cdots+i_k\geq 4}}^{M_1^{i_2,\dots,i_k}}\frac{1}{z^{i_1+\cdots+i_k}}\sum_{P\in S_{i_1+\cdots+i_k}(k^{i_k},\dots,1^{i_1})}b^{P}_{s^{i_1+\cdots+i_k+1}}(z)=O\left(\frac{e^{|\gamma|(\pi-3\tau_1)}}{z^3}\right).$$

Включая (21) в (18), мы получим (17) и лемма доказана. □

Теперь мы определяем так называемую *функцию перехода* $\tilde{q}$

$$\tilde{q}(t)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{k=1}^{i}q_k\left(t+\frac{\tau_i}{2}\right), t\in\left[\frac{\tau_i}{2},\frac{\tau_{i+1}}{2}\right]\cup\left[\pi-\frac{\tau_{i+1}}{2},\pi-\frac{\tau_i}{2}\right], i=1,2,\dots N-1\\ \sum_{i=1}^{N}q_i\left(t+\frac{\tau_i}{2}\right), t_1\in\left[\frac{\tau_N}{2},\pi-\frac{\tau_N}{2}\right)\\ 0, t\in\left[0,\frac{\tau_1}{2}\right)\cup\left(\pi-\frac{\tau_1}{2},\pi\right]\end{cases} \tag{22}$$

и вводим обозначения

$$J_1^i=\int_{\tau_i}^{\pi}q_i\,(t_1)dt_1;\ J_2^{ij}=\int_{2\tau_i}^{\pi}q_i\,(t_1)\int_{\tau_j}^{t_1-\tau_i}q_j\,(t_2)dt_2dt_1, i,j=1,2,\dots N,$$
$$\tilde{a}_c(z)=\int_0^{\pi}\tilde{q}(t_1)cosz(\pi-2\,t_1)dt_1;\ \tilde{a}_s(z)=\int_0^{\pi}\tilde{q}(t_1)sinz(\pi-2\,t_1)dt_1.$$

Представляем характеристическую функцию (17), используя эти обозначения.

Лемма 3. Для $|z|\to\infty$ имеет место асимптотическая формула:

$$F(z)=sinz\pi+\frac{1}{z}\left(\frac{1}{2}\tilde{a}_c(z)-\sum_{i=1}^{N}\frac{J_1^i}{2}cosz(\pi-\tau_i)\right)-\frac{1}{z^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{J_2^{ij}}{4}sinz(\pi-\tau_i-\tau_j)-$$
$$\frac{1}{4z^2}a_s^{s^3}(z)+O\left(\frac{e^{|\gamma|(\pi-3\tau_2)}}{z^3}\right) \tag{23}$$

причем $a_s^{s^3}(z)=\int_0^{\pi}K^{s^3}\big(t_1,q_1(t_1),\dots,q_N(t_1)\big)\,sinz(\pi-2t_1)dt_1, K^{s^3}\in L_2[0,\pi]$.

Доказательство. Имеем

$$b_{s^2}^{(i)}(z)=\int_{\tau_i}^{\pi}q_1\,(t_1)sinz(\pi-t_1)sinz(t_1-\tau_i)dt_1=$$
$$\frac{1}{2}\int_{\tau i}^{\pi}q_i\,(t_1)cosz(\pi-2t_1+\tau_i)dt_1-\frac{1}{2}cosz(\pi-\tau_i)\int_{\tau_1}^{\pi}q_i\,(t_1)dt_1$$

т.е.

$$\sum_{i=1}^{N}b_{s^2}^{(i)}(z)=\frac{1}{2}\tilde{a}_c(z)-\sum_{i=1}^{N}\frac{J_1^i}{2}cosz(\pi-\tau_i) \tag{24}$$

Используя метод сдвигов переменных и/или изменение порядка интегрирования в интегралах $b_{s^3}^{(i)}(z), b_{s^3}^{(i,j)}(z), j = 1,..N$, нетрудно показать, что имеют место равенства

$$b_{s^3}^{(i)}(z) = -\frac{J_2^i}{4} sinz(\pi - 2\tau_i) - \frac{1}{4}\int_0^\pi K^i\big(t_1, q_i(t_1)\big) sinz(\pi - 2t_1)dt_1,$$

$$K^i\big(t_1, q_i(t_1)\big) = q_i(t_1 + \tau_i)\int_{\tau_i}^{t_1} q_i(t_2)dt_2 - q_i(t_1)\int_{t_1+\tau_i}^{\pi} q_i(t_2)dt_2 +$$

$$\int_{t_1+\tau_i}^{\pi} q_i(t_2 - t_1)q_i(t_2)dt_2\,, t_1 \in [\tau_1, \pi - \tau_1]$$

$$K^i\big(t_1, q_i(t_1)\big) = 0, t_1 \in [0, \tau_1) \cup (\pi - \tau_1, \pi]$$

и

$$b_{s^3}^{(i,j)}(z) = -\frac{J_2^{ij}}{4} sinz\big(\pi - \tau_i - \tau_j\big) - \frac{1}{4}\int_0^\pi K^{ij}(t_1, q_i(t_1), q_j(t_1)) sinz(\pi - 2t_1)dt_1,$$

$$K^{ij}\big(t_1, q_1(t_1), q_2(t_1)\big) = q_i\left(t_1 + \frac{\tau_i + \tau_j}{2}\right)\int_{\tau_i}^{t_1 - \frac{\tau_i}{2} + \frac{\tau_j}{2}} q_j(t_2)dt_2 -$$

$$q_j\left(t_1 + \frac{\tau_j}{2} - \frac{\tau_i}{2}\right)\int_{t_1 + \frac{\tau_i + \tau_j}{2}}^{\pi} q_i(t_2)\, dt_2 +$$

$$\int_{t_1 + \frac{\tau_i + \tau_j}{2}}^{\pi} q_i(t_2) q_1\left(t_2 - t_1 + \frac{\tau_j}{2} - \frac{\tau_i}{2}\right) dt_2, t_1 \in \left[\frac{\tau_i + \tau_j}{2}, \pi - \frac{\tau_i + \tau_j}{2}\right]$$

$$K^{ij}\left(t_1, q_i(t_1), q_j(t_1)\right) = 0, t_1 \in [0, \frac{\tau_i + \tau_j}{2}) \cup (\pi - \frac{\tau_i + \tau_j}{2}, \pi].$$

Отсюда получаем

$$\sum_{k=1}^{N} b_{s^3}^{(k)}(z) + \sum_{k=2}^{N}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{P \in S_2(k,j)} b_{s^3}^{P}(z) = -\frac{1}{z^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{J_2^{ij}}{4} sinz\big(\pi - \tau_i - \tau_j\big) - \frac{1}{4z^2} a_s^{s^3}(z), \tag{25}$$

где

$$a_s^{s^3}(z) = \int_0^\pi K^{s^3}\big(t_1, q_1(t_1), \dots, q_N(t_1)\big) \, sinz(\pi - 2t_1)dt_1,$$

$$K^{s^3}\big(t_1, q_1(t_1), q_2(t_1)\big) = \sum_{i=1}^{N} K^i\big(t_1, q_i(t_1)\big) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} K^{ij}\left(t_1, q_i(t_1), q_j(t_1)\right), t_1 \in [0, \pi]$$

Включая (24) и (25) в (17), мы получим (23) и лемма доказана. □

Теперь мы докажем лемму о нулях характеристической функции.

Лемма 4. *Характеристическая функция (16) имеет счетное множество нулей, причем для достаточно больших n в круге* $K_n = \left\{z \,\middle|\, |z - n| < \frac{1}{n}\right\}$ *есть точно один нуль.*

Доказательство. На основании утверждения леммы 2, используя (17) нам можно представить характеристическую функцию в виде $F(z) = f(z) + g(z)$, причем

$$f(z) = sin\pi z,$$
$$g(z) = \frac{1}{z}\sum_{k=1}^{N} b_{s^2}^{(k)}(z) + \frac{1}{z^2}\left(\sum_{k=1}^{N} b_{s^3}^{(k)}(z) + \sum_{k=2}^{N}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{P\in S_2(k,j)} b_{s^3}^{P}(z)\right) + O\left(\frac{e^{|\gamma|(\pi-3\tau_1)}}{z^3}\right)$$

Используя (20), получаем что для $|z| \to \infty$ будет

$$g(z) = O\left(\frac{e^{|\gamma|(\pi-\tau_1)}}{z}\right),$$

откуда получаем, что

$$\lim_{z\to\infty}\frac{g(z)}{e^{|\gamma|(\pi-\tau_1)}} = 0.$$

Потому, что

$$\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{e^{|\gamma|(\pi-\tau_1)}} = \infty$$

получаем $|f(z)| > \left|e^{|\gamma|(\pi-\tau_1)}\right| > |g(z)|$ для достаточно больших $|z|, |z| > A$. На основании утверждения теоремы Руше, получаем, что число нулей характеристической функции $F(z)$ совпадает с числом нулей функции $f(z)$ внутри круга $L_n = \left\{z \,\middle|\, |z| < n + \frac{1}{2}\right\}$, для $n > A$. Поэтому мы заключаем, что число нулей характеристической функций в L_n равно $2n + 1$, т.е. характеристическая функция имеет счетное множество нулей в C. Аналогично, используя теорему Руше, получим, что для достаточно больших n, $n > A + 1$ существует ровно один нуль характеристической функции в круге $K_n = \left\{z \,\middle|\, |z - n| < \frac{1}{n}\right\}$. □

Теперь нам можно доказать лемму о нулях характеристической функции.

Лемма 5. *Пусть $\{z_n\}$ последовательность нулей характеристической функций (16), где z_n нуль, который является самым близким к n в стандартной метрике в множестве C. Тогда имеет место следующая асимптотическая формула:*

$$z_n = n + \frac{C_1(n)}{n} + \frac{C_2(n)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)(n \to \infty), \tag{26}$$

где последовательности $C_1(n)$ и $C_2(n)$ при $n \to \infty$ определенны на

$$C_1(n) = \sum_{i=1}^{N}\frac{J_1^i}{2\pi}cosn\tau_i - \frac{\tilde{a}_{2n}}{2\pi}, \tag{27}$$

$$C_2(n) = \left(\sum_{i=1}^{N}(\pi - \tau_i)\ J_1^i sinn\tau_i - \pi\tilde{b}_{2n} + 2\tilde{b}_{2n}^*\right)\frac{C_1(n)}{2\pi} - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{J_2^{ij}}{4\pi}sinn(\tau_i + \tau_j) + \frac{b_{2n}^{s^3}}{4\pi} + o(1) \tag{28}$$

и

$$\tilde{a}_{2n} = \int_0^\pi \tilde{q}(t_1) cos2nt_1 dt_1;\ \tilde{b}_{2n} = \int_0^\pi \tilde{q}(t_1) sin2nt_1 dt_1;\ \tilde{b}^*_{2n} = \int_0^\pi t\tilde{q}(t_1) sin2nt_1 dt_1$$
$$b_{2n}^{s^3} = \int_0^\pi K^{s^3}\big(t_1, q_1(t_1), \dots, q_N(t_1)\big) sin2nt_1 dt_1.$$

Доказательство. Так как $z_n \in K_n$, на основании утверждения леммы 4, имеем

$$z_n = n + \alpha_n \tag{29}$$

и

$$|\alpha_n| < \frac{1}{n} \Rightarrow \alpha_n = o(1). \tag{30}$$

Далее, так как $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$ и $F(z_n) = 0$, из (24) получаем

$$\lim_{n\to\infty}[z_n{}^2 sinz_n\pi + z_n\left(\frac{1}{2}\tilde{a}_c(z_n) - \sum_{i=1}^N \frac{J_1^i}{2} cosz_n(\pi-\tau_1)\right) - \sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N \frac{J_2^{ij}}{4} sinz_n\big(\pi-\tau_i-\tau_j\big) - \frac{1}{4}a_s^{s^3}(z_n) + z_n^2 O\left(\frac{e^{|\gamma|(\pi-3\tau_1)}}{z_n{}^3}\right)] = 0, \gamma_n = Imz_n. \tag{31}$$

Потому, что $|\gamma_n| \le |\alpha_n| < \frac{1}{n}$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} z_n^2 O\left(\frac{e^{|\gamma_n|(\pi-3\tau_1)}}{z_n{}^3}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{|\gamma_n|(\pi-3\tau_1)}}{z_n} O(1) = 0.$$

Далее, из (29) получаем

$$\begin{gathered} sin\pi z_n = (-1)^n sin\pi\alpha_n, \\ cosz_n(\pi-\tau_i) = (-1)^n cosn\tau_i + (-1)^n(\pi-\tau_i)\alpha_n sinn\tau_i, \\ sinz_n(\pi-2\tau_i) = (-1)^{n+1} sin2n\tau_i + (-1)^n(\pi-2\tau_i)\alpha_n cos2n\tau_i, \\ sinz_n\big(\pi-\tau_i-\tau_j\big) = (-1)^{n+1} sinn(\tau_i+\tau_j) + (-1)^n\big(\pi-\tau_i-\tau_j\big)\alpha_n cosn(\tau_i+\tau_j), \\ \tilde{a}_c(z_n) = (-1)^n\tilde{a}_{2n} + (-1)^n\pi\alpha_n\tilde{b}_{2n} - 2(-1)^n\alpha_n\tilde{b}^*_{2n} \\ a_s^{s^3}(z_n) = (-1)^{n+1} b_{2n}^{s^3}. \end{gathered} \tag{32}$$

Включая (32) в (31) получаем

$$\lim_{n\to\infty}[(n+\alpha_n)^2 sin\alpha_n\pi + \frac{(n+\alpha_n)}{2}\big(\tilde{a}_{2n} + \pi\alpha_n\tilde{b}_{2n} - 2\alpha_n\tilde{b}^*_{2n}\big) - \sum_{i=1}^N \frac{(n+\alpha_n)J_1^i}{2}(cosn\tau_i + (\pi-\tau_i)\alpha_n sinn\tau_i) + \sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N \frac{J_2^{ij}}{4}\big(sinn(\tau_i+\tau_j) - \big(\pi-\tau_i-\tau_j\big)\alpha_n cosn(\tau_i+\tau_j)\big) + \frac{b_{2n}^{s^3}}{4}] = 0. \tag{33}$$

Потому, что $|\alpha_n| < \frac{1}{n}$ из (33) получаем

$$\lim_{n\to\infty}[n^2\alpha_n + n\alpha_n p_n - nC_1(n) + q_n] = 0, \tag{34}$$

где введены обозначения

$$p_n = \frac{\tilde{b}_{2n}}{2} - \frac{\tilde{b}^*_{2n}}{\pi} - \sum_{i=1}^{N} \frac{(\pi - \tau_1) J_1^i}{2\pi} sinn\tau_i\,,\ \ C_1(n) = \sum_{i=1}^{N} \frac{J_1^i}{2\pi} cosn\tau_i - \frac{\tilde{a}_{2n}}{2\pi},$$

$$q_n = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{J_2^{ij}}{4\pi} sinn(\tau_i + \tau_j) + \frac{b_{2n}^{s^3}}{4\pi}. \tag{35}$$

Очевидно, что $n\alpha_n p_n = O(1)$ и $q_n = O(1)$, отсюда и из (34) получаем

$$n^2\alpha_n - nC_1(n) = O(1), n \to \infty$$

т.е.

$$n\big(n\alpha_n - C_1(n)\big) = O(1), n \to \infty.$$

Отсюда получаем

$$n\alpha_n - C_1(n) = \frac{C_2(n)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), n \to \infty$$

т.е.

$$\alpha_n = \frac{C_1(n)}{n} + \frac{C_2(n)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{36}$$

Из (36) получаем асимптотику нулей в виде (27), и тоже из (35) получаем

$$C_1(n) = \sum_{i=1}^{N} \frac{J_1^i}{2\pi} cosn\tau_i - \frac{\tilde{a}_{2n}}{2\pi}. \tag{37}$$

Нам еще нужно показать, что $C_2(n)$ имеет вид (28). Включая (36) в (34), получаем

$$\lim_{n\to\infty} [n^2 (\frac{C_1(n)}{n} + \frac{C_2(n)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)) + n(\frac{C_1(n)}{n} + \frac{C_2(n)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)) p_n - nC_1(n) + q_n] = 0.$$

Отсюда

$$C_2(n) + C_1(n) p_n + q_n = o(1), n \to \infty$$

т.е.

$$C_2(n) = -C_1(n) p_n - q_n + o(1), n \to \infty \tag{38}$$

Включая (35) и (37) в (38), получаем, что для $n \to \infty$

$$C_2(n) = \left(\sum_{i=1}^{N} (\pi - \tau_i)\ J_1^i sinn\tau_i - \pi \tilde{b}_{2n} + 2\tilde{b}^*_{2n} \right) \frac{C_1(n)}{2\pi} - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{J_2^{ij}}{4\pi} sinn(\tau_i + \tau_j) + \frac{b_{2n}^{s^3}}{4\pi} + o(1), \tag{39}$$

лемма доказана. □

Теперь нам нетрудно доказать теорему об асимптотическом поведении собственных значений оператора.

Теорема 2. *Пусть* $q_i \in L_2[0,\pi], i = 1,2 \dots, N,$ *тогда собственные значения* λ_n *оператора* L *имеют представление в виде*

$$\lambda_n = n^2 - \frac{\tilde{a}_{2n}}{\pi} + \sum_{i=1}^{N} \frac{J_1^i}{\pi} cosn\tau_i + \frac{C_1(n)}{\pi n}\left(\sum_{i=1}^{N} (\pi - \tau_i)\ J_1^i sinn\tau_i - \pi\tilde{b}_{2n} + 2\tilde{b}_{2n}^*\right) - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{J_2^{ij}}{2n\pi} sinn(\tau_i + \tau_j) + \frac{b_{2n}^{s^3}}{2n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right), n \to \infty. \tag{40}$$

Доказательство. Так как

$$\lambda_n = z_n^2 = n^2 + 2C_1(n) + \frac{2C_2(n)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

получаем (40).

REFERENCES

[1] B.M. Levitan. *Inverse Sturm–LiouvilleProblems.* Nauka, Moscow, (1984).

[2] V.A. Marchenko. “Sturm–Liouville Operators and Applications”, *Operator Theory: Advences and Aplications,* Englishtransl., Birkhäuser, **22**, (1986).

[3] G. Freiling, V.A. Yurko. *Inverse Sturm–Liouville Problems and their Applications*, Nova Science Publishers, NewYork, (2001).

[4] M. Pikula. “Determination of a Sturm–Liouville-type differential operator with delay argument from two spectra”, *Mat.vesnik*, **43** (3-4), 159-171 (1991).

[5] M. Pikula, T. Marjanovic. “The regulation independent of the potential symmmetrical to the center $[\tau, \pi]$ for Sturm-Liouville operator with a constant delay”, *Facta Universitatis, Ser. Math. Infor.* **14**, 21-29, (1999).

[6] M. Pikula, V. Vladicic, O. Markovic. “A solution to the inverse problem for Sturm-Liouville-type equation with a delay”, *Filomat,* **27 (**7), 1237-1245, (2013).

[7] G. Freiling, V. A. Yurko. “Inverse Sturm-Liouville diferential operators with a constant delay”, *Appl. Math. Letters,* **25** (17), 1999-2004 (2012).

[8] Chuan-Fu Yang. “Trace and inverse problem of discontinious Sturm-Liouville operator with retarded argument”*, J. Math. Anal. Appl.,* **395**, 30-41 (2012).

[9] M. Pikula, N. Pavlovic. “Construction of the solution of the boundary value problem with two constant delays and asymptotics of eigenvalues”, *Procedings, Third Mathematical Conference ofthe Republic Srpska,* **1**, 83-91 (2014).

[10] N. Pavlović, M. Pikula, B. Vojvodić. “First regularized trace of the limit assignment of Sturm-Liouville type with two constant delays”, *Filomat,* **29** (1), 51–62 (2015).

[11] B. Vojvodić, M. Pikula, N. Pavlović. “The boundary value problem with one delay and two potentials-Construction of the Solution and Asymptotics of eigenvalues”, *Procedings, Fourth Mathematical Conference of the Republic Srpska,* **1**, 37-58 (2014).

[12] B. Vojvodic, M. Pikula, V. Vladicic. “Determining of the solution of the boundary value problem for the operator Sturm-Liouville type with two constant delays”, *Procedings, Fifth Symposium Mathematics and Application, Faculty of Mathematics, University of Belgrade,* **V** (1), 141-151 (2014).

[13] M. Pikula, B. Vojvodić, N. Pavlović. “Construction of the solution of the boundary value problem with one delay and two potentials and asymptotics of eigenvalues”, *Mathematica Montisnigri,* **XXXII**, 119-139 (2015).

The results were presented at the thirteenth international seminar "Mathematical models &modeling in laser-plasma processes & advanced science technologies" (May 30 - June 6, 2015, Petrovac, Montenegro).

Received September, 15 2015