

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ТРЕХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С УЧЕТОМ ТЕРМИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ

М.А. ТРАПЕЗНИКОВА, Н.Г. ЧУРБАНОВА, А.А. ЛЮПА

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
Москва, Россия
e-mail: mtrapez@yandex.ru

Ключевые слова: Многофазные течения в пористых средах, явные разностные схемы, высокопроизводительные вычисления

Аннотация. Работа посвящена развитию оригинальной математической модели течения слабосжимаемой жидкости в пористой среде, построенной по аналогии с квазигазодинамической системой уравнений. Модель обобщена на случай трехфазной жидкости и дополнена уравнением сохранения энергии, что позволит в дальнейшем использовать ее при моделировании перспективных термических методов нефтедобычи. Вычислительный алгоритм основан на явных конечно-разностных схемах. На примере тестовых задач неизоотермической фильтрации продемонстрирована высокая эффективность распараллеливания при расчетах на гибридном суперкомпьютере.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты № 13-01-12073-офи, 15-01-03654, 15-01-03445).

SIMULATION OF THREE-PHASE FLUID FLOW IN A POROUS MEDIUM WITH ACCOUNT OF THERMAL EFFECTS

M.A. TRAPEZNIKOVA, N.G. CHURBANOVA AND A.A. LYUPA

Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS
Moscow, Russia
e-mail: mtrapez@yandex.ru

Summary. The work deals with the development of the original mathematical model of slightly compressible fluid flow in a porous medium constructed by the analogy with the quasigasdynamic system of equations. The model is generalized to the case of three-phase fluid and completed by the energy conservation equation what allows to use it for the simulation of perspective thermal methods of oil recovery. The computational algorithm is based on explicit finite difference schemes. High parallelization efficiency is demonstrated at the solution of non-isothermal filtration problems on a hybrid supercomputer.

The work is supported by the Russian Foundation for Basic Research (grants No. 13-01-12073-ofi, 15-01-03654, 15-01-03445).

2010 Mathematics Subject Classification: 65C20, 76S05.

Key words and Phrases: Multiphase Flows in Porous Media, Explicit Difference Schemes, High Performance Computing.

1 ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование течений в пористых средах находит широкое применение при конструировании гидросооружений, при решении экологических задач о загрязнении почвы и грунтовых вод, при разработке технологий добычи углеводородов. В наши дни нефтегазовая отрасль сталкивается с глобальными проблемами, такими как истощение месторождений и снижение эффективности добычи традиционными методами. Перспективными являются термические методы повышения нефтеотдачи месторождений: внутрискластовое горение, закачка теплоносителя в пласт и др. Поэтому наряду с высокоточными расчетами многофазных течений жидкости в подземных горизонтах возникает необходимость адекватного моделирования термических эффектов.

Настоящая работа посвящена дальнейшему развитию оригинальной математической модели фильтрации, построенной по аналогии с квазигазодинамической системой уравнений¹. Модель обобщена на случай трехфазного течения (вода-нефть-газ) и учитывает возможные источники тепловыделения. Моделирование крупномасштабных процессов в подземных горизонтах является весьма трудоемким, и его практически невозможно проводить без использования высокопроизводительных вычислительных систем. Поэтому предпочтение отдается алгоритмам явного типа, так как они могут быть эффективно адаптированы к современным суперкомпьютерам с гибридной архитектурой, в том числе содержащим графические ускорители вычислений (GPU).

2 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

В предыдущих работах²⁻³ была предложена оригинальная модель изотермической фильтрации, при выводе которой использовался опыт построения кинетически-согласованных разностных схем (КСРС) и квазигазодинамической (КГД) системы уравнений¹. Целью была разработка вычислительного алгоритма, основанного на явных конечно-разностных схемах с достаточно мягким условием устойчивости, допускающего эффективную адаптацию к современным гибридным суперкомпьютерам. Классическая модель течения сжимаемой жидкости в пористой среде была модифицирована с учетом характерного масштаба осреднения, на котором несущественна микроструктура фильтрующей породы. Таким образом, на задачи фильтрации был распространен принцип минимальных размеров, который справедлив для многих задач механики сплошной среды. Для газовой динамики, например, таким размером является длина свободного пробега молекулы. В задачах фильтрации в качестве минимального характерного масштаба по пространству l может рассматриваться расстояние порядка сотни размеров зерен породы. Также вводится понятие минимального характерного масштаба по времени τ : в газовой динамике это временной интервал между столкновением молекул, а в теории фильтрации этот параметр может быть интерпретирован как время установления внутреннего равновесия в объеме с характерным размером l . При выводе модифицированного уравнения неразрывности наряду с принципом минимальных размеров был применен метод дифференциальных приближений, в результате в уравнении возникли сглаживающий член (регуляризатор) и вторая производная по времени с малыми параметрами. Тип уравнения изменился с параболического на гиперболический, что

позволило повысить устойчивость соответствующей явной разностной схемы³⁻⁴. Далее модель была обобщена на случай течения многофазных жидкостей⁴⁻⁵. Был разработан комплекс параллельных программ для моделирования течений в подземных горизонтах⁶⁻⁸, продемонстрировавший чрезвычайно высокое ускорение вычислений при расчетах на GPU тестовых задач просачивания и нефтедобычи.

Выпишем полученную систему уравнений для случая неизотермической трехфазной фильтрации слабосжимаемых несмешивающихся и невзаимодействующих жидкостей. Индекс α обозначает подвижную фазу: w — вода, o — нефть, g — газ, а индекс r обозначает твёрдую породу (пористый скелет).

$$\varphi \frac{\partial(\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2(\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t^2} + \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = q_\alpha + \operatorname{div} \frac{lc_\alpha}{2} \operatorname{grad}(\rho_\alpha S_\alpha) \quad (1)$$

$$\mathbf{u}_\alpha = -K \frac{k_\alpha}{\mu_\alpha} (\operatorname{grad} P_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{g}) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\varphi \sum_\alpha \rho_\alpha S_\alpha E_\alpha + (1-\varphi) \rho_r E_r \right] + \operatorname{div} \left(\sum_\alpha \rho_\alpha H_\alpha \mathbf{u}_\alpha \right) = \\ = \operatorname{div} \lambda_{\text{eff}} \operatorname{grad} T + \operatorname{div} \frac{lc}{2} \sum_\alpha \rho_\alpha \operatorname{grad} T \end{aligned} \quad (3)$$

$$\rho_g = \rho_{0g} \frac{P_g}{P_{0g}} \frac{T_0}{T}, \quad \rho_\alpha = \rho_{0\alpha} [1 + \beta_\alpha (P_\alpha - P_{0\alpha}) - \eta_\alpha (T - T_0)], \quad \alpha = w, o \quad (4)$$

$$\sum_\alpha S_\alpha = 1 \quad (5)$$

Здесь S_α — насыщенность, P_α — давление, ρ_α — плотность, \mathbf{u}_α — скорость фильтрации, T — температура (одинаковая для всех фаз и твёрдой породы), E_α — внутренняя энергия, H_α — энтальпия, q_α — источник жидкости, φ — пористость породы, K — абсолютная проницаемость, k_α — относительная фазовая проницаемость, μ_α — динамическая вязкость жидкости, \mathbf{g} — ускорение свободного падения, l — минимальный масштаб по пространству, τ — минимальный масштаб по времени, c_α — скорость звука в жидкости, c — усредненная скорость звука, λ_{eff} — эффективный коэффициент теплопроводности, β_α — коэффициент изотермической сжимаемости жидкости, η_α — коэффициент теплового расширения, константы $\rho_{0\alpha}$, $P_{0\alpha}$ и T_0 — характерные значения соответствующих величин. Плотность породы ρ_r считается постоянной.

Система содержит модифицированные уравнения неразрывности (1) и обобщенный закон Дарси (2) для каждой фазы, единое уравнение сохранения энергии (3), модифицированное по аналогии с КГД системой, уравнения состояния (4), а также замыкающее соотношение (5).

Уравнение (3) включает эффективный коэффициент теплопроводности:

$$\lambda_{\text{eff}} = \varphi \sum_\alpha S_\alpha \lambda_\alpha + (1-\varphi) \lambda_r \quad (6)$$

Энтальпия (включая энтальпию твердой породы) вычисляется следующим образом:

$$H_{\alpha} = H_{\alpha 0} + \int_{T_0}^T C_{P\alpha}(T) dT \quad (7)$$

где $C_{P\alpha}$ – теплоемкость вещества при постоянном давлении

Внутренняя энергия имеет вид:

$$E_{\alpha} = H_{\alpha} - \frac{P_{\alpha}}{\rho_{\alpha}}, \quad E_r = H_r \quad (8)$$

Зависимости от температуры коэффициентов теплопроводности $\lambda_{\alpha}(T)$ и теплоемкостей $C_{P\alpha}(T)$ подвижных фаз и твердой породы, а также динамических вязкостей фаз $\mu_{\alpha}(T)$ находятся эмпирически.

Модель включает капиллярные давления как разность фазовых давлений и относительные фазовые проницаемости. Эти зависимости являются сильно нелинейными функциями насыщенности. Для них из-за нерегулярной геометрии пор аналитическое определение невозможно, а существуют различные приближения, согласующиеся с экспериментальными данными. Для описания капиллярных давлений в трехфазном случае в работе выбрана приближенная модель Паркера⁹:

$$P_o - P_w = P_{c_{ow}}(S_w) = \frac{1}{\gamma \delta_{ow}} [(S_{we})^{\frac{N}{1-N}} - 1]^{\frac{1}{N}}$$

$$P_g - P_o = P_{c_{go}}(S_g) = \frac{1}{\gamma \delta_{go}} [(1 - S_{ge})^{\frac{N}{1-N}} - 1]^{\frac{1}{N}} \quad (9)$$

где γ и N – параметры Ван Генухтена из соответствующего приближения Ван Генухтена для капиллярного давления в случае двухфазной системы вода-газ¹⁰, δ_{ow} и δ_{go} – известные коэффициенты поверхностного натяжения жидкостей, а эффективная насыщенность S_{ae} с учетом остаточных насыщенностей фаз S_{ar} определяется следующим образом:

$$S_{ae} = \frac{S_{\alpha} - S_{ar}}{1 - \sum_{\alpha} S_{ar}} \quad (10)$$

Относительные фазовые проницаемости определяются в работе в соответствии с приближением Стоуна¹¹:

$$k_w(S_w) = S_{we}^{\frac{1}{2}} [1 - (1 - S_{we}^{\frac{N}{N-1}})^{\frac{N-1}{N}}]^2,$$

$$k_o(S_w, S_o) = \frac{S_{oe} k_{ow}(S_w) k_{og}(S_o)}{(1 - S_{we})(S_{we} + S_{oe})}, \quad (11)$$

$$k_g(S_g) = S_{ge}^{\frac{1}{2}} [1 - (1 - S_{ge}^{\frac{N}{N-1}})^{\frac{2(N-1)}{N}}]$$

Используется эффективная насыщенность (10) и следующие выражения:

$$k_{ow}(S_w) = (1 - S_{we})^{\frac{1}{2}} \left(1 - S_{we}^{\frac{N}{N-1}} \right)^{\frac{2(N-1)}{N}}, \quad k_{og}(S_o) = S_{oe}^{\frac{1}{2}} \left(1 - \left(1 - S_{oe}^{\frac{N}{N-1}} \right)^{\frac{(N-1)}{N}} \right)^2 \quad (12)$$

Для численной реализации описанной выше модели предлагается алгоритм явного типа. В качестве основных независимых переменных выступают давление воды P_w , водонасыщенность S_w , нефтенасыщенность S_o и температура T , для которых задаются начальные и граничные условия. Задачи решаются в прямоугольных областях на неразнесенных ортогональных расчетных сетках. На каждом j -том шаге по времени вычисляются:

1. давления нефти P_o и газа P_g через давление воды P_w и капиллярные давления (9);
2. плотности фаз ρ_α из уравнений состояния (4);
3. скорости фильтрации фаз на основании закона Дарси (2) независимо по всем измерениям, предварительно определяются относительные фазовые проницаемости (11)-(12) и динамические вязкости фаз по эмпирическим формулам;
4. произведение $(\rho_\alpha S_\alpha)^{j+1}$ для всех фаз на следующем шаге по времени с помощью трехслойной явной разностной схемы, аппроксимирующей уравнения неразрывности (1), при этом используются центральные разности для аппроксимация конвективных членов;
5. коэффициенты теплопроводности и значения теплоемкостей фаз по эмпирическим формулам, эффективный коэффициент теплопроводности (6), а также энтальпия (7);
6. внутренняя энергия, а именно

$$\left[\varphi \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} S_{\alpha} E_{\alpha} + (1 - \varphi) \rho_r E_r \right]^{j+1} \quad (13)$$

на следующем шаге по времени из уравнения (3) явным численным методом;

7. искомые давление воды P_w , водонасыщенность S_w , нефтенасыщенность S_o и температура T на следующем шаге по времени на основании решения локально в каждой расчетной точке системы нелинейных алгебраических уравнений методом Ньютона, уравнения системы получены на основе уравнений состояния (4) и выражения для внутренней энергии (13) с учетом (8) аналогично работам^{4,5,8}, требуется всего несколько итераций метода Ньютона;

После чего выполняются обмены данными при многопроцессорных вычислениях.

3 ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ РАСЧЕТОВ

Все расчеты, представленные в данной работе, выполнены в ИПМ им. М.В. Келдыша на гибридном вычислительном кластере K-100¹². Кластер состоит из 64 узлов, каждый из которых включает 2 шестиядерных процессора (Intel Xeon X5670, 2.93 GHz) и 3 графических ускорителя (NVidia Fermi C2050, 448 cores, 1.15 GHz, 2.5 GB GDDR5). Узлы соединены посредством оригинальной коммуникационной системы «MBC-Экспресс» и внутренней сети Infiniband, скорость передачи данных между узлами до 700 Мбайт/с, латентность порядка 1.2 мкс. Пиковая производительность системы 100 TFLOPS.

Разработанный ранее комплекс параллельных программ для моделирования течений жидкости в подземных горизонтах⁶⁻⁸ дополнен расчетными модулями, реализующими описанный выше алгоритм решения задач неізотермической трехфазной фильтрации. Комплекс написан на языке C++ с использованием библиотек CUDA и MPI.

В основу параллельной реализации положен принцип геометрического параллелизма: расчетная область делится на подобласти в одном, двух или трех направлениях, счет в подобластях происходит одновременно на различных вычислителях (GPU или ядрах CPU), на внутренних границах подобластей происходят обмены данными. Для того чтобы выяснить, как наиболее рационально разделить область и эффективно распределить нагрузку между вычислительными узлами, был разработан и встроен в основной код программы алгоритм автоматического распределения области по процессорам⁸, основанный на априорной информации об общем времени счета задачи.

В качестве примеров тестовых задач рассмотрим задачи просачивания, а именно течения трехфазной жидкости (вода - нефть - воздух) под действием силы тяжести в однородной по пористости и абсолютной проницаемости среде.

В первой задаче (см. рис. 1) исследуется перераспределение фаз в изотермическом случае и в случае, когда задан градиент температуры. Расчетная область – параллелепипед, стенки которого непроницаемы. В начальный момент пористая среда внутри параллелепипеда насыщена водой, нефтью и воздухом равномерно: по всей области $S_w(t_0) = 0.4$, $S_o(t_0) = 0.3$, $S_g(t_0) = 0.3$, давление воды равно атмосферному, температура $T_0 = 273\text{K}$. В неізотермическом случае эта температура поддерживается на нижней границе, в то время как на верхней границе задана температура $T_1 = 400\text{K}$. Источники жидкости отсутствуют.

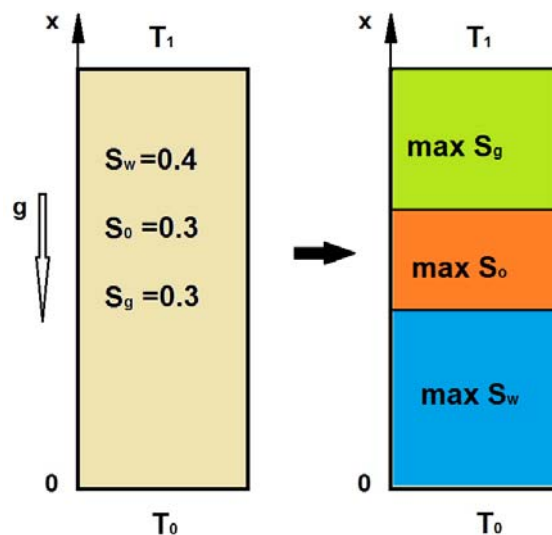


Рис. 1: Задача о перераспределении фаз под действием силы тяжести

В расчетах используются следующие значения параметров:

$$\begin{aligned} \varphi &= 0.4, \quad K = 6.64 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2, \\ \rho_{w0} &= 1000 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_{o0} = 850 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_{g0} = 1.4 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_r = 2000 \text{ кг/м}^3, \\ \beta_w &= 4.4 \cdot 10^{-7} \text{ 1/Па}, \quad \beta_o = 10^{-6} \text{ 1/Па}, \quad \eta_w = 1.32 \cdot 10^{-7} \text{ 1/К}, \quad \eta_o = 9.2 \cdot 10^{-7} \text{ 1/К}, \\ \gamma &= 4.8 \cdot 10^{-4} \text{ 1/Па}, \quad \delta_{ow} = 0.67, \quad \delta_{go} = 2, \quad N = 3.25, \\ l &= 10^{-7} \text{ м}, \quad c_w = 1500 \text{ м/с}, \quad c_o = 1000 \text{ м/с}, \quad c_g = 330 \text{ м/с} \end{aligned}$$

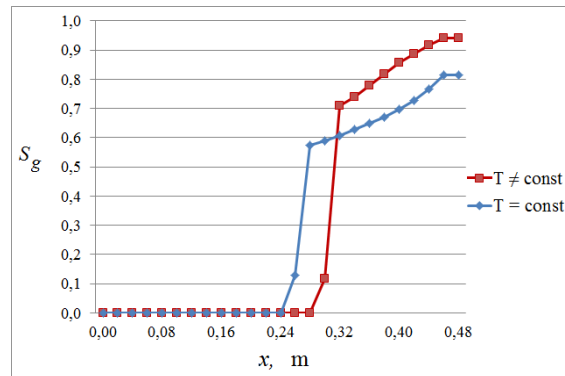


Рис. 2: Насыщенность газовой фазы

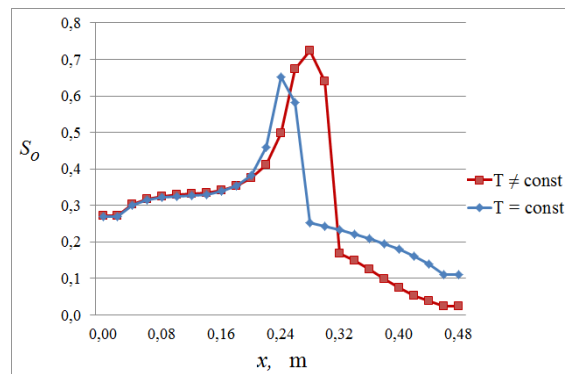


Рис. 3: Насыщенность нефтяной фазы

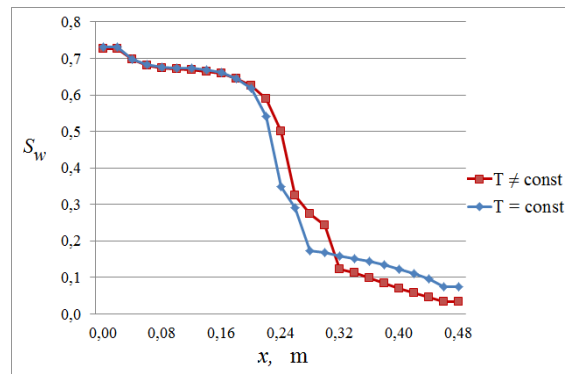


Рис. 4: Насыщенность водной фазы

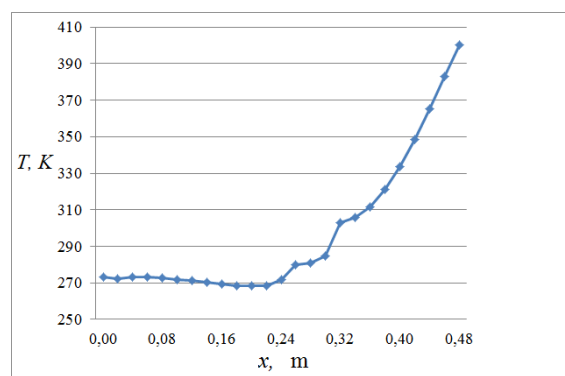


Рис. 5: Температура

На рис. 2-5 представлены результаты расчетов на некоторый момент времени: сравниваются значения насыщенностей каждой из фаз в изотермическом и неизотермическом случаях (рис. 2-4), а также приведено распределение температуры в неизотермическом случае (рис. 5). По оси x отложено расстояние по вертикали от дна резервуара.

Из представленных графиков видно, что под действием силы тяжести газовая фаза занимает почти всю верхнюю часть резервуара, нефтяная - в основном среднюю, а водная - преимущественно нижнюю часть, что физически корректно. Такое распределение вызвано разницей плотностей фаз и заданными зависимостями относительных фазовых проницаемостей от насыщенностей. Наглядно продемонстрировано, что поддержание высокой температуры на верхней границе способствует ускорению процесса просачивания. В неизотермическом случае расслоение жидкостей происходит интенсивнее: в середине резервуара повышается содержание нефтяной фазы (рис. 3), а в верхней части - газовой (рис. 2). При этом в нижней части за счет поддержания температуры, равной температуре среды в изотермическом случае, процесс просачивания отличается слабо.

При решении на многопроцессорной системе данной тестовой задачи наблюдался видимый эффект от применения разработанной процедуры автоматического разбиения расчетной области на подобласти. Для сетки размера $200 \times 200 \times 100 = 4$ миллиона точек было исследовано масштабирование (strong scaling) кода: число ядер центральных процессоров, на которых производились расчеты, изменялось от одного до ста, и для каждого числа задействованных вычислительных устройств область распределялась оптимальным образом, замерялось время расчета 50 слоев по времени. Достигнут практически линейный рост ускорения вычислений (см. рис. 6 (a)), эффективность распараллеливания колеблется около 90 % (см. рис. 6 (b)), то есть является достаточно высокой. Скачки эффективности объясняются именно тем, что использовались различные конфигурации разбиения области в зависимости от числа процессоров. Можно видеть, что рациональный выбор числа процессоров повышает эффективность распараллеливания.

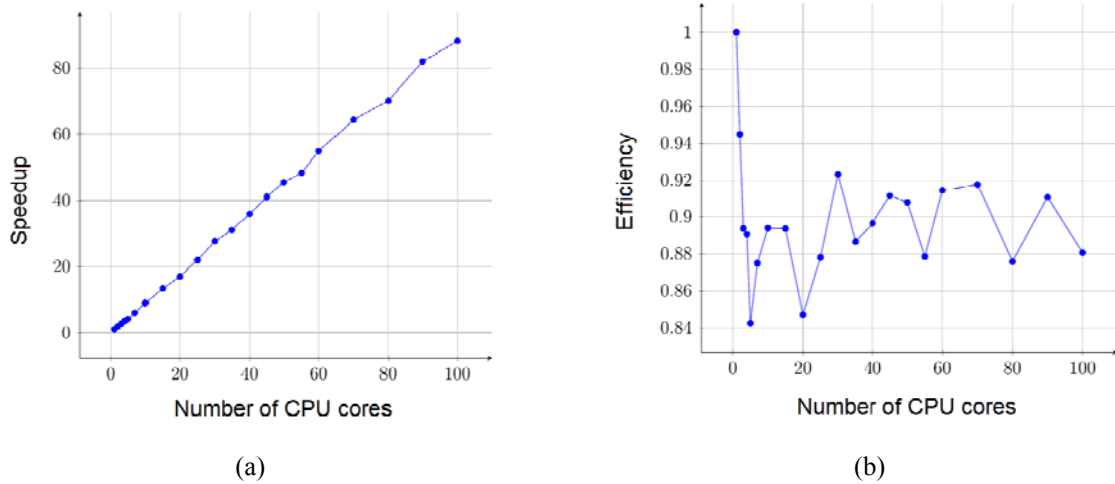


Рис. 6: Ускорение (a) и эффективность распараллеливания (b) для задачи о перераспределении фаз

Во второй задаче исследуется течение в квадратной области с числом расчетных точек $N_x \times N_y$ при наличии источника воды на границе A_1 (см. рис. 7), температура на границе A_1 постоянна.

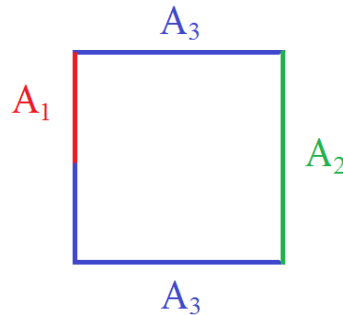


Рис. 7: Постановка задачи просачивания с источником на границе

Начальные условия:

$$T = 285 \text{ K}, \quad P_w = P_{\text{атмосферное}}, \quad S_w = 0.1 \quad (1)$$

$$S_o(x, y) = 0.4 + 0.1 \cdot \sin^2(x \cdot N_x + y \cdot N_y)$$

$$S_g(x, y) = 0.4 + 0.1 \cdot \cos^2(x \cdot N_x + y \cdot N_y)$$

Все границы проницаемы, на границе A_2 задано постоянное значение давления, а граничные условия на A_1 следующие:

$$T = 320 \text{ K}, \quad P_w = 1.1 \cdot P_{\text{атмосферное}}, \quad S_w = 0.6, \quad S_o = 0.15 \quad (1)$$

Результаты расчетов представлены на рис. 8: приведены поля давления, температуры и насыщенности всех фаз на три последовательные момента времени. Видно, что фронты от источника распространяются по области и за ее границы, вода постепенно вытесняет нефть и газ.

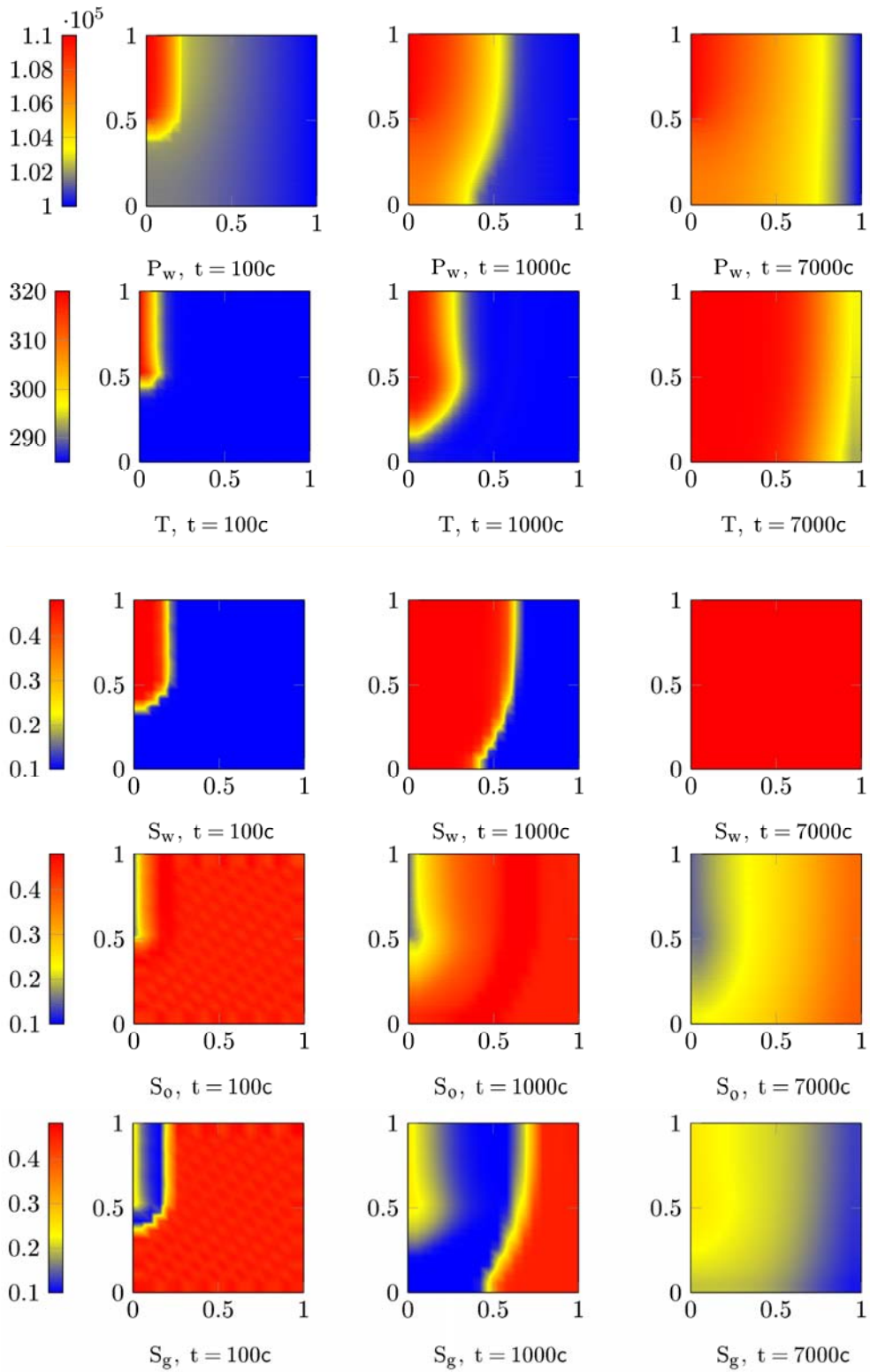


Рис. 7: Эволюция во времени полей давления воды (P_w), температуры (T), водонасыщенности (S_w), нефтенасыщенности (S_o) и насыщенности газовой фазы (S_g)

4 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенный в работе подход к моделированию многофазных течений в пористых средах предполагается использовать для решения крупномасштабных прикладных задач, таких как разработка технологий добычи трудноизвлекаемых запасов углеводородов, в том числе высоковязкой нефти. С этой целью предложенная кинетически-обоснованная модель получит дальнейшее развитие для учета многокомпонентного состава многофазной жидкости.

REFERENCES

- [1] B.N. Chetverushkin, *Kinetic schemes and Quasi-Gas Dynamic system of equations*, CIMNE, Barcelona (2008).
- [2] M.A. Trapeznikova, M.S. Belotserkovskaia and B.N. Chetverushkin, “Analog kineticheski-soglasovannykh skhem dlia modelirovaniia zadachi filtratsii”, *Matematicheskoe modelirovanie*, **14** (10), 69-76 (2002).
- [3] B.N. Chetverushkin, D.N. Morozov, M.A. Trapeznikova, N.G. Churbanova and E.V. Shil’nikov. “An explicit scheme for the solution of the filtration problems”, *Mathematical Models and Computer Simulations*, **2** (6), 669–677 (2010).
- [4] D.N. Morozov, M.A. Trapeznikova, B.N. Chetverushkin and N.G. Churbanova, “Application of explicit schemes for the simulation of the two phase filtration process”, *Mathematical Models and Computer Simulations*, **4** (1), 62–67 (2012).
- [5] B.N. Chetverushkin, N.G. Churbanova, D.N. Morozov and M.A. Trapeznikova, “Kinetic approach to simulation of multiphase porous media flows”, in *CD-Rom Proc. of ECCOMAS CFD 2010 Conf.*, J.C.F. Pereira et al. (Eds.), Instituto Superior Tecnico - IDMEC, Lisbon (2010).
- [6] M. Trapeznikova, B. Chetverushkin, N. Churbanova and D. Morozov, “Two-phase porous media flow simulation on a hybrid cluster”, in *LSSC 2011, Lecture Notes in Computer Science*, **7116**, I. Lirkov, S. Margenov, and J. Wansiewski (Eds.), Springer, Berlin, 646-653 (2012).
- [7] D.N. Morozov, M.A. Trapeznikova, B.N. Chetverushkin and N.G. Churbanova, “Simulation of filtration problems on hybrid computer systems”, *Mathematical Models and Computer Simulations*, **5** (3), 208-212 (2013).
- [8] M.A. Trapeznikova, N.G. Churbanova, A.A. Lyupa and D.N. Morozov, “Simulation of multiphase flows in the subsurface on GPU-based supercomputers”, in *Parallel Computing: Accelerating Computational Science and Engineering, Advances in Parallel Computing*, **25**, M. Bader et al. (Eds.), IOS Press, Amsterdam, 324-333 (2014).
- [9] J.C. Parker, R.J. Lenhard and T. Kuppusami, “A parametric model for constitutive properties governing multiphase flow in porous media”, *Water Resources Research*, **23** (4), 618-624 (1987).
- [10] M.T. Van Genuchten, “A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils”, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, **44**, 892-898 (1980).
- [11] K. Aziz and A. Settari, *Petroleum reservoir simulation*, Applied Science Publ. Lmt., London (1979).
- [12] <http://www.kiam.ru/>

The results were presented at the thirteenth international seminar "Mathematical models & modeling in laser-plasma processes & advanced science technologies" (May 30 - June 6, 2015, Petrovac, Montenegro).