

ПРИБЛИЖЕННАЯ МЕТОДИКА ОЦЕНКИ СОПРОТИВЛЕНИЯ ТРЕНИЯ НА ТЕЛАХ ВРАЩЕНИЯ В ВЯЗКОМ ПОТОКЕ

А.Е. БОНДАРЕВ¹, Е.А. НЕСТЕРЕНКО^{1, 2}

¹ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
Москва, Россия

² Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
Москва, Россия

e-mail: bond@keldysh.ru web page: <http://www.keldysh.ru>

e-mail: nesterenko_ea@bk.ru web page: <http://www.keldysh.ru>

Ключевые слова: вязкие течения, ламинарный и турбулентный режимы, верификация

Аннотация. Рассмотрен метод верификации численных расчетов вязких течений на основе приближенного полуэмпирического подхода. Приближенный подход основан на экспериментальных результатах для течения на пластине и методе эффективной длины. Методика используется для оценки коэффициента сопротивления трения и характерных толщин пограничного слоя в задачах обтекания осесимметричных тел вязким потоком. Описаны практические аспекты реализации метода и приведены результаты расчетов. Описанный подход может быть использован для отладки моделей и вычислительных кодов в случае отсутствия экспериментальных данных.

APPROXIMATE METHOD FOR ESTIMATION OF FRICTION FORCES FOR AXISYMMETRIC BODIES IN VISCOUS FLOWS

A.E. BONDAREV¹, E.A. NESTERENKO^{1, 2}

¹ Keldysh Institute of Applied Mathematics Russian Academy of Sciences
Moscow, Russia

² Bauman Moscow State Technical University
Moscow, Russia

e-mail: bond@keldysh.ru web page: <http://www.keldysh.ru>

e-mail: nesterenko_ea@bk.ru - web page: <http://www.keldysh.ru>

Summary. The paper considers verification method for numerical modelling of bodies in viscous flow. The verification is based on approximate semi-empirical approach. The approach uses experimental data for flat plate and "effective length" method. One can apply approximate approach to estimate friction coefficient and specific thicknesses of boundary layer for axisymmetric objects placed in viscous flow. Practical aspects of approximate approach and numerical results are described. Described approach can be used for verification and improving of numerical models in the case of lack of experimental data.

2010 Mathematics Subject Classification: 76F40, 76F65.

Key words and Phrases: Viscous Flows, Laminar and Turbulent Regimes, Verification

1 ВВЕДЕНИЕ

В задачах численного моделирования обтекания тел потоком вязкого газа особое значение приобретает проблема верификации численных результатов. Это связано в общем и целом с тем, что моделирование вязких течений с использованием уравнений Навье-Стокса приводит к добавлению схемной вязкости к моделируемой физической вязкости исследуемой задачи. Исследователь должен иметь четкое представление о том, какая вязкость в итоге определяет численное решение: моделируемая физическая или добавляемая схемная, являющаяся свойством той или иной применяемой разностной схемы. Если для случая ламинарных течений возможно сравнение с известными решениями для пограничного слоя¹⁻³, то для турбулентных течений задача верификации становится еще более важной, так как применение той или иной модели турбулентности полностью определяет турбулентную вязкость задачи. Турбулентная вязкость на порядки превышает ламинарную и оказывает существенное влияние на итоговые аэродинамические характеристики тела в потоке газа.

Выбор модели турбулентности во многом определяет численное решение. Моделей существует большое количество, и при выборе конкретной модели и ее применении необходимо проведение верификационных процедур. Особенную важность это приобретает при использовании моделей турбулентности, объединяющих в себе свойства модели пристеночного типа и модели слоя смешения.

Наилучшей процедурой верификации является сравнение с натурным физическим экспериментом. Однако проведение подобного сравнения не всегда возможно ввиду отсутствия экспериментальной базы для конкретной исследуемой задачи. Для подобных случаев была разработана приближенная полуэмпирическая методика оценки коэффициента сопротивления трения тела в потоке и характерных толщин пограничного слоя. Под характерными толщинами пограничного слоя имеется в виду, как сама толщина пограничного слоя, так и характерные интегральные толщины: толщина вытеснения и толщина потери импульса.

Приближенная полуэмпирическая методика основана на экспериментальных работах Л.В. Козлова⁴⁻⁶ и теоретических работах В.С. Авдеевского^{7,8}. В работах Козлова описан и обобщен ряд экспериментальных исследований течения в турбулентном пограничном слое на плоской пластине. В этих экспериментах с помощью плавающего датчика проводились одновременные измерения напряжения поверхностного трения и тепловых потоков в турбулентном пограничном слое для различных значений чисел Маха и Рейнольдса и температурного фактора. В результате этих исследований стало возможным обобщение экспериментальных результатов для сопротивления трения и характерных толщин пограничного слоя в виде степенных зависимостей.

В.С. Авдеевский в своих работах^{7,8} ввел понятие эффективной длины. Эффективная длина – это длина плоской пластины, на которой при внешнем течении с такими же параметрами, как и в рассматриваемой точке обтекаемого тела, нарастает такой же пограничный слой с аналогичными свойствами. Введение этого понятия позволило применить степенные зависимости Л.В. Козлова к телам вращения с криволинейной образующей.

Этот подход был модифицирован и широко применялся в начале 1990-х годов для оценки параметров пограничного слоя при моделировании вязкого обтекания тел вращения в практических расчетах. Следует заметить, что в те годы расчеты с

использованием полной системы уравнений Навье-Стокса и введением модели турбулентности были не столь распространены как сейчас. Методика использовалась для организации расчетов следующим образом. Моделирование обтекания тела проводилось невязким потоком с использованием системы уравнений Эйлера. Полученное распределение газодинамических функций на поверхности обтекаемого тела использовалось для оценки коэффициента сопротивления трения по приближенной методике. Далее формировался суммарный коэффициент сопротивления тела. Проводимые таким образом расчеты позволяли достигать погрешности при сравнении с натурным экспериментом не превышающей 3%.

В настоящее время описываемый приближенный подход к оценке сопротивления трения может оказаться также весьма полезным. Так, например, при расчетах обтекания тела вращения вязким потоком на основе использования полной системы уравнений Навье-Стокса для моделирования турбулентных режимов течения перед исследователем встает задача выбора модели турбулентности. А после выбора модели возникает следующая задача – надо провести «тонкую настройку» выбранной модели к исследуемому классу задач. При отсутствии экспериментальных данных приближенная методика, позволяющая по газодинамическим параметрам на границе пограничного слоя, получать оценочное значение коэффициента сопротивления трения, становится эффективным средством верификации.

2 ОПИСАНИЕ ПРИБЛИЖЕННОЙ МЕТОДИКИ

Рассмотрим обтекание осесимметричного тела вязким потоком сжимаемого газа под нулевым углом атаки (Рис.1)

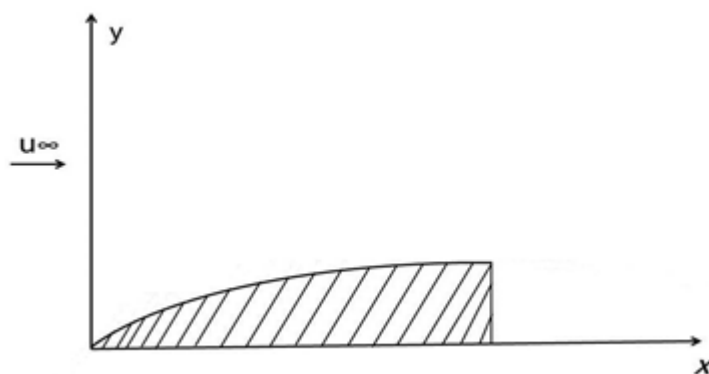


Рис. 1. Обтекание осесимметричного тела.

Суммарный коэффициент трения C_τ можно представить следующим образом²:

$$C_\tau = \frac{W}{\frac{\rho_\infty u_\infty^2}{2} S} = \frac{\int_0^S \tau_w dS \cos \alpha}{\frac{\rho_\infty u_\infty^2}{2} S} = \frac{\int_0^S C_f dS \cos \alpha}{S}.$$

Здесь ρ_∞ и u_∞ - плотность и скорость в набегающем потоке соответственно; S –

характерная площадь (площадь миделя тела или площадь боковой поверхности); W – суммарная сила трения; C_f – местный коэффициент трения; α – угол между осью OX и касательной к поверхности рассматриваемого тела.

Задача ставится, как нахождение в каждой точке осесимметричного тела местного коэффициента трения и дальнейшее нахождение суммарного коэффициента трения путем интегрирования местного коэффициента по всей поверхности тела.

Будем считать пограничный слой на теле турбулентным. Для плоской пластины, помещенной в вязкий поток, обладающий аналогичными свойствами, экспериментальные исследования Козлова¹⁻³ и других авторов позволяют находить местный коэффициент трения с помощью общей аппроксимирующей зависимости:

$$C_f = C_{f0} \left(1 + r \frac{\gamma - 1}{2} M_w^2 \right)^{-0.55},$$

где $r \approx 0.88$; $\gamma = C_p/C_v$ – соотношение удельных теплоемкостей; $M_w = \frac{u_w}{a_w}$ – местное число Маха на теле.

Значение C_{f0} может быть вычислено с помощью целого ряда эмпирических зависимостей, приводимых в работах^{1-3,7,8}. Например,

$$\begin{aligned} C_{f0} &= (2 \lg(\text{Re}_x) - 0.65)^{-2.3}; \\ C_{f0} &= 0.085 \text{Re}_x^{-0.29 + 0.01 \lg \text{Re}_x}; \\ C_{f0} &= 0.059 \text{Re}_x^{-0.2}. \end{aligned}$$

Последняя зависимость дает наиболее приемлемые результаты в рассматриваемом диапазоне чисел Маха $0 \leq M \leq 10$ что подтверждено многочисленными расчетами. Она получила наибольшее распространение при использовании в диапазоне значений числа Рейнольдса от 10^6 до 10^8 . Здесь число $\text{Re}_x = \rho u x / \mu$ – это местное число Рейнольдса, вычисляемое по длине пластины x в каждой точке пластины.

Также при малых скоростях и отсутствии теплового потока в стенку может быть применен следующий подход². Для наиболее интересного с точки зрения моделирования турбулентных течений диапазона чисел Рейнольдса от 10^5 до 10^{10} можно применять различные простые формулы для определения местного коэффициента трения C_{f0} в зависимости от местного числа Рейнольдса:

$$\begin{aligned} 10^5 \leq \text{Re}_x \leq 10^6; & \quad C_{f0} = 0.042 \text{Re}_x^{-0.18}; \\ 10^6 \leq \text{Re}_x \leq 10^7; & \quad C_{f0} = 0.0322 \text{Re}_x^{-0.16}; \\ 10^7 \leq \text{Re}_x \leq 10^8; & \quad C_{f0} = 0.023 \text{Re}_x^{-0.14}; \\ 10^8 \leq \text{Re}_x \leq 10^9; & \quad C_{f0} = 0.016 \text{Re}_x^{-0.12}; \\ 10^9 \leq \text{Re}_x \leq 10^{10}; & \quad C_{f0} = 0.011 \text{Re}_x^{-0.10}. \end{aligned}$$

Применение данного подхода в ряде случаев весьма полезно и позволяет получать более точный результат оценки.

Для того, чтобы применить эти зависимости для нахождения местного коэффициента трения на осесимметричном теле с криволинейной образующей, следует использовать метод эффективной длины, разработанный В.С. Авдеевским^{4,5}, который вкратце можно представить следующим образом.

Рассмотрим применение метода эффективной длины применительно к осесимметричному телу в некоторой точке с декартовой координатой x^* и радиусом R (Рис.2). Здесь l^* - длина дуги образующей от начал тела до рассматриваемой точки.

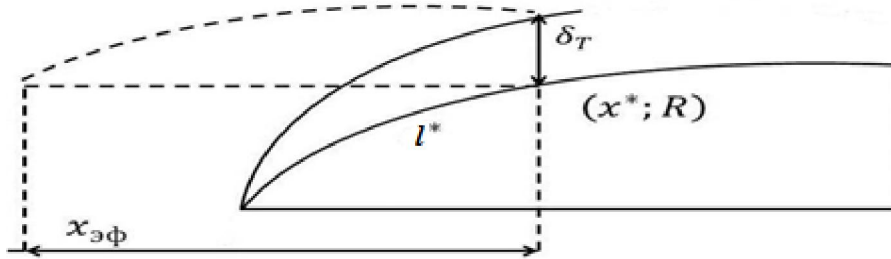


Рис.2. Применение метода эффективной длины.

Считаем, что в точке (x^*, R) на теле сформировался тепловой пограничный слой толщиной δ_T . Эффективной длиной $x_{эф}$ называют длину плоской пластины на которой при внешнем течении с такими же параметрами как в рассматриваемой точке тела нарастает такой же пограничный слой как и на длине l^* рассматриваемого тела. Для осесимметричного случая $x_{эф}$ будет длиной некоего цилиндра с радиусом равным радиусу R .

Согласно^{7,8} для турбулентного случая эффективную длину в точке тела можно определить с помощью соотношения

$$x_{эф} = \frac{\int_0^{l^*} \rho_w u_w R^{1.25} dl}{\rho_w u_w R^{1.25}}.$$

Здесь ρ_w, u_w – значения плотности и скорости на внешней границе пограничного слоя. Теперь можно использовать вышеприведенные формулы для вычисления местного коэффициента трения, если во входящее в них число Рейнольдса вместо длины пластины x подставить вычисленную эффективную длину $x_{эф}$, вычисляя таким образом эффективное число Рейнольдса

$$Re_{эф} = \frac{\rho_w u_w x_{эф}}{\mu_w}.$$

Здесь μ_w – значение коэффициента вязкости на теле, которое вычисляется, например, с помощью формулы Сазерленда или ее упрощенного представления:

$$\frac{\mu_w}{\mu_\infty} = \left(\frac{T_w}{T_\infty} \right)^{0.7}.$$

Для ламинарного случая процедура оценки проводится по аналогичной схеме с изменением ряда соотношений.

$$C_f = C_{f0} \left(1 + 0.72r \frac{\gamma - 1}{2} M_w^2 \right)^{-0.15};$$

$$C_{f0} = 0.646 Re_x^{-0.5}.$$

Кроме оценки коэффициента сопротивления трения на теле в рамках приближенного полуэмпирического подхода, представленного выше, можно определять в каждой конкретно взятой точке на образующей тела характерные параметры пограничного слоя, такие как толщина пограничного слоя δ и интегральные толщины пограничного слоя: толщина вытеснения δ^* и толщина потери импульса δ^{**} .

Толщина вытеснения δ^* является мерой уменьшения расхода через сечение вследствие уменьшения скорости потока в пограничном слое. Толщина потери импульса δ^{**} характеризует уменьшение импульса в сечении за счет торможения потока в пограничном слое.

Схема вычисления характерных толщин пограничного слоя в точке на теле для случая турбулентного пограничного слоя выглядит следующим образом: для каждой точки тела вычисляется эффективная длина $x_{эф}$. Далее по расчетным значениям определяется эффективное число Рейнольдса $Re_{эф}$. Далее определяются следующие величины для несжимаемого случая:

$$\begin{aligned}\delta_n &= 0.37 Re_{эф}^{-0.2} x_{эф}; \\ \delta_n^* &= 0.125 \delta_n; \\ \delta_n^{**} &= 0.097 \delta_n.\end{aligned}$$

После их определения вычисляются характерные толщины для турбулентного сжимаемого пограничного слоя с помощью следующих соотношений¹⁻³.

$$\begin{aligned}\delta_{сж} &= \delta_n \left(1 + 0.72r \frac{\gamma - 1}{2} M_w^2 \right)^{0.34}; \\ \delta_{сж}^* &= \delta_n^* \left(1 + 0.72r \frac{\gamma - 1}{2} M_w^2 \right)^{0.34}; \\ \delta_{сж}^{**} &= \delta_n^{**} \left(1 + 0.72r \frac{\gamma - 1}{2} M_w^2 \right)^{-0.66}.\end{aligned}$$

Для случая ламинарного течения используется аналогичный подход с заменой соответствующих соотношений. Для ламинарного пограничного слоя величины для несжимаемого случая δ_n , δ_n^* , δ_n^{**} определяются с помощью соотношений

$$\begin{aligned}\delta_n &= 4.64 Re_{эф}^{-0.5} x_{эф}; \\ \delta_n^* &= 0.376 \delta_{нсж}; \\ \delta_n^{**} &= 0.14 \delta_{нсж}.\end{aligned}$$

Набор характерных толщин для ламинарного пограничного слоя в сжимаемом потоке газа может быть вычислен с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned}\delta_{сж} &= \delta_n \left(1 + 0.72r \frac{\gamma - 1}{2} M_w^2 \right)^{0.85}; \\ \delta_{сж}^* &= \delta_n^* \left(1 + 0.72r \frac{\gamma - 1}{2} M_w^2 \right)^{0.85}; \\ \delta_{сж}^{**} &= \delta_n^{**} \left(1 + 0.72r \frac{\gamma - 1}{2} M_w^2 \right)^{-0.15}.\end{aligned}$$

3 ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ

Представленная в предыдущих разделах методика была реализована в виде двух самостоятельных программных модулей на С и Fortran90. Верификация программных модулей проводилась на данных расчета невязкого обтекания осесимметричного тела и сравнивалась с известными результатами работы⁹, полученными с помощью численного решения уравнений Прандтля для двух чисел Маха. Результаты сравнения представлены ниже (C_τ^* – данные расчета, C_τ^{**} – данные работы⁹):

$$M_\infty = 1.5; \quad C_\tau^* = 0.0356; \quad C_\tau^{**} = 0.03944;$$

$$M_\infty = 3.0; \quad C_\tau^* = 0.0281; \quad C_\tau^{**} = 0.024.$$

Реализованные программные модули могут применяться пользователем автономно, а также могут достаточно просто подключаться к основным программам моделирования течений.

Разработанные программные модули применялись для оценки и отладки реализации модели турбулентности в двумерном программном комплексе, предназначенном для моделирования плоских течений и обтекания осесимметричных тел. Ниже приводится пример оценки толщины пограничного слоя на пластине для турбулентного случая. С помощью программного комплекса был проведен тестовый расчет течения на пластине при числе Маха набегающего потока $M = 1.9$, температуре набегающего потока $T = 3000$ К для турбулентного случая. Для моделирования турбулентности использовалась известная модель Смагоринского. На рисунке 3 приведена часть турбулентного профиля скорости.

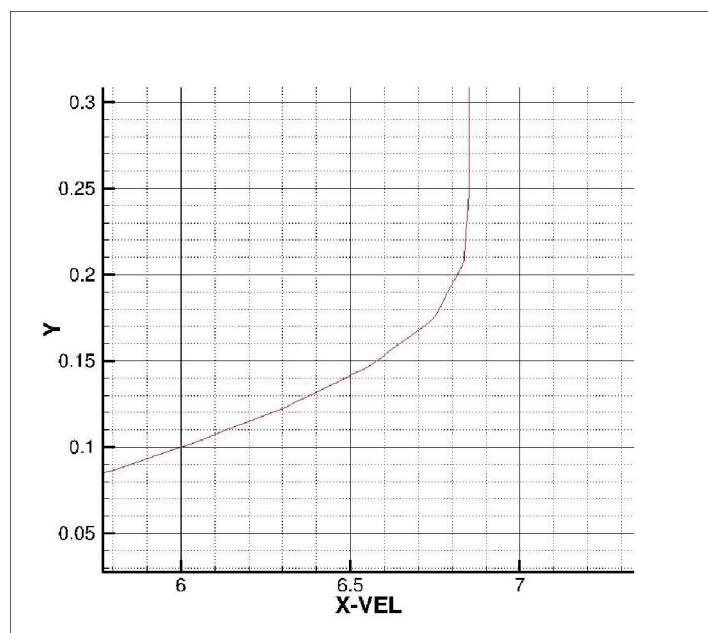


Рис.3 Профиль скорости для турбулентного расчета течения на пластине.

При практической оценке толщины пограничного слоя по расчетным результатам за толщину пограничного слоя обычно принимают толщину при значении скорости

равном $0.99U_\infty$, где U_∞ – скорость на внешней границе пограничного слоя.

Для данного сечения $U_\delta = 0.99U_\infty = 6.78$. Тогда для данного профиля расчетная толщина пограничного слоя $\delta_p = 0.18$. Проведение оценки по вышеприведенной методике Авдеевского-Козлова позволяет получить оценочное значение, равное $\delta_o = 0.173$. Расхождение расчетного результата с оценкой составляет 3.89 %. При этом необходимые газодинамические величины берутся из результатов основного расчета по внешней границе пограничного слоя.

Данное совпадение следует считать достаточно хорошим. Улучшение совпадения может быть достигнуто за счет изменения параметров используемой модели турбулентности.

Другой пример использования данной методики реализован для расчетов турбулентного обтекания осесимметричного тела, представленного на рисунке 4. Здесь показано тело вращения и изолинии скорости при обтекании тела турбулентным потоком при числе Маха, равном 2.08. Входные параметры для реализации приближенной методики оценки коэффициента сопротивления трения и характерных толщин пограничного слоя брались с внешней границы пограничного слоя (Рис.5).

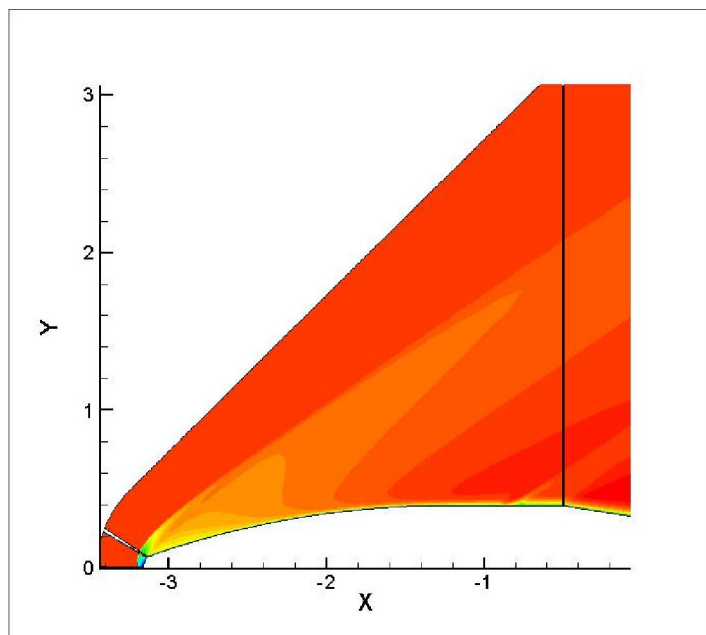


Рис.4. Распределение скорости при обтекании тела вращения.

В результате были получено следующее значение коэффициента сопротивления трения $C_\tau^* = 3.7382 \cdot 10^{-3}$. В качестве характерной площади при определении C_τ^* использовалась площадь боковой поверхности тела $S = 6.6614 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$. Соответственно, значение силы трения получалось равным $F = 0.7474 \text{ Н}$. Данные значения были использованы в дальнейшем для отладки организации расчета и настройки параметров модели турбулентности.

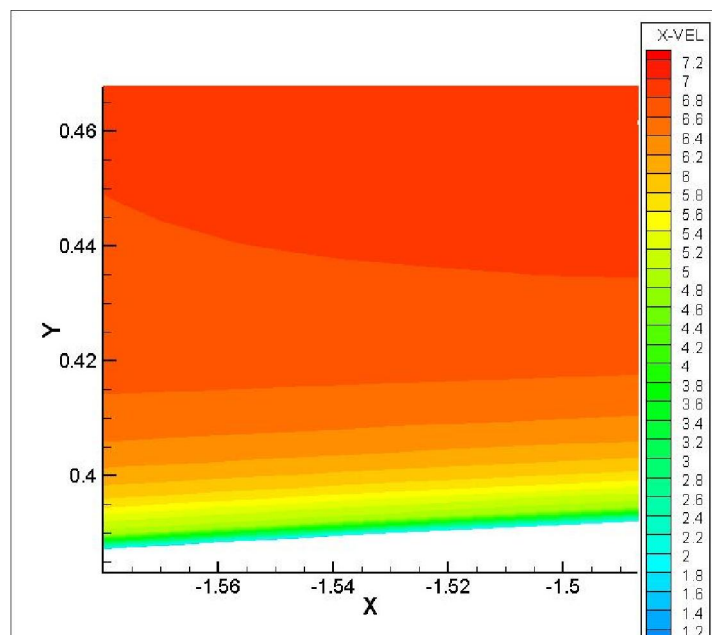


Рис.5. Распределение скорости в пограничном слое.

Следует заметить, что описанный подход в настоящей реализации обладает рядом существенных ограничений. Так по своей сути он не предполагает возможности отрыва пограничного слоя. Следовательно, течения с отрывом выпадают из рассмотрения. Далее, описанный подход не учитывает возможности перехода пограничного слоя из ламинарного режима в турбулентный. Описанный подход реализован лишь для тел в потоке под нулевым углом атаки. Тем не менее, для достаточно большого количества задач он позволяет получать оценки, которые могут служить определенными ориентирами для отладки моделей и методов расчета при отсутствии результатов натурных экспериментов и точных решений.

Для трехмерных задач, т.е. задач обтекания под ненулевым углом атаки, существует возможность применения описанного подхода вдоль линий тока, получение распределения местного коэффициента сопротивления трения по телу и последующее интегрирование его по поверхности (при условии безотрывного течения). Подобная реализация подхода предполагается при дальнейшей разработке. Также предполагается реализация учета явления перехода от ламинарного режима течения к турбулентному.

4 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена практическая реализация приближенного полуэмпирического подхода оценки коэффициента сопротивления трения и характерных толщин пограничного слоя при обтекании осесимметричных тел вязким потоком газа. Данный подход позволяет получать оценочные величины, которые могут быть полезны в задачах верификации моделей и численных методов. При отсутствии экспериментальных данных для конкретных практических задач данный подход может использоваться для отладки и настройки численных методов, организации расчетов, используемых моделей

турбулентности.

REFERENCES

- [1] Krasnov N.F. *Aerodinamica*. M.: Visshaya shkola, (1976).
- [2] Bondarev E.N., Dubasov V.T., Ryzhov Y.A. i dr. *Aerigidromeckanika*. M.: Mashinostroenie, (1993)
- [3] Schlichting H. *Teoriya pogranichnogo sloya*. M.: Nauka, (1974)
- [4] Kozlov L.V. "Experimentalnoe issledovanie poverhnostnogo treniya na ploskoy plastine v sverhzhukovom potoke pri nalichii teploobmena". *Izvestiya AN SSSR, OTN, Mekhanika i mashinostroenie*, **2**, (1963).
- [5] Kozlov L.V. *Experimentalnoe opredelenie zakona teploobmena dlya turbulentnogo pogranichnogo sloya v sverhzhukovom potoke. Issledovanie teploobmena v potokah zhidkosti i gaza*. M.: Mashinostroenie, (1965).
- [6] Kozlov L.V. i dr. *Modelirovanie teplovykh rezhimov kosmicheskogo apparata i okruzhayushey ego sredy*. M.: Mashinostroenie, (1971).
- [7] Avduevskiy V.S. "Metod rascheta prostranstvennogo turbulentnogo pogranichnogo sloya v szhimaemom gaze". *Izvestiya AN SSSR, OTN, Mekhanika i mashinostroenie*, **4**, 3 (1962)
- [8] Avduevskiy V.S. i dr. Pod red. prof. V.K. Koshkina. *Osnovy teploperedachi v aviatsionnoy i raketnoy tekhnike*. M.: Oborongiz, (1960).
- [9] Kolina N.P., Pyatnova A.I., Solodkin E.E. "Materialy dlya rascheta kharakteristik turbulentnogo pogranichnogo sloya na linii rastekaniya pri konicheskom vneshnem techenii". *Trudi TSAGI*, (1979).

Поступила в редакцию 1 февраля 2014 года.