MATHEMATICA MONTISNIGRI
Vol XXXI (2014)

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРА ТИПА ШТУРМ-ЛИУВИЛЛЯ ПО НУЛЯМ

НИКОЛА МИХАЛЕВИЧ

Университет Черногории, Морской факультет
Котор, Черногория
e-mail: nikolamih@ac.me

Ключевые слова: оператор, характеристическая функция, асимптотика, собственные значения.

Аннотация. В статье мы представляем асимптотику характеристической функции оператора $D^{(2)}$ по нулям, которые описаны в работах $[1]$ и $[13]$, т.е. в виде бесконечного произведения, в зависимости от уровия гладкости потенциала q и функции задержки α. В статье также рассчитан первый регуляризованный след оператора $D^{(2)}$.

REPRESENTATION CHARACTERISTIC FUNCTION OF STURM-LIUVILLE TYPE OVER THE ZEROS

NIKOLA MIHALJEVICH

University of Montenegro, Faculty of Marine
Kotor, Montenegro
e-mail: nikolamih@ac.me

Summary. In this paper, we present the asymptotic behavior of the characteristic functions operatora $D^{(2)}$ over the zeros, which are described in the works $[1]$ and $[13]$, that is in the form of an infinite product, depending on the smoothness potontsiala q and delay functions α. We also consider the first regularized trace of the operator $D^{(2)}$.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B24, 35B05.
Key words and Phrases: Operator, characteristic function, asymptotic behavior, own values.

1 АНАЛИЗ БЕСКОНЕЧНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

В работе [13] мы получили асимптотику ноль характеристической функции F в зависимости от уровия гладкости потенциала q и функции задержки α. Следствием теоремы, доказанной в работе [13] является то, что собственные значения оператора $D^{(2)}$ имеют асимптотику

$$\lambda_{nij} = n^2 + \zeta_0 + \begin{cases} o(1), & q \in L_1[0,\pi] \\ \dfrac{\zeta_1(-1)^{n+1}\sin n\alpha(\pi)}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right), & q \in AC[0,\pi] \\ \dfrac{\zeta_1(-1)^{n+1}\sin n\alpha(\pi)}{n} + \dfrac{\zeta_2^{(0)} + \zeta_2^{(1)}(-1)^{n+1}\cos n\alpha(\pi)}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right), & q' \in AC[0,\pi] \end{cases} \qquad (1)$$

при $n = 1,2,...,$ $j = 1,2,$ где $\zeta_0 = 2C_1$, $\zeta_1 = 2C_2$, $\zeta_2^{(0)} = 2C_3^{(0)} + \dfrac{(h+H)^2}{\pi^2}$ и $\zeta_2^{(1)} = 2C_3^{(1)}$.

Мы подчеркнули, что характеристическая функция F оператора $D^{(2)}$ является целой функцией, экспоненциального типа и полвины степени роста по переменной λ. Кроме того, это счетная функция. Что означает, если z_n, $n \in N$ является нулем функции F, то и $-z_n$ также является нулем этой функции. Опираясь на классическую теорию представления таких функций к виду бесконечного произведения, что аналогично факторизации полинома, мы можем написать

$$F(z) = A \cdot \prod_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n}\right) \qquad (2)$$

В (2) коефициент A является неопределенным, но его значение впоследствие устанавливается. А именно, (1) из работы [13] и (2) являются двумя различными представления одной и той же функции. Асимптотическое разложение этих различных представлений, при $z \to \infty$, вдоль произвольной прямой, проходящей через начало координат, может устанавливать различные отношения между параметрами оператора $D^{(2)}$, такими как h, H и значениями функций q и α в концов отрезка $[0,\pi]$ и параметрами асимптотического разложения собственныйх значений этого оператора. Мы обычно используем это разложение вдоль действительной или мнимой оси в комплексной z - плоскости.

Лемма 1.

$$A = \pi\lambda_0 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n^2}. \qquad (3)$$

Доказательство. Рассмотрим асимптотику функции F при $z \to \infty$, $z \in R$. На основе формулы (1) имеем

$$\lambda_n = n^2 + \zeta_0 + o(1),$$

где главный член асимптотического выражения $o(1)$ на самом деле

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t_1)\cos n(\pi - t_1 + \alpha(t_1))dt_1 + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t_1)\cos n(\pi - t_1 - \alpha(t_1))dt_1 .$$

Далее, вместо (2) запишем

$$F(z) = A\prod_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n}\right) = A\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_0}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n}\right).$$

Так как (см. [14], с. 272)

$$\sin \pi z = \pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right),$$

имеем

$$\frac{F(z)}{-z\sin \pi z} = \frac{A\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_0}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n}\right)}{-\pi z^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{A}{\pi}\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{z^2}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\lambda_n}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n - z^2}{n^2 - z^2} =$$

$$= \frac{A}{\pi\lambda_0}\left(1 - \frac{\lambda_0}{z^2}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\lambda_n}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_n - n^2 + n^2 - z^2}{n^2 - z^2}\right) =$$

$$= \frac{A}{\pi\lambda_0}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\lambda_n}\left(1 - \frac{\lambda_0}{z^2}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{\lambda_n - n^2}{n^2 - z^2}\right).$$

Пусть

$$\frac{A}{\pi\lambda_0}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\lambda_n} = b .$$

Тогда у нас есть

$$\frac{F(z)}{-z\sin \pi z} = b\cdot\left(1 - \frac{\lambda_0}{z^2}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{\zeta_0 + o(1)}{n^2 - z^2}\right) =$$

$$= b\left(1 - \frac{\lambda_0}{z^2}\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right). \qquad z \to \infty,\ z \in R .$$

Здесь

$$F(z) = -bz\sin \pi z + O(\sin \pi z), \quad (z \to \infty) \tag{4}$$

С другой стороны, из (1), работа [13] непосредственно следует

$$F(z) = -z\sin \pi z + O(\sin \pi z) \quad (z \to \infty) \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует (2).

2 ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ F, КОГДА ПОТЕНЦИАЛ q ЯВЛЯЕТСЯ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИЕЙ

Точное асимптотическое разложение функции F из произведения, возможно только, если предположить, что q абсолютно непрерывная функция. Затем, в соотвествии с формулой (1) имеем

$$\lambda_{nij} = n^2 + \zeta_0 + \frac{\zeta_1(-1)^{n+1}\sin n\alpha(\pi)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{6}$$

Теорема 1. Пусть q абсолютно непрерывная функция. Тогда характеристическая функция F на основе собственных значения (6) имеет следующее асимптотическое представление

$$F(z) = \left[-z + \frac{1}{z}\left(\lambda_0 - \frac{\zeta_0}{2} + s_1 + \frac{\pi}{8}\zeta_0^2 + \frac{\zeta_1\pi\alpha(\pi)}{2}\right)\right]\sin \pi z +$$

$$+\frac{\pi}{2}\zeta_0\cos \pi z - \frac{\zeta_1\pi}{2z}\sin z\alpha(\pi) + O\left(\frac{\sin \pi z}{z^2}\right), \tag{7}$$

где s_1 первый регуляризованный след оператора $D^{(2)}$.

Доказательство.

$$\frac{F(z)}{-z\sin \pi z} = \left(1 - \frac{\lambda_0}{z^2}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{\lambda_n - n^2}{n^2 - z^2}\right) =$$

$$\left(1 - \frac{\lambda_0}{z^2}\right)\left(1 + \sigma_0(z) + \frac{1}{2}\sigma_1(z)\right) + R(z) \tag{8}$$

где

$$\sigma_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n - n^2}{n^2 - z^2},$$

и

$$\sigma_1(z) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n - n^2}{n^2 - z^2} \right)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_n - n^2}{n^2 - z^2} \right)^2 .$$

Используя известные суммы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n\alpha(\pi)}{n^2 - z^2} = \frac{\pi}{2z} \cdot \frac{\cos z\alpha(\pi)}{\sin z\pi} - \frac{1}{2z^2}, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin nx}{n} = \frac{\pi}{2}, \ (-\pi < x < \pi)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - z^2} = \frac{1}{2z^2} - \frac{\pi}{2z} \operatorname{ctg} z\pi \tag{9}$$

получается

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin n\alpha(\pi)}{n(n^2 - z^2)} = \frac{\pi}{2z^2} \left(\frac{\sin z\alpha(\pi)}{\sin \pi z} - \alpha(\pi) \right). \tag{10}$$

Далее

$$\sigma_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n - n^2}{n^2 - z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n - n^2 - \zeta_0 - \dfrac{\zeta_1 (-1)^{n+1} \sin n\alpha(\pi)}{n}}{n^2 - z^2} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta_0}{n^2 - z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta_1 (-1)^{n+1} \sin n\alpha(\pi)}{n(n^2 - z^2)} =$$

$$= \zeta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - z^2} + \zeta_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin n\alpha(\pi)}{n(n^2 - z^2)} -$$

$$- \frac{1}{z^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n - n^2 - \zeta_0 - \zeta_1 \frac{(-1)^{n+1} \sin n\alpha(\pi)}{n} \right) +$$

$$+ \frac{1}{z^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n - n^2 - \zeta_0 - \zeta_1 \frac{(-1)^{n+1} \sin n\alpha(\pi)}{n} \right) \cdot \frac{n^2}{n^2 - z^2} =$$

$$= \zeta_0 \left(\frac{1}{2z^2} - \frac{\pi}{2z} \operatorname{ctg} \pi z \right) + \frac{\zeta_1 \pi}{2z^2} \left(\frac{\sin z\alpha(\pi)}{\sin \pi z} - \alpha(\pi) \right) - \frac{1}{z^2} s_1 + o\left(\frac{1}{z^2} \right), \tag{11}$$

где

$$s_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n - n^2 - \zeta_0 - \zeta_1 \frac{(-1)^{n+1} \sin n\alpha(\pi)}{n} \right).$$

Для $\sigma_1(z)$ получаем

$$\sigma_1(z)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta_0+\dfrac{\zeta_1(-1)^{n+1}\sin n\alpha(\pi)}{n}}{n^2-z^2}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta_1^2}{\left(n^2-z^2\right)^2}-$$

$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta_0\zeta_1(-1)^{n+1}\sin n\alpha(\pi)}{n\left(n^2-z^2\right)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_1\frac{1-\cos 2n\alpha(\pi)}{2n^2\left(n^2-z^2\right)}=$$

$$=\zeta_0^2\left(\frac{1}{4z^2}-\frac{\pi}{2z^3}\operatorname{ctg}\pi z+\frac{\pi}{4z^2}\operatorname{ctg}^2\pi z\right)+$$

$$+2\zeta_0\zeta_1\left(\frac{1}{2z^2}-\frac{\pi}{2z}\operatorname{ctg}\pi z\right)\left[\frac{\pi}{2z^2}\left(\frac{\sin z\alpha(\pi)}{\sin\pi z}-\alpha(\pi)\right)\right]-$$

$$-\zeta_0^2\left(-\frac{1}{2z^4}+\frac{\pi^2}{4z^2\sin^2\pi z}+\frac{\pi\operatorname{ctg}\pi z}{4z^3}\right)-$$

$$-2\zeta_0\zeta_1\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}\sin n\alpha(\pi)}{n\left(n^2-z^2\right)^2}-\frac{1}{2}\zeta_1^2\frac{1-\cos 2n\alpha(\pi)}{2n^2\left(n^2-z^2\right)^2}\right]+O\left(\frac{\sin\pi z}{z^3}\right).$$

Легко проверить, что $R(z)=O\left(\dfrac{\sin\pi z}{z^3}\right)$.

При отделении членов, которые были с $\dfrac{1}{z^2}$ получаем

$$\sigma_1(z)=\zeta_0^2\frac{\pi}{4z^2}\operatorname{ctg}^2\pi z-\zeta_0^2\frac{\pi}{4z^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\pi z}+o\left(\frac{1}{z^2}\right)=$$

$$=\zeta_0^2\frac{\pi}{4z^2}\cdot\frac{\cos^2\pi z-1}{\sin^2\pi z}+o\left(\frac{1}{z^2}\right)=-\zeta_0^2\frac{\pi}{4z^2}+o\left(\frac{1}{z^2}\right). \qquad (12)$$

Из равенства (8), (11) и (12) следует утверждение теоремы.

Легко установить и следующее.

Теорема 2. На отрицательной часты мнимой оси характеристическая функция F имеет следующую асимптотику

а) от произведения

$$F\left(-i\sqrt{\mu}\right)=e^{\pi\sqrt{\mu}}\left(\frac{\sqrt{\mu}}{2}+\frac{\pi}{4}\zeta_0+\frac{\xi}{2\sqrt{\mu}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right)\right), \qquad (13)$$

где

$$\xi = \lambda_0 - \frac{1}{2}\zeta_0 + s_1 + \frac{1}{2}\zeta_1 \pi\alpha(\pi) - \frac{\pi}{8}\zeta_0^2,$$

б) от оператора

$$F\left(-i\sqrt{\mu}\right) = e^{\pi\sqrt{\mu}}\left(\frac{\sqrt{\mu}}{2} + \frac{h+H}{2} + \frac{hH}{2\sqrt{\mu}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right)\right). \tag{14}$$

Теорема 3. Первый спектральный след s_1 оператора $D^{(2)}$ имеет вид

$$s_1 = 2hH - \lambda_0 + \frac{1}{2}\left(h^2 + H^2\right) + \frac{h+H}{\pi} - \frac{1}{2}\pi\alpha(\pi)\zeta_1.$$

Доказательство. Доказательство непосредственно следует выравниванием соответствующих значений из (13) и (14).

3 ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ F, КОГДА ПЕРВАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ПОТЕНЦИАЛА q' АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ

Точнее асимптотическое разложение функций F от произведения возможно только если предположить, что q' абсолютно непрерывная функция. Тогда в соответствим с формулой (1) имеем

$$\lambda_{nij} = n^2 + \zeta_0 + \frac{\zeta_1(-1)^{n+1}\sin n\alpha(\pi)}{n} + \frac{\zeta_2^{(0)} + \zeta_2^{(1)}(-1)^{n+1}\cos n\alpha(\pi)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{15}$$

Теорема 4. Пусть q' абсолютно непрерывная функция. Тогда характеристическая функция F на основе собственных значений (15) имеет следующее асимптотическое представление

$$F(z) = -z\sin\pi z + \frac{\pi}{2}\zeta_0\cos\pi z + \frac{1}{z}\left(\lambda_0\sin\pi z - \frac{\zeta_0}{2}\sin\pi z + s_1\sin\pi z + \right.$$

$$\left. + \frac{\zeta_1\pi\alpha(\pi)}{2}\sin\pi z - \frac{\zeta_1\pi}{2}\sin z\alpha(\pi) + \frac{\pi}{8}\zeta_0^2\sin\pi z\right) +$$

$$+ \frac{1}{z^2}\left(\frac{\pi\zeta_0\lambda_0}{2}\cos\pi z + \frac{\zeta_2^{(0)}\pi}{2}\cos\pi z + \frac{\zeta_2^{(1)}\pi}{2}\cos z\alpha(\pi) + \right.$$

$$+\frac{3}{8}\pi\zeta_0^2\cos\pi z-\frac{\pi^2}{4}\zeta_0\zeta_1\alpha(\pi)\cos\pi z+\frac{\pi}{4}\zeta_0\zeta_1\alpha(\pi)\cos z\alpha(\pi)\Big)-$$

$$-\frac{\pi^3\zeta_0^3}{48z^2}\cos\pi z+o\left(\frac{\sin\pi z}{z^2}\right), \tag{16}$$

где s_1 первый регуляризованный след оператора $D^{(2)}$.

Доказательство. Мы будем иметь

$$\frac{F(z)}{-z\sin\pi z}=\left(1-\frac{\lambda_0}{z^2}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda_n-n^2}{n^2-z^2}\right)=$$

$$\left(1-\frac{\lambda_0}{z^2}\right)\left(1+\sigma_0(z)+\frac{1}{2}\sigma_1(z)+\frac{1}{6}\sigma_2(z)\right)+R_n(z), \tag{17}$$

где

$$\sigma_0(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n-n^2}{n^2-z^2},$$

$$\sigma_1(z)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n-n^2}{n^2-z^2}\right)^2-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_n-n^2}{n^2-z^2}\right)^2,$$

и

$$\sigma_2(z)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n-n^2}{n^2-z^2}\right)^3+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_n-n^2}{n^2-z^2}\right)^2-3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_n-n^2}{n^2-z^2}\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n-n^2}{n^2-z^2}.$$

Далее

$$\sigma_0(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n-n^2}{n^2-z^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n-n^2-\zeta_0-\dfrac{\zeta_1(-1)^{n+1}\sin n\alpha(\pi)}{n}}{n^2-z^2}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta_0}{n^2-z^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta_1(-1)^{n+1}\sin n\alpha(\pi)}{n(n^2-z^2)}=$$

$$=\zeta_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-z^2}+\zeta_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin n\alpha(\pi)}{n(n^2-z^2)}-$$

$$-\frac{1}{z^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n-n^2-\zeta_0-\zeta_1\frac{(-1)^{n+1}\sin n\alpha(\pi)}{n}\right)+\frac{1}{z^2}\zeta_2^{(0)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-z^2}+$$

$$+\frac{1}{z^2}\zeta_2^{(1)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos n\alpha(\pi)}{n^2-z^2}+\frac{1}{z^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{o(1)}{n^2-z^2}=$$

$$=\zeta_0\left(\frac{1}{2z^2}-\frac{\pi}{2z}\operatorname{ctg}\pi z\right)+\frac{\zeta_1\pi}{2z^2}\left(\frac{\sin z\alpha(\pi)}{\sin\pi z}-\alpha(\pi)\right)-\frac{1}{z^2}s_1-$$

$$-\frac{\pi}{2z^3}\zeta_2^{(0)}\operatorname{ctg}\pi z-\frac{\pi}{2z^3}\zeta_2^{(1)}\frac{\cos z\alpha(\pi)}{\sin\pi z}+O\left(\frac{\sin z\alpha(\pi)}{z^4\sin\pi z}\right)=$$

$$=\frac{\zeta_0}{2z^2}-\frac{\pi\zeta_0}{2z}\operatorname{ctg}\pi z+\frac{\zeta_1\pi}{2z^2}\cdot\frac{\sin z\alpha(\pi)}{\sin\pi z}-\frac{\zeta_1\pi}{2z^2}\alpha(\pi)-\frac{1}{z^2}s_1-$$

$$-\frac{\pi}{2z^3}\zeta_2^{(0)}\operatorname{ctg}\pi z-\frac{\pi}{2z^3}\zeta_2^{(1)}\frac{\cos z\alpha(\pi)}{\sin\pi z}+O\left(\frac{\sin z\alpha(\pi)}{z^4\sin\pi z}\right). \tag{18}$$

где

$$s_1=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n-n^2-\zeta_0-\zeta_1\frac{(-1)^{n+1}\sin n\alpha(\pi)}{n}\right).$$

Для $\sigma_1(z)$ получим

$$\sigma_1(z)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta_0+\dfrac{\zeta_1(-1)^{n+1}\sin n\alpha(\pi)}{n}}{n^2-z^2}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_n-n^2}{n^2-z^2}\right)^2=$$

$$=\zeta_0^2\left(\frac{1}{4z^2}-\frac{\pi}{2z^3}\operatorname{ctg}\pi z+\frac{\pi}{2z^2}\operatorname{ctg}^2\pi z\right)+$$

$$+\frac{1}{z^3}\left(-\frac{1}{2}\zeta_0\zeta_1\pi^2\frac{\cos\pi z\sin z\alpha(\pi)}{\sin^2\pi z}+\frac{1}{2}\zeta_0\zeta_1\pi^2\alpha(\pi)\operatorname{ctg}\pi z\right)-$$

$$-\zeta_0^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2-z^2)^2}-2\zeta_0\zeta_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin n\alpha(\pi)}{n(n^2-z^2)^2}-\zeta_1^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos 2n\alpha(\pi)}{2n^2(n^2-z^2)^2}+$$

$$+O\left(\frac{\sin z\alpha(\pi)}{z^4\sin\pi z}\right).$$

Дифференцируем по z левую и правую часть равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-z^2}=\frac{1}{2z^2}-\frac{\pi}{2z}\operatorname{ctg}z\pi\,,$$

получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n^2-z^2\right)^2}=\frac{\pi\operatorname{ctg}\pi z}{4z^3}+\frac{\pi^2}{4z^2\sin^2\pi z}+O\left(\frac{1}{z^4}\right).$$

Так, как

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin n\alpha(\pi)}{n\left(n^2-z^2\right)}=\frac{\pi}{2z^2}\left(\frac{\sin z\alpha(\pi)}{\sin\pi z}-\alpha(\pi)\right),$$

то дифференцируя по z левую и правую части этого последного равенства получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin n\alpha(\pi)}{n\left(n^2-z^2\right)^2}=-\frac{\pi}{2z^4}\left(\frac{\sin z\alpha(\pi)}{\sin\pi z}-\alpha(\pi)\right)+$$

$$+\frac{\pi}{4z^3}\cdot\frac{\alpha(\pi)\cos z\alpha(\pi)\sin\pi z-\pi\cos\pi z\sin z\alpha(\pi)}{\sin^2\pi z}.$$

Если, в известного равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2+\mu}=\frac{\pi}{2\sqrt{\mu}}\cdot\frac{\operatorname{ch}(\pi-x)\sqrt{\mu}}{\operatorname{sh}\pi\sqrt{\mu}}-\frac{1}{2\mu},$$

положим $\sqrt{\mu}=iz$, тогда получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2-z^2}=\frac{1}{2z^2}+\frac{\pi}{2iz}\cdot\frac{\operatorname{ch}(\pi-x)iz}{\operatorname{sh}\pi iz}=\frac{1}{2z^2}-\frac{\pi}{2z}\cdot\frac{\cos(\pi-x)z}{\sin\pi z}.$$

Интегрируем последнее выражение (по x) в пределах от 0 до x, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\left(n^2-z^2\right)}=\frac{x-\pi}{2z^2}+\frac{\pi\sin(\pi-x)z}{2z^2\sin\pi z}.$$

При повторном интегрировании в тех же пределах, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos nx}{n^2\left(n^2-z^2\right)}=\frac{x(x-2\pi)}{4z^2}+\frac{\pi}{2z^2\sin\pi z}\left[\cos z(\pi-x)-\cos\pi z\right].$$

Дифференцируя по z последнее равенство, мы получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos nx}{n^2\left(n^2-z^2\right)^2}=O\left(\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{z^4}\right),$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos 2n\alpha(\pi)}{2n^2\left(n^2-z^2\right)^2}=O\left(\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{z^4}\right).$$

Далее

$$\sigma_1(z)=\zeta_0^2\left(\frac{1}{z^4}-\frac{\pi}{2z^3}\operatorname{ctg}\pi z+\frac{\pi^2}{4z^2}\operatorname{ctg}^2\pi z\right)-\frac{1}{2}\zeta_0\zeta_1\pi^2\frac{\cos\pi z\sin z\alpha(\pi)}{z^3\sin^2\pi z}+$$

$$+\frac{1}{2}\zeta_0\zeta_1\frac{\pi^2\alpha(\pi)\operatorname{ctg}\pi z}{z^3}-\zeta_0^2\left(\frac{\pi\operatorname{ctg}\pi z}{4z^3}+\frac{\pi^2}{4z^2\sin^2\pi z}\right)-$$

$$-2\zeta_0\zeta_1\left(-\frac{\pi}{2z^4}\left(\frac{\sin z\alpha(\pi)}{\sin\pi z}-\alpha(\pi)\right)\right)+\frac{\pi}{4z^3}\cdot\frac{\alpha(\pi)\cos z\alpha(\pi)\sin\pi z-\pi\cos\pi z\sin z\alpha(\pi)}{\sin^2\pi z}+$$

$$+O\left(\frac{\sin z\alpha(\pi)}{z^4\sin\pi z}\right).$$

Когда мы отделяем члены, которые были с $\frac{1}{z^2}$ и $\frac{1}{z^3}$, получаем

$$\sigma_1(z)=-\frac{\pi^2}{4z^2}\zeta_0^2+\frac{1}{z^3}\left(-\frac{\pi\zeta_0^2}{2}\operatorname{ctg}\pi z+\frac{\pi^2}{2}\zeta_0\zeta_1\alpha(\pi)\operatorname{ctg}\pi z-\right.$$

$$\left.-\frac{\zeta_0^2\pi}{4}\operatorname{ctg}\pi z-\frac{\pi\zeta_0\zeta_1\alpha(\pi)\cos z\alpha(\pi)}{2\sin\pi z}-\frac{\zeta_1^2\alpha(\pi)(\alpha(\pi)-\pi)}{4}\right)+$$

$$+O\left(\frac{\sin z\alpha(\pi)}{z^4\sin\pi z}\right)=-\frac{\pi^2}{4z^2}\zeta_0^2+\frac{1}{z^3}\left(-\frac{3}{4}\zeta_0^2\pi\operatorname{ctg}\pi z+\right.$$

$$\left.+\frac{\pi^2}{2}\zeta_0\zeta_1\alpha(\pi)\operatorname{ctg}\pi z-\frac{\pi\zeta_0\zeta_1\alpha(\pi)\cos z\alpha(\pi)}{2\sin\pi z}\right)+$$

$$+O\left(\frac{\sin z\alpha(\pi)}{z^4\sin\pi z}\right). \tag{19}$$

Дважды дифференцируя по z следующее равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-z^2}=\frac{1}{2z^2}-\frac{\pi}{2z}\operatorname{ctg}z\pi$$

получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n^2-z^2\right)^3}=\frac{-\pi^3\cos\pi z}{8z^3\sin^3\pi z}+o\left(\frac{1}{z^3}\right),$$

далее для $\sigma_2(z)$ имеем

$$\sigma_2(z)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta_0+\frac{\zeta_1(-1)^{n+1}\sin n\alpha(\pi)}{n}}{n^2-z^2}\right)^3+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\zeta_0+\frac{\zeta_1(-1)^{n+1}\sin n\alpha(\pi)}{n}}{n^2-z^2}\right)^3-$$

$$-3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\zeta_0+\frac{\zeta_1(-1)^{n+1}\sin n\alpha(\pi)}{n}}{n^2-z^2}\right)^2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta_0+\frac{\zeta_1(-1)^{n+1}\sin n\alpha(\pi)}{n}}{n^2-z^2}=$$

$$=-\frac{\pi^3}{8z^3}\zeta_0^3\mathrm{ctg}^3\pi z+2\zeta_0^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n^2-z^2\right)}+o\left(\frac{1}{z^3}\right)=$$

$$=-\frac{\pi^3}{8z^3}\zeta_0^3\mathrm{ctg}^3\pi z-\zeta_0^3\frac{\pi^3\cos\pi z}{4z^3\sin^3\pi z}+3\zeta_0^3\pi^3\frac{\mathrm{ctg}\,\pi z}{8z^3\sin^2\pi z}+o\left(\frac{1}{z^2}\right)=$$

$$=\frac{\pi^3\zeta_0^3}{8}\cdot\frac{\cos\pi z}{z^3\sin\pi z}+O\left(\frac{\sin z\alpha(\pi)}{z^4\sin\pi z}\right)\tag{20}$$

Из равенств (17), (18), (19) и (20) следует утврерждение теоремы.

REFERENCES

[1] N.Mihaљeviħ, M.Pikula, *Karakteristichna funktcija operatora tipa Shturm-Leeuvila sa promenљivim kashњeњem*, Zbornik Fakulteta za pomorstvo u Kotoru, **20**, 403-410, (2003).

[2] S.B. Norkin, *Differentcial`ny`e uravneniia vtorogo poriadka s zapazdy`vaiushchim argumentom*, Nauka, Moskva, (1965).

[3] I.M. Gel`fand, B.M.Levitan, "Ob opredelenii differentcial`nogo uravneniia po ego spektral`noi` funktcii", *Izv. AN SSSR, Ser. Mat.*, **15**, S. 309-360, (1951).

[4] L.E`. E`l`sgol`tc, S.B. Norkin, *Vvedenie v teoriiu differentcial`ny`kh uravnenii` s otcloniaiushchimsia argumentom*, Nauka, Moskva, (1971).

[5] R.Lazović, M.Pikula, "Regularized trace of the operator applied to solving inverse problems", *Radovi matematički*, 2002. Lazović R., "Pikula M. Regularized trace of the operator applied to solving to inverse problem", *Radovi matematički*, **11**, pp. 49-57, (2002)

[6] M. Pikula, "Ob opredelenii differentcial`nogo uravneniia s peremenny`m zapazdy`vaniem", *Mathematica Montisnigri*, **VI**, 71-91, (1996).

[7] M. Pikula, "Opredelenie differentcial`nogo operatora Shturma-Leeuvillia s zapazdy`vaiushchim argumentom po dvum spektram", *Matematicheskii` vestneyk*, **43**, 159-171, (1991).

[8] R.Lazoviħ, *Doktorska disertatcija*, Beograd (1998).

[9] N.Mihaljevich, "A reconstruction of the operator by using given spectral characteristic", *Mathematica Montisnigri*, **XX-XXI**, 15-34, (2007-2008).

[10] N.Mihaljevich, M.Pikula, "The inverse Sturm-Liouville problem with changeable delay", *Mathematica Montisnigri*, **XVI**, 41-68, (2003).

[11] V.A. Sadovnichii`, *Teoriia operatorov*, Moskva, MGU, (1979).
[12] N.Levinson, “The inverse Sturm-Liouville problem”, *Math. Tidsskr*. **13**, 25-30, (1949).
[13] N.Mihaљevich, “Asimptotika soobstvenny`kh znachenii` operatora tipa Shturm-Leeuvilia s peremenny`m zapazdy`vaniem”, *Mathematica Montisnigri*, **XXVIII**, (2013)
[14] B.V.Shabat, *Vvedenie v kompleksny`i` analiz*, Nauka, Moskva (1985).

Поступила в редакцию 20 января 2014 года.