

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СИСТЕМЫ ТЕЛ

М.П. ГАЛАНИН<sup>1</sup>, А.В. КРУПКИН<sup>2</sup>, В.И. КУЗНЕЦОВ<sup>2</sup>, В.В. ЛУКИН<sup>1</sup>,  
В.В. НОВИКОВ<sup>2</sup>, А.С. РОДИН<sup>1</sup>, И.В. СТАНКЕВИЧ<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия  
e-mail: [galan@keldysh.ru](mailto:galan@keldysh.ru), web page: <http://www.keldysh.ru>

<sup>2</sup>Всероссийский научно-исследовательский институт неорганических материалов  
имени академика А.А. Бочвара, Москва, Россия  
e-mail: [kvi312@yandex.ru](mailto:kvi312@yandex.ru), web page: <http://bochvar.ru>

<sup>3</sup>Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
e-mail: [aplmex@yandex.ru](mailto:aplmex@yandex.ru), web page: <http://www.bmstu.ru>

**Ключевые слова:** Математическое моделирование, контактная задача теории упругости, нелинейное деформирование

**Аннотация.** Рассмотрена задача термоупругопластического контактного взаимодействия системы тел. Построены алгоритмы и программное обеспечение, основанные на конечно-элементной технологии. Приведены примеры решения осесимметричных контактных задач.

## MATHEMATICAL MODELING THERMAL ELASTOPLASTIC CONTACT INTERACTION SYSTEM OF BODIES

M.P. GALANIN<sup>1</sup>, A.V. KRUPKIN<sup>2</sup>, V.I. KUZNETSOV<sup>2</sup>, V.V. LUKIN<sup>1</sup>, V.V.  
NOVIKOV<sup>2</sup>, A.S. RODIN<sup>1</sup>, I.V. STANKEVICH<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, Russia  
e-mail: [galan@keldysh.ru](mailto:galan@keldysh.ru), web page: <http://www.keldysh.ru>

<sup>2</sup>Joint Stock Company «A.A. Bochvar High-technology Research  
Institute of Inorganic Materials», Moscow, Russia  
e-mail: [kvi312@yandex.ru](mailto:kvi312@yandex.ru), web page: <http://bochvar.ru>

<sup>3</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia  
e-mail: [aplmex@yandex.ru](mailto:aplmex@yandex.ru), web page: <http://www.bmstu.ru>

**Summary.** The method of mathematical simulation of contact interaction of system bodies is presented. The technique is based on the finite element technology. Numerical studies of polycontact interaction of axisymmetric bodies subjected to high-temperature heat and mechanical stress were conducted.

**2010 Mathematics Subject Classification:** 76M10, 76M30, 93A30.

**Key words and Phrases:** Mathematical Modeling, Contact Problem of Elasticity Theory, Nonlinear Deformation.

## 1 Введение

Расчетное обоснование прочности и надежности различных элементов конструкций, функциональных узлов оборудования является обязательным элементом проектирования. Такому обоснованию предшествует анализ температурного и напряженно-деформированного состояний исследуемых конструкций. Очень часто такой анализ должен учитывать контактное взаимодействие различных элементов конструкций, так как именно в зонах контакта могут возникнуть концентраторы напряжений, являющиеся наиболее критичными при оценке прочности. Аналитические решения контактных задач получены для весьма ограниченного набора видов контактного взаимодействия, поэтому наиболее перспективным способом исследования являются численные методы. В данной работе приведена достаточно общая постановка задачи термомеханического контактного взаимодействия нескольких тел, описаны численные алгоритмы и показаны результаты решения нескольких демонстративных задач.

## 2 Математическая постановка краевой задачи МДТТ с учетом контакта

Рассмотрим в трехмерном пространстве  $R^3$  с декартовой системой координат  $Oxyz$ , группу тел, занимающих область  $G = \bigcup_k B_k$ , ограниченную кусочно-гладкой границей  $\partial G = \bigcup_k \partial B_k$ . В рамках данной работы предполагаем, что эффектом связности можно пренебречь, поэтому задачу теплопроводности можно решать отдельно, а полученное температурное поле использовать при решении задачи теории упругопластичности, во-первых, для учета зависимости параметров задачи от температуры, а во-вторых, для вычисления компонент тензора температурной деформации.

### 2.1 Нелинейная начально-краевая задача теплопроводности

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для нелинейного уравнения теплопроводности<sup>1</sup>:

$$c_\varepsilon(\mathbf{x}, T) \rho(\mathbf{x}, T) \frac{\partial T}{\partial t} = (k_{ij}(\mathbf{x}, T) T_{,j})_{,i} + q_v(\mathbf{x}, t, T), \quad (\mathbf{x}, t) \in G \times (0, t_M], \quad (1)$$

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x}), \quad M \in \bar{G}, \quad (2)$$

$$T(\mathbf{x}, t)|_{S_1} = T_w(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S_1 \subset \partial G, t > 0, \quad (3)$$

$$-n_i k_{ij}(\mathbf{x}, T) T_{,j}|_{S_2} = q_w(\mathbf{x}, t, T), \quad \mathbf{x} \in S_2 \subset \partial G, t > 0, \quad (4)$$

$$-n_i k_{ij}(\mathbf{x}, T) T_{,j}|_{S_3} = \alpha_w(\mathbf{x}, t, T) (T(\mathbf{x}, t) - T_f(\mathbf{x}, t)), \quad \mathbf{x} \in S_3 \subset \partial G, t > 0, \quad (5)$$

где  $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \partial G$ .

Здесь  $t$  - время;  $T_0(\mathbf{x})$  - начальная температура;  $T(\mathbf{x}, t)$  - температура;  $k_{ij}(\mathbf{x}, T)$  - компоненты тензора теплопроводности,  $q_v(\mathbf{x}, t)$  - мощность внутренних источников

(стоков),  $c_\varepsilon(\mathbf{x}, T)$  - удельная теплоемкость среды, занимающей область  $G$ ;  $\rho(\mathbf{x}, T)$  - плотность среды, занимающей область  $G$ ;  $T_w(\mathbf{x}, t)$  - температура поверхности  $S_1$ ;  $q_w(\mathbf{x}, t, T)$  - плотность теплового потока на поверхности  $S_2$ ;  $\alpha_w(\mathbf{x}, t, T)$  - коэффициент теплоотдачи на поверхности  $S_3$ ,  $T_f(\mathbf{x}, t)$  - температура среды у поверхности  $S_3$ ;  $n_i$  - компоненты единичного вектора внешней нормали  $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i$  к границе  $\partial G$ .

Запятой с индексом обозначена операция дифференцирования по пространственным координатам  $x, y, z$ .

## 2.2 Уравнение равновесия термоупругого тела

Формулировка краевой квазистатической задачи механики деформируемого твердого тела (МДТТ) в данном случае запишется так<sup>1,3</sup>:  
уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{u}, T) + Q_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in G, \quad i, j = x, y, z, \quad (6)$$

граничные условия (кинематические и силовые соответственно)

$$u_i(\mathbf{x})|_{S_u} = u_i^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_u \subset \partial G, \quad (7)$$

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{u}, T) n_j|_{S_p} = p_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_p \subset \partial G, \quad i, j = x, y, z, \quad (8)$$

соотношения Коши (для случая малых деформаций)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (9)$$

определяющие уравнения – закон Гука в виде

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^0), \quad (10)$$

здесь  $C_{ijkl}$  - компоненты тензора коэффициентов упругости,  $\sigma_{ij}$  - компоненты тензора напряжений,  $\varepsilon_{ij}$  - компоненты тензора полной деформации,  $\varepsilon_{ij}^e$  - компоненты тензора упругой деформации,  $\varepsilon_{ij}^0$  - компоненты тензора неупругой деформации,  $Q_i$  - компоненты массовой (объемной) силы - вектор перемещений точек тела,  $u_i$  - компоненты вектора перемещений;  $u_i^0$  - компоненты вектора заданных перемещений точек поверхности  $S_u$ ;  $p_i(\mathbf{x})$  - компоненты заданной распределенной нагрузки на поверхности  $S_p$  ( $S_u \cup S_p = \partial G$ ).

Для термоупругого тела компоненты тензора неупругой деформации совпадают с компонентами температурной деформации<sup>1</sup>

$$\varepsilon_{ij}^0 = \varepsilon_{ij}^T = \alpha_T (T(\mathbf{x}) - T^0(\mathbf{x})) \delta_{ij}, \quad (11)$$

где  $\alpha_T$  - коэффициент линейного теплового расширения.

### 2.3 Модель термопластического тела

Для описания термопластического материала использована модель пластического течения. В рамках данной теории делаются следующие предположения<sup>1,9</sup>:

– Приращение компонент тензора полной деформации можно представить в виде суммы приращений тензоров упругой и неупругой составляющих:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^0, \quad (12)$$

причем приращение неупругой составляющей состоит из приращений температурной и пластической деформации:

$$d\varepsilon_{ij}^0 = d\varepsilon_{ij}^T + d\varepsilon_{ij}^P. \quad (13)$$

– Материал является пластически несжимаемым:

$$d\varepsilon_{ii}^P = 0. \quad (14)$$

– Выполнен ассоциированный закон пластического течения, задающий выражение для скорости пластической деформации:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}}, \quad (15)$$

где  $\dot{\lambda}$  - некая функция, которая имеет смысл коэффициента пропорциональности, а  $f(T, \sigma'_{ij}, \varepsilon_{ij}^P)$  - функция упрочнения для данного материала.

В данной работе применялась следующая функция упрочнения Мизеса для идеального упругопластического материала<sup>1</sup>:

$$f(\sigma'_{ij}, T) = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_y^2(T), \quad (16)$$

где  $\sigma'_{ij}$  - компоненты девиатора тензора напряжений,  $\sigma_y(T)$  - предел текучести материала.

### 2.4 Постановка контактной задачи

Рассмотрим постановку контактной задачи на примере двух тел<sup>9,11</sup>. Пусть имеется два тела  $B_1, B_2$ . Пусть в результате приложения заданных нагрузок ( $P_1$  и  $P_2$  соответственно) или перемещений эти тела входят в контакт друг с другом (рис. 1).

Это означает, что они имеют общую границу  $S_c^1 = S_c^2 = \partial B_c$ , на которой выполнены условия непроникания одного тела в другое:

$$g = (\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1) \cdot \mathbf{n} \geq 0, \quad (17)$$

где  $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2$  - радиусы-векторы материальных точек тел  $B_1$  и  $B_2$ ,  $\mathbf{n}$  - вектор нормали к контактной поверхности. Величина  $g$  называется нормальным зазором между телами.

При контакте тел на границе контакта  $\partial B_c$  в (17) выполнено равенство, а при расхождении тел – неравенство.

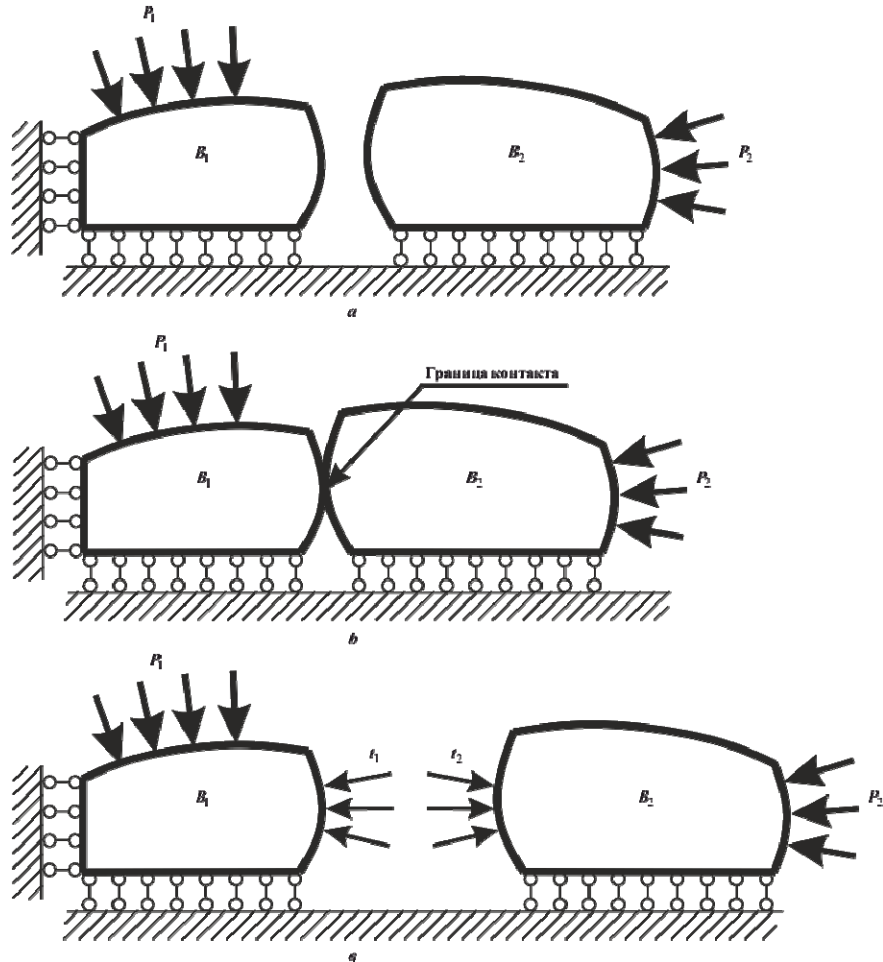


Рис. 1. Схема контакта двух тел: *a* – тела до контакта, *б* – вхождение тел в контакт, *в* – действие контактных сил

На границе контакта действуют распределенные контактные силы  $t_1$  и  $t_2$ . Для нормальных составляющих контактных сил должно быть выполнено соотношение:

$$t_n^1 = t_n^2 \leq 0, \quad (18)$$

где  $t_n^k = t_k \cdot \mathbf{n}_k$ ,  $\mathbf{n}_k$  - внешняя нормаль к границе соответствующего тела. При контакте тел нормальные силы меньше нуля, при выходе из контакта – они равны нулю. Таким образом, контактные нормальные силы могут быть только сжимающими.

Распределенные касательные контактные силы  $t_\tau^k = t_k \cdot \boldsymbol{\tau}_k$  ( $\boldsymbol{\tau}_k$  - вектор, касательный к контактной границе соответствующего тела) чаще всего определяются по закону Кулона:

$$|t_\tau^k| = \mu_d |t_n^k|, \quad (19)$$

где  $\mu_d$  - динамический коэффициент трения.

Таким образом, контактная задача представляет собой формулировку уравнений для движения двух (или более) тел с наложенными кинематическими (17) и статическими (18) ограничениями на их движение друг относительно друга.

Наличие контакта часто требует добавления к температурной задаче дополнительных условий на контактных поверхностях.

Если между телами имеется идеальный тепловой контакт, то температуры на контактных поверхностях должны быть одинаковыми и, кроме того, должны быть одинаковыми тепловые потоки. Отсюда имеем

$$T^1(\mathbf{x}, t)|_{\partial B_c} = T^2(\mathbf{x}, t)|_{\partial B_c}, \quad (20)$$

$$n_i k_{ij}^1(\mathbf{x}, T^1) T^1|_{,j}|_{\partial B_c} = n_i k_{ij}^2(\mathbf{x}, T^2) T^2|_{,j}|_{\partial B_c}, \quad (21)$$

здесь индексы 1 и 2 относятся к двум контактирующим телам,  $n_i$  – компоненты вектора общей нормали к контактной поверхности  $\partial B_c$  в точке  $\mathbf{x}$ .

В случае неидеального теплового контакта между двумя телами (например, контактные поверхности  $S_c^1$  и  $S_c^2$  разделены тонкой пленкой, вводят понятие контактного сопротивления  $R$  (или контактной проводимости  $1/R$ ). В этой ситуации равенство тепловых потоков сохраняется, но появляется пропорциональная им разность температур в сходственных точках контактных поверхностей  $S_c^1$  и  $S_c^2$ . Соответствующие граничные условия имеют вид

$$n_i^1 k_{ij}^1(\mathbf{x}, T^1) T^1|_{,j}|_{S_c^1} = \frac{1}{R} \left( T^2(\mathbf{x}, t)|_{S_c^2} - T^1(\mathbf{x}, t)|_{S_c^1} \right), \quad (22)$$

$$n_i^1 k_{ij}^1(\mathbf{x}, T^1) T^1|_{,j}|_{S_c^1} = n_i^1 k_{ij}^2(\mathbf{x}, T^2) T^2|_{,j}|_{S_c^2}, \quad (23)$$

здесь индексы 1 и 2 относятся к двум контактирующим телам,  $n_i^1$  – компоненты вектора внешней нормали к контактной поверхности  $S_c^1$  в точке  $\mathbf{x}$ .

Заметим, что величина контактного сопротивления  $R$  может зависеть от координат сходственной точки  $\mathbf{x}$ , контактного давления  $t_n$ , шероховатости поверхностей контакта, а также и от других параметров.

### 3 Численная модель для задачи термомеханики

Используемые модели являются, как правило, нелинейными, поэтому единственным методом решения полученных уравнений является численный метод. На этапе численной реализации построенных моделей использован метод конечных элементов (МКЭ)<sup>2, 4, 9</sup>. МКЭ позволяет проводить численный анализ напряженно-деформированного состояния в областях сложной геометрической формы, учитывать особенности граничных условий, теплофизических и физико-механических свойств материалов расчётных схем.

В каждом объемном элементе любую переменную можно представить в следующем виде:

$$T^{(e)} = [N_V^{(e)}] \{T^{(e)}\}, \quad (24)$$

где  $[N_V^{(e)}]$  - матрица строка функций формы (базисных функций) в объемном элементе, а  $\{T^{(e)}\} = \{T_1, \dots, T_K\}^T$  - вектор значений функции в узлах элемента,  $K$  - число узлов конечного элемента ( $e$ ).

Аналогичное представление переменной для поверхностного элемента:

$$T^{(e)} = [N_S^{(e)}] \{T_S^{(e)}\}. \quad (25)$$

### 3.1 Уравнение теплопроводности

В каждом КЭ будем использовать следующие векторно-матричные формулы для представления матрицы теплоемкости  $[C^{(e)}]$ , матрицы теплопроводности  $[K_{th}^{(e)}]$  и вектор узловых тепловых усилий  $\{R_{th}^{(e)}\}$ :

$$\{T_{,x} \quad T_{,y} \quad T_{,z}\}^T = [B_{th}^{(e)}] \{T^{(e)}\}, \quad (26)$$

$$[C^{(e)}] = \int_{G^{(e)}} c_\varepsilon \rho [N_V]^{T} [N_V] dV,$$

$$[K_{th}^{(e)}] = \int_{G^{(e)}} [B_{th}^{(e)}]^{T} [D^{(e)}] [B_{th}^{(e)}] dV + \int_{S_3^{(e)}} \alpha_w [N_S^{(e)}]^{T} [N_S^{(e)}] dS,$$

$$[D^{(e)}] = \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zz} \end{bmatrix},$$

$$\{R_{th}^{(e)}\} = \int_{G^{(e)}} q_V [N_V^{(e)}]^{T} dV - \left( \int_{S_2^{(e)}} q_w [N_S^{(e)}]^{T} dS - \int_{S_3^{(e)}} \alpha_w T_f [N_S^{(e)}]^{T} dS \right).$$

Нестационарная задача (1) – (5) после дискретизации по пространству и применения процедур метода Галеркина, сводится к решению задачи Коши для линейного матричного дифференциального уравнения 1-го порядка <sup>2, 4</sup>:

$$[C] \{\dot{T}\} + [K_{th}] \{T\} = \{R_{th}\}, \quad (27)$$

с начальным условием

$$\{T\} \Big|_{t=0} = \{T_0\},$$

где  $\{T_0\}$  – проекция функции  $T_0(\mathbf{x})$  (начального условия (2)) на узлы сетки конечно-элементной модели.

В (27) глобальный вектор температур  $\{T\}$ , глобальная матрица теплоемкости  $[C]$ , глобальная матрица теплопроводности  $[K_{th}]$  и глобальный вектор узловых тепловых усилий  $\{R_{th}\}$  собираются из соответствующих векторов и матриц в отдельных элементах.

### 3.2 Уравнение равновесия твердого тела

В каждом КЭ будем использовать следующие векторно-матричные формулы для представления вектора перемещений  $\{U^{(e)}\}$ , вектора деформации  $\{\varepsilon^{(e)}\}$ , матрицы жесткости  $[K^{(e)}]$  и вектора нагрузки  $\{R^{(e)}\}$ :

$$\{U^{(e)}\} = \{u_x^1, u_y^1, u_z^1, \dots, u_x^N, u_y^N, u_z^N\}^T = \{U_1, U_2, U_3, \dots, U_{3K-2}, U_{3K-1}, U_{3K}\}^T, \quad (28)$$

$$\{\varepsilon^{(e)}\} = \{\varepsilon_{xx}^{(e)}, \varepsilon_{yy}^{(e)}, \varepsilon_{zz}^{(e)}, \varepsilon_{xy}^{(e)}, \varepsilon_{yz}^{(e)}, \varepsilon_{xz}^{(e)}\}^T = [B^{(e)}]\{U^{(e)}\},$$

$$[K^{(e)}] = \int_{G^{(e)}} [B^{(e)}]^T [C^E] [B^{(e)}] dV,$$

$$\{R^{(e)}\} = \int_{G^{(e)}} [N_V]^T \{Q^{(e)}\} dV + \int_{S_p^{(e)}} [N_S]^T \{p^{(e)}\} dS + \int_{G^{(e)}} [B^{(e)}]^T [C^E] \{\varepsilon_0^{(e)}\} dV + \{R_{contact}^{(e)}\}.$$

Задача деформирования термоупругого тела (2.6) - (2.8) после применения метода возможных перемещений принимает вид <sup>4,9</sup>,

$$\int_G \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_{S_p} p_i \delta u_i dS = 0. \quad (29)$$

После дискретизации по пространству (29) сводится к решению следующего линейного матричного уравнения <sup>2,4</sup>:

$$[K]\{U\} = \{R\}. \quad (30)$$

В (30) глобальный вектор перемещений  $\{U\}$ , глобальная матрица жесткости  $[K]$  и глобальный вектор нагрузки  $\{R\}$  собираются из соответствующих векторов и матриц в отдельных элементах.

При решении задачи термоупругости в вектор нагрузки (28) подставляется вектор температурных деформаций  $\{\varepsilon_0^{(e)}\} = \{\varepsilon^T\}$ .

При решении задачи термопластичности применен метод начальных (дополнительных) деформаций <sup>3</sup>. Тогда в рамках итерационного процесса на  $i$ -й итерации в вектор нагрузки подставляется следующий вектор неупругой деформации:



$$\{\varepsilon_0\}^{(i)} = \{\varepsilon^T\} + \{\varepsilon^p\}^{(i-1)}. \quad (31)$$

#### 4 Методы решения контактных задач

При решении контактных задач термоупругости используют различные итерационные методы, например, метод штрафных функций, метод множителей Лагранжа, комбинированный метод штрафов и Лагранжа, метод псевдосреды, альтернирующий метод Шварца и другие<sup>5,9,11</sup>. Приведем краткое описание некоторых из этих методов.

##### 4.1 Метод множителей Лагранжа

Основная идея заключается в том, чтобы к стандартному уравнению принципа возможных перемещений (3.6), примененному к двум независимым телам, которые входят в контакт, добавить слагаемое, описывающее действие контактных сил<sup>11</sup>:

$$\int_G \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_{S_p} p_i \delta u_i dS + \delta W_c = 0. \quad (32)$$

Обычно в качестве такого слагаемого используют вариацию потенциала контактных сил следующего вида

$$W_c = \int_{\partial B_c} \mathbf{t} \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1) dS = \int_{\partial B_c} (t_n g_n + t_\tau g_\tau) dS, \quad (33)$$

$$\delta W_c = \int_{\partial B_c} (\delta \mathbf{t} \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1) + \mathbf{t} \cdot \delta (\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1)) dS = \int_{\partial B_c} (\delta t_n g_n + t_n \delta g_n + \delta t_\tau g_\tau + t_\tau \delta g_\tau) dS.$$

Здесь использованы обозначения:  $g_n = (\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1) \cdot \mathbf{n} \geq 0$  - нормальный перехлест,  $g_\tau = (\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1) \cdot \boldsymbol{\tau} \geq 0$  - касательный перехлест.

Для того, чтобы достигнуть совместности на поверхности контакта  $\partial B_c$  надо полагать  $\mathbf{t}$  - независимой величиной, т.е. вектор контактных сил играет роль множителя Лагранжа. Соответственно вектор неизвестных (компоненты перемещений в узлах сетки) нужно расширить, включив в него контактные силы в узлах, лежащих на поверхности контакта. Если в качестве контактного условия выбрано условие схватывания тел, то в качестве независимых переменных будут выступать и нормальные и касательные силы ( $t_n$  и  $t_\tau$ ). Если в качестве контактного условия выбрано условие скольжения (в том числе и без трения), то в качестве независимых переменных будут выступать только нормальные контактные силы ( $t_n$ ). Более подробно данный метод описан в<sup>9,11</sup>.

## 4.2 Метод штрафных функций

Как и в методе множителей Лагранжа, в методе штрафных функций к стандартному уравнению принципа возможных перемещений добавляется слагаемое, отвечающее за вклад контактных сил. Обычно используют потенциал контактных сил следующего вида <sup>9</sup>:

$$W_c = \int_{\partial B_c} \left( \frac{\varepsilon_n}{2} g_n^2 + \frac{\varepsilon_\tau}{2} g_\tau^2 \right) dS, \quad (34)$$

$$\delta W_c = \int_{\partial B_c} (\varepsilon_n \delta g_n + \varepsilon_\tau \delta g_\tau) dS,$$

где  $\varepsilon_n \geq 0$  и  $\varepsilon_\tau \geq 0$  - нормальный и касательный параметры штрафа.

Применение метода штрафных функций к решению контактных задач равносильно введению фиктивных пружин на границе контакта, которые предохраняют контактирующие тела от взаимного проникновения.

При выборе параметров штрафа нужно учитывать, что с одной стороны при увеличении их значений нормальный перехлест тел уменьшается (в пределе – стремится к нулю), но с другой стороны при больших параметрах штрафа матрица системы уравнений получается плохо обусловленной. Более подробно данный метод описан в <sup>9, 11</sup>.

## 4.3 Альтернирующий метод Шварца (метод декомпозиции)

Суть данного метода состоит в следующем: на первом шаге на контактных поверхностях тел задается начальное приближение для вектора перемещений (приближение выбирают из диапазона ожидаемых значений для зоны контактного взаимодействия). После решения данной задачи кинематическое условие (2.17) выполнено, но вычисленные контактные давления на противоположных поверхностях не совпадают (нарушено условие (2.18)). На следующем шаге путем коррекции добиваются равенства контактных давлений, но полученные перемещения не удовлетворяют условию (2.17). На следующей итерации снова используют скорректированные кинематические условия (совмещают контактирующие поверхности). Чередуя силовые и кинематические итерации выполняется до достижения сходимости, когда и кинематические условия и силовые на контакте (17) - (18) выполнены с заданной точностью. Более подробно данный метод описан в <sup>5, 6, 10</sup>.

## 5 Особенности программной реализации

Описанные численные алгоритмы реализованы в виде программного комплекса, написанного на языке Fortran-90. Для вычисления соответствующих интегралов по конечным элементам применено численное интегрирование. В расчетах использованы конечные элементы на сетке, состоящей из четырехугольных призм. Для решения контактных задач реализован альтернирующий метод Шварца.

## 6 Результаты расчетов

Программа проверена на следующих тестах с известным аналитическим решением: толстостенная упругая труба под действием внешнего давления <sup>7, 8</sup>, толстостенная

термоупругая труба с заданным температурным полем<sup>8</sup>, толстостенная упругопластическая труба под действием внутреннего давления<sup>3</sup>. Проведенные тесты показали, что численные решения хорошо совпадают с аналитическими, при измельчении сетки ошибка уменьшается.

В работе<sup>12</sup> приведены расчеты контактных задач методом Шварца в двумерной (осесимметричной) постановке.

Рассмотрим контактное взаимодействие группы из 3 тел: два полых цилиндра с фасками на внешних поверхностях установлены один на другом внутри толстостенной трубы с зазором  $\delta=0,01$  мм. Линейная мощность тепловыделения в полых цилиндрах линейно менялось по времени до предельного значения  $q_L=45$  кВт/м. Температура наружной поверхности трубы полагалась: постоянной:  $T_w=623$  К. Между внешними поверхностями цилиндров и внутренней стенкой трубы поставлено условие неидеального теплового контакта с тепловой проводимостью  $25$  кВт/м<sup>2</sup>/К. На других поверхностях тел задано условие теплоизоляции. Нижние торцы трубы и нижнего цилиндра закреплены в направлении оси Oz. На наружной поверхности трубы задано постоянное давление  $p_r=16$  МПа. На верхнем торце верхнего цилиндра задано постоянное давление  $p_z=10$  МПа. Полные цилиндры считались термоупругими телами, а труба – термопластическим телом. В качестве условий на поверхности контактирующих тел выбрано условие скольжения без трения. Задача решена для сектора  $90^\circ$  (на боковых торцах поставлено условие симметрии) в двух вариантах: для осесимметричного распределения тепловыделения в полых цилиндрах (при таких условиях вся задача является осесимметричной) и для случая, когда распределение тепловыделения не является осесимметричным.

### 6.1 Результаты расчета для осесимметричного случая

В полых цилиндрах задано равномерное объемное тепловыделение:  $q_V = \frac{q_L}{S}$  ( $S$  - площадь поперечного сечения). Ниже приведены распределения различных физических величин в телах после выхода решения на стационарный уровень.

На рис. 2 показаны распределения полных радиальных и осевых перемещений (в миллиметрах), а также температуры (в Кельвинах) в расчетной области. Из рисунка видно максимальная температура получена на внутренней поверхности цилиндров. На границе контакта цилиндров, осевые перемещения двух тел совпадают. Поскольку в начальный момент времени между цилиндрами и трубой присутствовал зазор, то полные радиальные перемещения на соответствующей границе контакта различаются.

На рис. 3 показаны распределения компонент тензора напряжений (в МПа) в цилиндрической системе координат. Из рисунков видно, что компонента  $\sigma_{rr}$  меняется непрерывно при переходе через границу контакта таблеток и оболочки, а компонента  $\sigma_{zz}$  меняется непрерывно при переходе через границу контакта двух таблеток. Максимальное контактное давление возникает в районе контакта трубы с основаниями фасок.

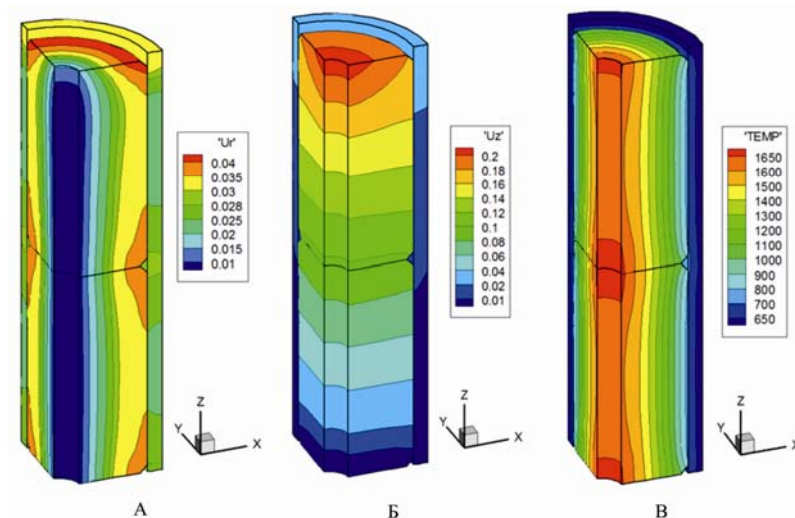


Рис. 2. А - радиальные перемещения, Б - осевые перемещения, В - поле температур

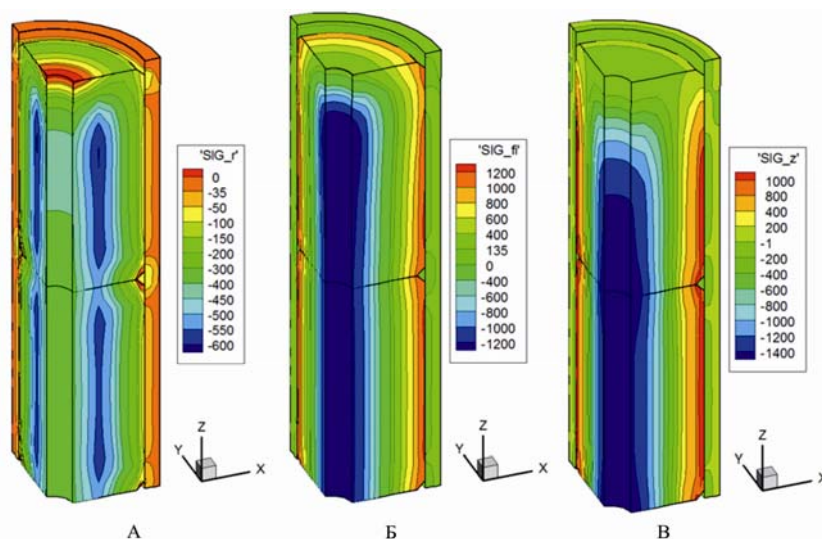


Рис. 3. Компоненты тензора напряжений: А -  $\sigma_{rr}$ , Б -  $\sigma_{\varphi\varphi}$ , В -  $\sigma_{zz}$

На рис. 4А и 4Б показаны распределения радиальной компоненты тензора пластической деформации и интенсивности пластической деформации. На рисунке представлена только труба, поскольку только она (по условиям постановки задачи) является термопластическим телом. Из рисунков видно, что максимальные пластические деформации возникают на внутренней поверхности в районе контакта трубы с основаниями фасок цилиндров (именно там действуют максимальные радиальные напряжения). На рис. 4В показана сетка из четырехугольных призм, использованная в расчетах.

Приведенные результаты расчетов демонстрируют, что в условиях осесимметричного нагружения в исследуемых телах образуются осесимметричные поля температур,

перемещений, деформаций и напряжений. Данный факт свидетельствует о корректности использованных моделей и алгоритмов.

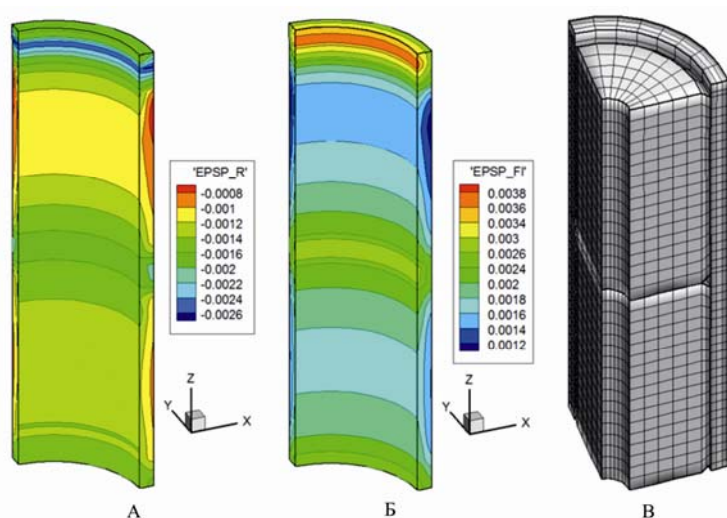


Рис. 4. А – радиальные пластические деформации ( $\varepsilon_{rr}^p$ ),  
 Б – интенсивность пластических деформаций, В – расчетная сетка

## 6.2 Результаты расчета с зависимостью от угла

В полых цилиндрах задано неравномерное объемное тепловыделение (плоскость симметрии соответствует углу  $45^0$ ):  $q_V = \frac{q_L}{S} \frac{(1 + 20\sin 2\varphi)}{15}$ . Ниже приведены распределения различных физических величин в телах после выхода решения на стационарный уровень. На рис. 5 показаны распределения полных радиальных и осевых перемещений, а также температуры в расчетной области. На рис. 6 показаны распределения компонент тензора напряжений (во всей расчетной области и в одном из сечений). На рис. 7 показаны распределения радиальной и окружной пластической деформации, а также интенсивности пластической деформации в трубе.

Из сравнения с аналогичными величинами в первом расчете (рис. 2 - 4) видно, что неравномерное тепловыделение приводит к неравномерному (по углу) распределению данных величин. Причем, так как тепловыделение симметрично относительно плоскости с углом  $45^0$ , то и все поля физических величин также имеют аналогичную плоскость симметрии. Максимальная температура по-прежнему достигается на внутренней поверхности цилиндров, а максимальные контактные давления и соответственно максимальные пластические деформации возникают в районе контакта трубы с основаниями фасок цилиндров.

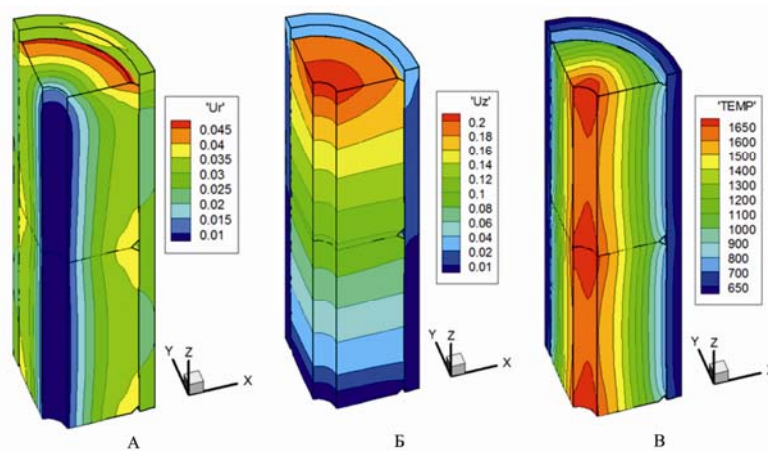


Рис. 5. А – радиальные перемещения, Б – осевые перемещения, В – поле температур

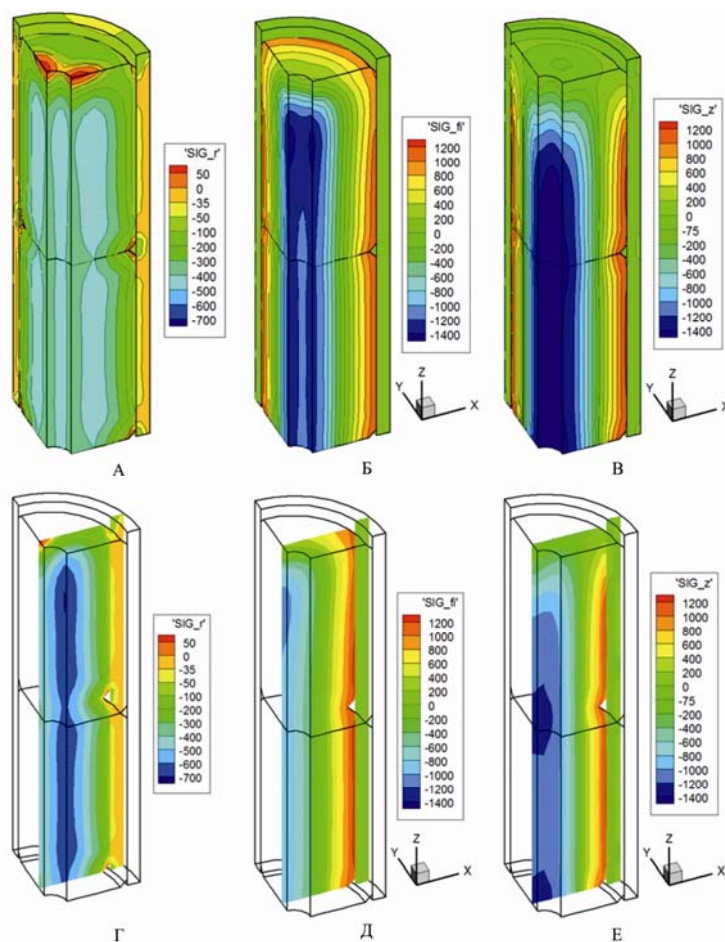


Рис. 6. Компоненты тензора напряжений: А -  $\sigma_{rr}$ , Б -  $\sigma_{\varphi\varphi}$ , В -  $\sigma_{zz}$ ,  
 Г -  $\sigma_{rr}$  (в сечении), Д -  $\sigma_{\varphi\varphi}$  (в сечении), Е -  $\sigma_{zz}$  (в сечении)

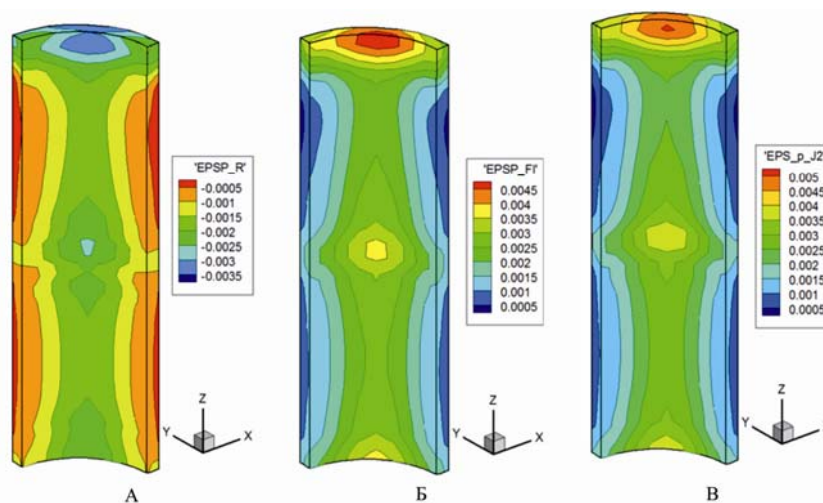


Рис. 7. А – радиальные пластические деформации ( $\varepsilon_{rr}^p$ ),

Б – окружные пластические деформации ( $\varepsilon_{\varphi\varphi}^p$ ), В – интенсивность пластических деформаций

## 7 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена математическая модель термомеханического контактного взаимодействия тел в трехмерной постановке. Приведено описание численных алгоритмов решения задач термомеханики на основе метода конечных элементов, проведен краткий обзор методов решения контактных задач. Продемонстрированы результаты трехмерных расчетов контактного взаимодействия 3 тел в условиях осесимметричного нагружения и нагружения, зависящего от угловой координаты.

## REFERENCES

- [1] V.S. Zarubin and G.N. Kuvyrkin, *Mathematical models of mechanics and electrodynamics of continuous media*. M.: BMSTU, (2008).
- [2] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, *The finite element method*, McGraw Hill, Vol. I., (1989), Vol. II, (1991).
- [3] N. N. Malinin, *Applied theory of plasticity and creep*. M: Mashinostroenie, (1975).
- [4] K.-J. Bathe, *Finite Element Method*. M.: Fizmatlit, (2010).
- [5] L.B. Zwick. “Principle of rotating in problems of conjugation and contact of solid deformable bodies”, *Applied mechanics*, **XVI**, **1**, 13 – 18 (1980).
- [6] L.B. Zwick, V.K. Pogodin, L.M. Pinchuk, “To selecting the parameters of iterative methods conjugation of solutions of the contacting bodies”, *Problems of Strength*, **9**, 112 – 115, (1985).
- [7] V.I. Feodosiev, *Resistance of materials*. M.: BMSTU, (2010).
- [8] S. P. Timoshenko, J. Gudier, *Theory of elasticity*. M: Fizmatlit, (1975).
- [9] S.N. Korobeynikov, *Nonlinear deformation of solid bodies*. Novosibirsk: Publishing house of SB RAS, (2000).
- [10] I.V. Stankevich, M.E. Yakovlev, Si Tu Htet, “Development of algorithm of contact interaction on the basis of alternating Schwarz method”, *Vestnik BMSTU, Ser. Natural Sciences, Spec. Vol. “Applied mathematics”*, 134-141 (2011).
- [11] P. Wriggers, *Computational Contact Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (2006).

- [12] S.M. Bogatyr, M.P. Galanin, A.V. Krupkin, V.I. Kuznetsov, V.V. Lukin, V.V. Novikov, A.S. Rodin, I.V. Stankevich, M.E. Yakovlev, “Mathematical modeling of thermoelastic contact interaction of axisymmetric bodies”, *Engineering journal: Science and Innovations*, **4**, (2013), URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/667.html>.

Поступила в редакцию 15 июня 2014 года.



The journal *Mathematica Montisnigri* publishes original scientific works from all fields of mathematics and mathematical modelling which comprise new and significant results with complete proofs, which are of interest for a larger mathematical community. It also contains expository articles. The journal does not publish works of polemical or methodological interest, as well as works that have been offered for publishing in other journals. The journal publishes papers in English, Russian, French and German. It is usually issued thrice a year.

*Instructions to the authors:*

Authors should submit the Manuscript electronically at the address:

**zarkop@ac.me,**

**borkov@ac.me,**

**orgcom@LPpM3.ru.**

The paper should be prepared in MS Word by the instructions, which can be found at the web page: [lppm3.ru/en/pub/manusc](http://lppm3.ru/en/pub/manusc) .

The file has to be translated into Portable Document Format (PDF) before submission to the Editorial board of the journal.

The papers should have a precise and informative title. 2010 Mathematics Subject Classification and Key words and Phrases should be included at the bottom of first page of the paper.

Theorems, other statements and formulae must be clearly marked, separating the results of the authors from the already known results. The list of references has to be enclosed in alphabetical or chronological order at the end of the paper as well as the affiliation of the author.

Subscription for one volume is 40 USA dollars for institutions and 20 USA dollars for individuals.

For subscriptions and exchange please refer to the above address.

---

Computer processing of the press Olga Koroleva, Moscow, Russia.  
Print: AP Print, Podgorica, Montenegro.

CIP – Каталогизација у публикацији  
Централна народна библиотека, Цетиње, 51(05)

MATHEMATICA Montisnigri = Математика Црне Горе/  
главни и одговорни уредник Жарко Павићевић. - Књ. 1  
(1993) - Подгорица (Џорџа Вашингтона бб) : Друштво  
математичара и физичара Црне Горе: Природно –  
математички факултет Универзитета Црне Горе, 1993 –  
(Подгорица: АП Принт). - 30 cm

Три пута годишње. – Текст на руском и енг. језику.

ISSN 0345-2238 – Mathematica Montisnigri  
COBISS.CG-ID 150244359