MATHEMATICA MONTISNIGRI
Vol XXX (2014) 25-36

# О МОДЕЛИРОВАНИИ ВЯЗКОУПРУГОГО ТЕЛА С ТОНКИМ ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

**Т.С. ПОПОВА**

Северо-Восточный федеральный университет имени М.К.Аммосова (СВФУ)
Якутск, Россия
e-mail: ptsokt@mail.ru

**Ключевые слова:** вязкоупругость, трещина, краевые задачи, уравнения с частными производными, вариационное неравенство, краевые условия типа неравенств.

**Аннотация.** Рассматривается задача о равновесии двумерного вязкоупругого тела, имеющего отслоившееся тонкое жесткое включение. Дифференциальная постановка задачи содержит краевые условия типа неравенств, а также интегральное условие, описывающее равновесие жесткого включения. Исследованы случаи, когда включение не пересекает внешнюю границу, а также случай пересечения под нулевым углом. Доказана однозначная разрешимость поставленных задач.

# ON THE MODELING OF THIN RIGID INCLUSION IN THE VISCOELASTIC BODY

**T.S. POPOVA**

Ammosov North-Eastern Federal University (NEFU)
Yakutsk, Russia
e-mail: ptsokt@mail.ru

**Summary.** We consider a problem of two-dimensional equilibrium viscoelastic body with a thin rigid inclusion. Differential formulation of the problem includes the integral condition, taking into account the impact of external forces on the rigid part. Equivalent variational formulation allows us to study solvability of the problem, as well as the qualitative properties of the solutions, with which unique solvability of the original problem is proved.

**2010 Mathematics Subject Classification:** 35A01, 35A15, 35B65.
**Key words and Phrases:** viscoelasticity, crack, boundary value problem, partial differential equations, variational inequality, unequality type boundary conditions.

## 1 ВВЕДЕНИЕ

Моделирование тел с неоднеродностями, такими, как трещины и включения существенно усложняет задачу, как в плане постановки, так и с точки зрения исследования качественных свойств решений. Вязкоупругое тело с отслоившимся тонким жестким включением моделируется как задача о равновесии тела с трещиной вдоль кривой, описывающей форму включения. Тогда рассматриваются два берега трещины (разреза), на одном из которых имеется тонкое жесткое включение. На берегах, как на части границы задаются краевые условия. Классический подход предполагает задание на границе условий в виде равенств: условия на перемещения или задание значений нормальных напряжений.

В данной работе рассматривается задача, в которой на берегах трещины заданы краевые условия вида неравенств, предложенные в работах А.М.Хлуднева[1,2] и имеющие физическую интерпретацию. Эти условия исключают взаимное проникание точек противоположных берегов трещины друг в друга. Поскольку поставленная таким образом задача становится нелинейной, то необходимо разрабатывать специальные подходы к ее исследованию. Для упругих случаев изучен щирокий спектр вопросов, связанных с разрешимостью подобных задач, оптимальным управлением формой и раскрытием трещины, получены формулы, аналогичные критерию Гриффитса. Исследование задач в упругом случае основано на приведении ее к эквивалентному виду задачи минимизации функционала энергии на некотором выпуклом множестве перемещений. Далее задача сводится к вариационному неравенству, позволяющему исследовать свойства решений. Для вязкоупругого случая сформулировать аналогичную задачу минимизации функционала не удается, однако, метод вариационных неравенств, также оказывается применим. С помощью этого метода доказано существование решения, а также дополнительные свойства решений. Заметим, что дополнительная особенность решений при этом возникает вследствия наличия тонкого жесткого включения по берегу трещины.

В первой части работы рассмотрен случай, когда отслоившееся включение не выходит на внешнюю закрепленную границу тела. Выводы этой части применимы и в случае пересечения внешней границы под ненулевым углом. Во второй части рассмотрено пересечение включения с внешней границей под нулевым углом, в этом случае прямое применение метода вариационных неравенств невозможно. Для доказательства разрешимости применен метод фиктивных областей.

## 2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть вязкоупругое двумерное тело занимает в естественном недеформированном состоянии область $\Omega \subset R^2$ с гладкой границей $\Gamma$ и вектор $u = (u_1, u_2)$ задает перемещения точек этого тела.

Введем соотношения для компонент тензоров малых деформаций и напряжений по формулам:

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),\ u = u(x,t), x \in \Omega, t \in (0,T),$$

$$\sigma_{ij}(t,x) = a_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}(u(t,x)) + \int_0^t b_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}(u(\tau,x))d\tau, i, j = 1,2. \quad (1)$$

Здесь и далее предполагается, что по повторяющимся индексам производится суммирование. Коэффициенты $a_{ijkl}(x), b_{ijkl}(x) \in L^\infty(\Omega)$, $i, j, k, l = 1,2$ - компоненты тензоров $A$ и $B$, обладающих свойствами симметрии и положительной определенности:

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij},$$

$$a_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geq c_0 |\xi|^2, \forall \xi_{ij} = \xi_{ji},\ c_0 - const > 0.$$

Аналогичные соотношения выполнены для компонент тензора $B$.

Введенные уравнения соответствуют закону, характеризующему вязкоупругое состояние тела:

$$\dot{\sigma} = A\dot{\varepsilon} + B\varepsilon,$$

где $\dot{v}$ обозначает дифференцирование по временной переменной.

Отметим, что в отличие от уравнений равновесия, используемых вместе с законом Гука (упругое состояние), в рассматриваемой задаче величины компонент тензоров деформаций и напряжений не могут быть вычислены локально по $t$, а зависят от полной истории нагружения.

Квазистационарные краевые задачи, в уравнениях которых использованы соотношения, аналогичные (1), исследованы в работах А.М.Хлуднева, В.А. Ковтуненко, Т.С.Поповой[1-4].

Рассматриваемое вязкоупругое тело имеет трещину, форма которой задается кривой $\gamma \subset \Omega$. Кривая $\gamma$ - гладкая, незамкнутая, без самопересечений и не содержит концевых точек. Обозначим через $n = (n_1, n_2)$ единичный вектор нормали к $\gamma$.

Таким образом, тело с трещиной занимает область $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \gamma$ (рис.1), и соответственно задачу будем рассматривать в цилиндре $Q_\gamma = \Omega_\gamma \times (0,T)$.

Пусть кривую $\gamma$ можно продолжить до пересечения с $\Gamma$ таким образом, чтобы область $\Omega_\gamma$ была разбита на две подобласти $\Omega^+$ и $\Omega^-$ и при этом $meas(\Gamma \cap \partial\Omega^\pm) \neq 0$. Трещина имеет два берега $\gamma^+$ и $\gamma^-$, определяемые в соответствии с направлением нормали $n$ таким образом, что $n^-$ - нормаль к $\gamma^-$ совпадает с $n$, тогда $n^+ = -n$. Будем считать, что области $\Omega^\pm$ обозначены таким образом, что $\gamma^+ \subset \partial\Omega^+$ и $\gamma^- \subset \partial\Omega^-$.

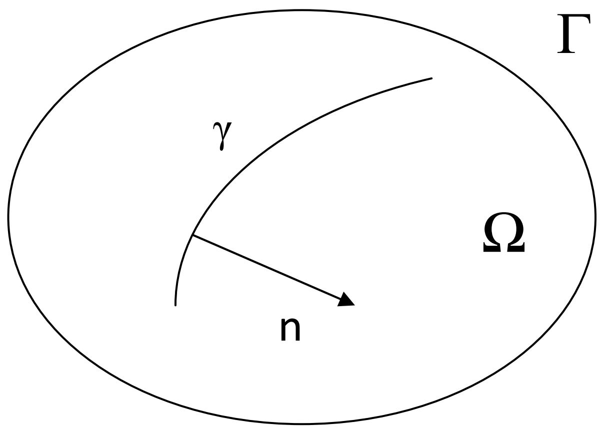


Рис.1. Вязкоупругое тело с тонким жестким включением

Для моделирования двумерного тела с отслоившимся тонким жестким включением будем использовать модель тела с трещиной, на одном из берегов которой имеется жесткое включение. Понятие "жесткое включение" в рамках данной модели описывается следующим образом. Введем так называемое пространство жестких инфинитезимальных перемещений $R(\gamma)$ вида[5]:

$$R(\gamma) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2) \mid \rho(x) = Dx + G, \quad x \in \gamma\},$$

где

$$D = \begin{pmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{pmatrix}, G = (g^1, g^2), d, g^1, g^2 - const.$$

Также введем пространство

$$R_\gamma = \{\rho = (\rho_1, \rho_2) \mid \rho(t,x) = D(t)x + G(t) \quad на \quad \gamma \times (0,T)\},$$

где

$$D(t) = \begin{pmatrix} 0 & d(t) \\ -d(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad G(t) = (g^1(t), g^2(t)), \quad d, g^1, g^2 \in L^2(0,T).$$

Функция $u(x,t)$ - одно из неизвестных в задаче и в текущий момент времени может принимать различные значения на берегах трещины. Используя обозначения $u^+$ и $u^-$ для значений функции $u$ на $\gamma^+$ и $\gamma^-$ соответственно, введем следующее обозначение для скачка функции на $\gamma$[1]:

$$[u] = u^+ - u^-.$$

Будем говорить, что вязкоупругое тело содержит тонкое жесткое включение на одной из сторон трещины, если функции $u$ на $\gamma^- \times (0,T)$ совпадают с некоторым элементом пространства $R_\gamma$:

$$u = \rho^0 \; на \; \gamma^- \times (0,T), \; \rho^0 \in R_\gamma.$$

При этом на перемещения точек обоих берегов накладываются условия непроникания, имеющие вид:

$$[u]n \ge 0 \quad на \quad \gamma \times (0,T).$$

Данное условие исключает проникание точек противоположных берегов трещины друг в друга. Задачи с условиями непроникания носят нелинейный характер, общие подходы к исследованию этих проблем можно найти в монографиях[2,5]. Для случаев упругих тел с отслоившимся тонким жестким включением рассмотрены задачи равновесия, исследованы качественные свойства решений, а также задачи оптимального управления формой трещины по краю тонкого включения [5-11].

Дифференциальную постановку задачи будем рассматривать в следующем виде.

В цилиндре $Q_\gamma$ найти функции $u$, $u = \rho^0$ на $\gamma^- \times (0,T)$, $\rho^0 \in R_\gamma$, а также функции $\sigma_{ij}$, $i,j = 1,2$, для которых выполняется:

$$-\frac{\partial \sigma_{ij}(t,x)}{\partial x_j} = f_i(t,x), \quad i = 1,2 \quad в \ Q_\gamma, \tag{2}$$

$$\sigma_{ij}(t,x) = a_{ijkl}(x)\,\varepsilon_{kl}(u(t,x)) + \int_0^t b_{ijkl}(x)\,\varepsilon_{kl}(u(\tau,x))\,d\tau, \qquad i,j = 1,2, \quad в \ Q_\gamma, \tag{3}$$

$$u\,(t,x) = 0 \quad на \ \Gamma \times (0,T), \tag{4}$$

$$[u\,(t,x)]\,n\,(x) \ge 0, \ u^-(t,x) = \rho_0(t,x), \ \sigma_n^+(t,x) \le 0, \ \sigma_s^+(t,x) = 0 \quad на \ \gamma \times (0,T), \tag{5}$$

$$\sigma_n^+(t,x)\,[u(t,x)]\,n\,(x) = 0 \quad на \ \gamma \times (0,T), \tag{6}$$

$$\int_\gamma [\sigma_{ij}(t,x)\,n_j(x)]\overline{\rho}_i(x)\,dS = 0, \qquad \forall \overline{\rho} \in R(\gamma) \quad п.в. \ t \in (0,T). \tag{7}$$

Здесь $\sigma_{ij}(t,x)n_j(x) = \sigma_n(t,x)\,n_i\,(x) + \sigma_{s\,i}(t,x)$, $\sigma_n(t,x) = \sigma_{ij}(t,x)\,n_j(x)\,n_i(x)$. Уравнения (2) - уравнения равновесия при заданных внешних нагрузках $f = (f_1, f_2)$, соотношения (3) - уравнения, описывающие вязкоупругое состояние. Краевое условие (4) задает закрепление тела на границе. Условие (7) суть уравнение равновесия тонкого жесткого включения в каждый момент времени.

Введем функциональные пространства

$$H^1_\Gamma(\Omega_\gamma) = \{v \in H^1(\Omega_\gamma) \mid v = 0 \quad на \ \Gamma, \quad v = \rho \ на \ \gamma^-, \ \rho \in R(\gamma)\},$$

$$H_\gamma = \{v = (v_1, v_2) \in L^2(0,T; H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)) \mid v = 0 \quad на \ \Gamma \times (0,T), \quad v = \rho \ на \ \gamma^- \times (0,T), \ \rho \in R_\gamma\}.$$

Обозначим через $V^*$ пространство, сопряженное к $H_\gamma$ и введем также линейный оператор

$$\Lambda: \qquad H_\gamma \quad \to \quad V^*,$$

имеющий вид

$$(\Lambda u, \overline{u}) = \int_0^T \int_{\Omega_\gamma} a_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}(u(t,x))\varepsilon_{ij}(\overline{u}(t,x))dxdt +$$

$$\int_0^T \int_{\Omega_\gamma} \int_0^t b_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}(u(\tau,x))\varepsilon_{ij}(\overline{u}(t,x))d\tau dxdt, \quad \overline{u} \in H_\gamma.$$

Рассмотрим выпуклое замкнутое множество в $H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)$

$$K_\gamma = \{v \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma) \mid [v]n \ge 0 \ \ на \ \ \gamma\},$$

и введем множество допустимых перемещений в следующем виде

$$\mathbf{K}_\gamma = \{v \in H_\gamma \mid v(t) \in K_\gamma \quad п.в. \ \ t \in (0,T)\}.$$

## 3 ВКЛЮЧЕНИЕ, НЕ ПЕРЕСЕКАЮЩЕЕ ВНЕШНЮЮ ГРАНИЦУ

Пусть $\gamma$ и $\Gamma$ не пересекаются, т.е. тонкое включение не имеет выхода на внешнюю границу. В этом случае продолжение $\gamma$ до $\Gamma$ разбивает область $\Omega_\gamma$ на две подобласти $\Omega^\pm$ с липшицевыми границами.

**Теорема 1.** Пусть $f(t,x) \in H^1(0,T;L^2(\Omega))$. Тогда задача (2)-(7) имеет единственное решение $u(t,x) \in H_\gamma$, $\sigma_{ij}(t,x) \in L^2(Q_\gamma)$, такое, что $u_t(t,x) \in L^2(0,T;H^1_\Gamma(\Omega_\gamma))$.

Для доказательства теоремы сначала докажем лемму о существовании единственного решения вариационного неравенства для оператора $\Lambda$. Далее мы покажем, что указанное вариационное неравенство является эквивалентной формулировкой задачи (2)-(7). Тем самым будет доказана однозначная разрешимость поставленной краевой задачи. Отметим, что в работах[2,5,12-17] можно найти описание вариационных методов и их применение в теории упругости и вязкоупругости.

**Лемма 1.** Существует единственное решение $u(t,x)$ вариационного неравенства

$$u \in \mathbf{K}_\gamma, \quad (\Lambda u, v-u) \ge \int_0^T \int_{\Omega_\gamma} f(v-u)\ dx\ dt, \quad \forall v \in \mathbf{K}_\gamma. \tag{8}$$

**Доказательство леммы 1.**

Здесь и далее для краткости не будем указывать зависимость функций от пространственной переменной $x$, т.е. введем следующие обозначения для рассматриваемого оператора:

$$(\Lambda u, \bar{u}) = \int_0^T \int_{\Omega_\gamma} A\varepsilon(u(t))\ \varepsilon(\bar{u}(t))\ dxdt + \int_0^T \int_{\Omega_\gamma} \int_0^t B\varepsilon(u(\tau))\ \varepsilon(\bar{u}(t))\ d\tau dx\ dt,\ \ \bar{u} \in H_\gamma.$$

Прежде всего заметим, что в силу липшицевости в областях $\Omega^\pm$ выполнено первое неравенство Корна[18], а значит справедлива оценка

$$\int_{\Omega_\gamma} \varepsilon(v)\ \varepsilon(v)\ dx \ge c_1 \|v\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)}, \quad \forall v \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma), \tag{9}$$

с постоянной $c_1$, не зависящей от $v$. Отсюда будем иметь:

$$(\Lambda u, u) = \int_0^T \int_{\Omega_\gamma} A\varepsilon(u(t))\varepsilon(u(t))dx\ dt + \int_0^T \int_{\Omega_\gamma} \int_0^t B\varepsilon(u(\tau))\varepsilon(u(t))d\tau dx\ dt =$$

$$= \int_0^T \int_{\Omega_\gamma} A\varepsilon(u(t))\varepsilon(u(t))dx\ dt + \frac{1}{2}\int_{\Omega_\gamma} B\varepsilon\Big(\int_0^T u(t)dt\Big)\varepsilon\Big(\int_0^T u(t)dt\Big)dx \ge c_2 \|u\|^2_{H_\gamma}. \tag{10}$$

Следовательно,

$$\frac{(\Lambda u, u)}{\|u\|_{H_\gamma}} \to +\infty, \qquad \|u\|_{H_\gamma} \to +\infty,$$

т.е. $\Lambda$ - коэрцитивный оператор. Учитывая его монотонность и непрерывность, можно сделать вывод, что $\Lambda$ псевдомонотонен. Отсюда следует[17] (теорема 8.2, гл.2, п.8.2), что решение задачи (8) существует. В силу строгой монотонности оператора, решение единственно. Лемма доказана.

Можно получить также эквивалентную формулировку задачи (8) в виде

$$u \in K_\gamma, \quad \int_{\Omega_\gamma} A\varepsilon(u(t))\varepsilon(\bar{v}-u(t))dx + \int_{\Omega_\gamma}\int_0^t B\varepsilon(u(\tau))\varepsilon(\bar{v}-u(t))d\tau dx \geq$$

$$\geq \int_{\Omega_\gamma} f(t)(\bar{v}-u(t))dx, \quad \forall \bar{v} \in K_\gamma, \quad t \in (0,T). \tag{11}$$

а также оценку

$$\|u_t(t)\|^2_{H_\gamma} \leq c_3\left(\|f_t(t)\|^2_{L^2(Q)} + \|f(t)\|^2_{L^2(Q)}\right). \tag{12}$$

**Доказательство теоремы 1.**

Для завершения доказательства теоремы отметим, что при условии достаточной гладкости решений из вариационного неравенства (8) можно получить уравнения и неравенства (2)-(7) и обратно. Таким образом, задача (2)-(7) эквивалентна (8). Отсюда ввиду эквивалентности исходная задача однозначно разрешима. Теорема доказана.

## 4 ВКЛЮЧЕНИЕ, ВЫХОДЯЩЕЕ НА ВНЕШНЮЮ ГРАНИЦУ ПОД НУЛЕВЫМ УГЛОМ

Рассмотрим задачу, аналогичную (2)-(7), но при условии, что $\bar{\gamma}$ пересекает внешнюю границу $\Gamma$ в одной точке $x_0$ под нулевым углом (рис.2).

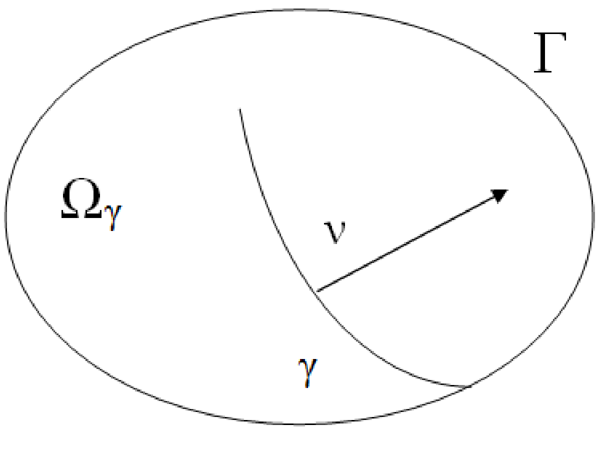


Рис.2. Тонкое жесткое включение, выходящее на внешнюю границу под нулевым углом

В этом случае неравенство Корна неприменимо, так как разбиение на области $\Omega^+$ и $\Omega^-$ с липшицевыми границами невозможно, а значит оценку вида (10) получить не удается.

Для доказательства разрешимости применим метод фиктивных областей.

Построим дополнительную область $\Omega_0$, как показано на рис.3 и введем следующие обозначения:

$$\Sigma = \partial\Omega \cap \partial\Omega_0, \quad \Sigma^0 = \Sigma \setminus \partial\Sigma, \quad \Omega^\gamma = \Omega_\gamma \cup \Omega_0 \cap \Sigma^0, \quad \widetilde{\Gamma} = (\partial\Omega^\gamma) \setminus \gamma^\pm.$$

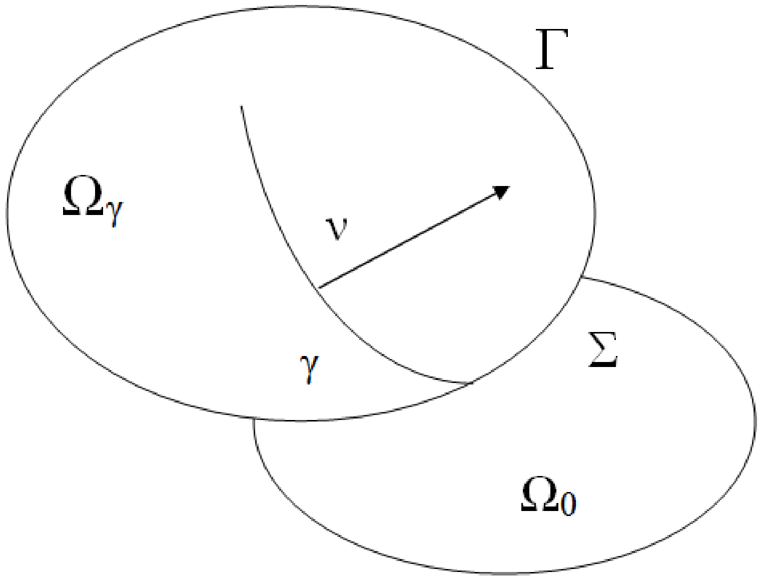


Рис.3. Построение фиктивной области

Таким образом, будем рассматривать задачу о равновесии вязкоупругого тела, занимающего область $\Omega^\gamma$ с трещиной $\gamma$ и тонким жестким включением на одном из берегов трещины.

Для параметра $\lambda > 0$ введем тензора $A^\lambda = \{a^\lambda_{ijkl}\}$ и $B^\lambda = \{b^\lambda_{ijkl}\}$ по формулам

$$A^\lambda = \begin{cases} A, & в\ \Omega_\gamma \\ \dfrac{1}{\lambda} A, & в\ \Omega_0 \end{cases}, \quad B^\lambda = \begin{cases} B, & в\ \Omega_\gamma \\ \dfrac{1}{\lambda} B, & в\ \Omega_0 \end{cases}.$$

Дифференциальную постановку сформулируем в следующем виде. В цилиндре $Q^\gamma = \Omega^\gamma \times (0,T)$ найти функции $u^\lambda$, $u^\lambda = \rho_0^\lambda$ на $\gamma^- \times (0,T)$, $\sigma^\lambda_{ij}$, $i,j = 1,2$ такие, что

$$-\frac{\partial \sigma^\lambda_{ij}(t,x)}{\partial x_j} = f_i(t,x), \quad i = 1,2 \quad в\ Q^\gamma, \tag{13}$$

$$\sigma^\lambda_{ij}(t,x) = a^\lambda_{ijkl}(x)\, \varepsilon_{kl}(u^\lambda(t,x)) + \int_0^t b^\lambda_{ijkl}(x)\, \varepsilon_{kl}(u^\lambda(\tau,x))d\tau, i,j = 1,2, \quad в\ Q^\gamma, \tag{14}$$

$$u^\lambda(t,x) = 0 \quad на\ \widetilde{\Gamma} \times (0,T), \tag{15}$$

$$[u^\lambda(t,x)]\, n\,(x) \ge 0,\ (u^\lambda)^- = \rho_0^\lambda(t,x), \quad (\sigma^\lambda_n)^+ \le 0,\ (\sigma^\lambda_s)^+ = 0 \quad на\ \gamma \times (0,T), \tag{16}$$

$$(\sigma^\lambda_n)^+ [u^\lambda(t,x)]\, n\,(x) = 0 \quad на\ \gamma \times (0,T), \tag{17}$$

$$\int\limits_{\gamma}[\sigma_{ij}^{\lambda}(t,x)\,n_j(x)]\overline{\rho}_i(x)\;dS=0,\;\;\forall\overline{\rho}\in R(\gamma)\quad п.в.\;\;t\in(0,T). \tag{18}$$

Введем функциональные пространства для задачи (13)-(18):

$$\widetilde{H}^1(\Omega^{\gamma})=\{v\in H^1(\Omega^{\gamma})\,|\,v=0\quad на\;\;\widetilde{\Gamma},\;\;v=\rho\;\;на\;\;\gamma^{-},\;\;\rho\in R(\gamma)\},$$

$$H^{\gamma}=\{v=(v_1,v_2)\in L^2(0,T;\widetilde{H}^1(\Omega_{\gamma}))\,|\,v=0\;\;на\;\;\widetilde{\Gamma}\times(0,T),\,v=\rho\;\;на\;\;\gamma^{-}\times(0,T),\;\;\rho\in R_{\gamma}\}.$$

Обозначим через $V'$ пространство, сопряженное к $H^{\gamma}$ и введем линейный оператор

$$\Lambda^{\gamma}:\qquad H^{\gamma}\;\;\to\;\;V',$$

имеющий вид

$$(\Lambda^{\gamma}u,\overline{u})=\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega^{\gamma}}a_{ijkl}^{\lambda}(x)\varepsilon_{kl}(u(t,x))\varepsilon_{ij}(\overline{u}(t,x))dxdt+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega^{\gamma}}\int\limits_0^t b_{ijkl}^{\lambda}(x)\;\varepsilon_{kl}(u\;(\tau,x))\;\varepsilon_{ij}(\overline{u}\;(t,x))d\tau dxdt,\;\;\overline{u}\in H^{\gamma}.$$

Рассмотрим выпуклое замкнутое множество

$$K^{\gamma}=\{v\in\widetilde{H}^1(\Omega^{\gamma})\,|\,[v]n\geq0\;\;на\;\;\gamma\},$$

и введем множество допустимых перемещений в следующем виде

$$\mathbf{K}^{\gamma}=\{v\in H^{\gamma}\;|\;v\;(t)\in K^{\gamma}\;\;п.в.\;\;t\in(0,T)\}.$$

Заметим, что при каждом фиксированном $\lambda$ задача (13)-(18) полностью аналогична задаче (2)-(7), поэтому имеет единственное решение и эквивалентна вариационному неравенству

$$u^{\lambda}\in\mathbf{K}^{\gamma},\quad(\Lambda^{\gamma}u^{\lambda},v-u^{\lambda})\geq\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega^{\gamma}}f(v-u^{\lambda})d\Omega_{\gamma}\,dt,\quad\forall v\in\mathbf{K}^{\gamma}. \tag{19}$$

Это вариационное неравенство можно записать в виде

$$u^{\lambda}\in\mathbf{K}^{\gamma},\quad\int\limits_{\Omega^{\gamma}}A^{\lambda}\varepsilon(u^{\lambda}(t))\;\varepsilon(\overline{v}-u^{\lambda}(t))dx+\int\limits_{\Omega^{\gamma}}\int\limits_0^t B^{\lambda}\varepsilon(u^{\lambda}(\tau))\varepsilon(\overline{v}-u^{\lambda}(t))d\tau dx\geq$$

$$\geq\int\limits_{\Omega^{\gamma}}f(t)\;(\overline{v}-u^{\lambda}(t))\;dx,\quad\forall\overline{v}\in\mathbf{K}^{\gamma},\quad t\in(0,T)$$

или

$$u^{\lambda}\in\mathbf{K}^{\gamma},\quad\int\limits_{\Omega^{\gamma}}\sigma_{ij}^{\lambda}(t)\;\varepsilon_{ij}(\overline{v}-u^{\lambda}(t))dx\geq\int\limits_{\Omega^{\gamma}}f_i(t)\;(\overline{v}_i-u_i^{\lambda}(t))dx,\quad\forall\overline{v}\in\mathbf{K}^{\gamma},\;\;t\in(0,T). \tag{19'}$$

**Теорема 2.** Пусть $f(t,x)\in H^1(0,T;L^2(\Omega^{\gamma}))$. Тогда при $\lambda\to0$ решения задачи (19) сходятся к решению задачи

$$u\in\mathbf{K}_{\gamma},\quad(\Lambda u,v-u)\geq\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_{\gamma}}f(v-u)dxdt,\quad\forall v\in\mathbf{K}_{\gamma}. \tag{20}$$

**Доказательство.** Зафиксируем $t \in (0,T)$. Подставим в (19') пробные функции вида $v = 0$ и $v = 2u^\lambda$. Будем иметь

$$\int\limits_{\Omega^\gamma} \sigma_{ij}^\lambda(t)\varepsilon_{ij}(u^\lambda(t))dx = \int\limits_{\Omega^\gamma} f_i(t)u_i^\lambda(t)dx.$$

Отсюда следует

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} A\varepsilon(u^\lambda(t))\varepsilon(u^\lambda(t))dx + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_\gamma} B\varepsilon(u^\lambda(\tau))\varepsilon(u^\lambda(t))dxd\tau +$$

$$+\frac{1}{\lambda}\int\limits_{\Omega_0} A\varepsilon(u^\lambda(t))\varepsilon(u^\lambda(t))dx + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_0} B\varepsilon(u^\lambda(\tau))\varepsilon(u^\lambda(t))dxd\tau = \int\limits_{\Omega^\gamma} f(t)u^\lambda(t)dx.$$

Пусть $\lambda \in (0,\lambda_0)$, $\lambda_0$ - фиксировано. Тогда из последнего уравнения можно получить равномерную по $\lambda$ оценку

$$\left\|u^\lambda(t)\right\|_{\widetilde{H}^1(\Omega^\gamma)} \le c_4, \quad \left\|u^\lambda(t)\right\|_{H^1(\Omega_0)} \le c_5\lambda. \tag{21}$$

Тогда при $\lambda \to 0$ справедлива сходимость

$$u^\lambda \to u^0 \quad \textit{слабо в } \widetilde{H}^1(\Omega^\gamma), \tag{22}$$

$$u^\lambda \to 0 \quad \textit{сильно в } H^1(\Omega_0). \tag{23}$$

Возьмем в (19) $v \in K^\gamma$, $v = 0$ в $\Omega_0$. Будем иметь:

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} A\varepsilon(u^\lambda(t))\varepsilon(v - u^\lambda(t))dx + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_\gamma} B\varepsilon(u^\lambda(\tau))\varepsilon(v - u^\lambda(t))dxd\tau \ge$$

$$\ge \frac{1}{\lambda}\int\limits_{\Omega_0} A\varepsilon(u^\lambda(t))\varepsilon(u^\lambda(t))dx + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_0} B\varepsilon(u^\lambda(\tau))\varepsilon(u^\lambda(t))dxd\tau +$$

$$+\int\limits_{\Omega_\gamma} f(t)(v - u^\lambda(t))dx - \int\limits_{\Omega_0} f(t)u^\lambda(t)dx. \tag{24}$$

Учитывая, что

$$\liminf\left(\frac{1}{\lambda}\int\limits_{\Omega_0} A\varepsilon(u^\lambda(t))\,\varepsilon(u^\lambda(t))\,dx + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_0} B\varepsilon(u^\lambda(\tau))\,\varepsilon(u^\lambda(t))\,dxd\tau\right) \ge 0,$$

перейдем к нижнему пределу в (24). Получим

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} A\varepsilon(u^0(t))\varepsilon(v - u^0(t))dx + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_\gamma} B\varepsilon(u^0(\tau))\varepsilon(v - u^0(t))dxd\tau \ge$$

$$\ge \int\limits_{\Omega_\gamma} f(t)(v - u^0(t))dx. \tag{25}$$

Поскольку $u^{\lambda} \in K^{\gamma}$, то $u^{0} \in K^{\gamma}$. Тогда ограничение функции $u^{0}(t)$ на $\Omega_{\gamma}$ принадлежит $K_{\gamma}$ и неравенство (25) выполнено для всех $v \in K_{\gamma}$. Следовательно, можем записать (25) в виде

$$u \in K_{\gamma}, \quad \int_{\Omega_{\gamma}} A\varepsilon(u(t))\varepsilon(v-u(t))dx + \int_{0}^{t}\int_{\Omega_{\gamma}} B\varepsilon(u(\tau))\varepsilon(v-u(t))dxd\tau \geq$$

$$\geq \int_{\Omega_{\gamma}} f(t)(v-u(t))dx, \quad \forall v \in K_{\gamma}, \quad t \in (0,T). \tag{26}$$

эквивалентном (20). Теорема доказана.

## 5 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследованы вопросы разрешимости задач о вязкпругом теле с отслоившимся тонким жестким включением в случаях внутреннего расположения и выходящего на внешнюю границу под нулевы углом. Получены следующие результаты:

- доказано существование и единственность решения вариационного неравенства для задачи о равновесии вязкоупругого тела с трещиной и тонким включением;

- доказана дополнительная гладкость решений, а именно наличие производной по временной переменной;

- доказано, что в случае тонкого жесткого включения, выходящего на внешнюю границу под нулевым углом, задача также имеет решение и является в определенном смысле предельной для семейства задач в фиктивной области.

## REFERENCES


[1] A. M. Khludnev, “On equilibrium problem for a plate having a crack under the creep condition”, *Control and Cybernetics*, **25, 5**, 1015 – 1030, (1996).

[2] A. M. Khludnev and V. A. Kovtunenko, *Analysis of Cracks in Soli*ds, WIT Press, Southampton-Boston, (2000).

[3] T.S. Popova, “Metod fiktivny`kh oblastei` v zadache Sin`orini dlia viazkouprugikh tel”, *Matematicheskie zametki IAGU*, **13, 1**, 105 – 120, (2006).

[4] T.S. Popova, “Zhestkoe vcliuchenie v zadache o viazkouprugom tele s treshchinoi`”, *Matematicheskie zametki IAGU*, **20, 1**, 87 – 106, (2013).

[5] A.M. KHludnev, *Zadachi teorii uprugosti v negladkikh oblastiakh*, Fizmatlit, Moskva, (2010).

[6] A.M. Khludnev and G.Leugering, “On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks”. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **33, 16**, 1955-1967, (2010).

[7] A.M. KHludnev, “Ob izgibe uprugoi` plastiny` s otsloivshimsia tonkim zhestkim vcliucheniem”, *Sibirskii` zhurnal industrial`noi` matematiki*, **14, 1(45),** 114-126, (2011).

[8] A. M. Khludnev, “Thin rigid inclusions with delaminations in elastic plates”, *European Journal of Mechanics A/Solids*, **32,** 69-75, (2012).

[9] N.P. Lazarev, “An Equilibrium Problem for the Timoshenko-type Plate Containing a Crack on the Boundary of a Rigid Inclusion”, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, **6, 1**, 53 – 62, (2013).

[10] N.V. Neustroeva, “Zhestkoe vcliuchenie v kontaktnoi` zadache dlia uprugikh plastin”, *Sibirskii`*

*zhurnal industrial`noi` matematiki*, **12, 4 (40)**, 92 – 105 (2009).
[11] N.V. Neustroeva, "Odnostoronnii` kontakt uprugikh plastin s zhestkim vcliucheniem", *Vestneyk NGU, Seriia: matematika, mehanika,informatika*, **IX, 4,** 51 – 64 (2009).
[12] K.Bai`okki, A.Kapelo, *Variatcionny`e i kvazivariatcionny`e neravenstva*, Moskva, Nauka, (1988).
[13] K.Vasidzu, *Variatcionny`e metody` v teorii uprugosti i plastichnosti*, Moskva, Mir, (1987).
[14] G.Diuvo, ZH.-L. Leeons, *Neravenstva v mehanike i fizike*, Moskva, Nauka, (1980).
[15] D.Kinderlerer, G.Stampakk`ia, *Vvedenie v neravenstva i ikh prilozheniia*, Moskva, Mir, (1983).
[16] A.S. Kravchuk, *Variatcionny`e i kvazivariatcionny`e neravenstva v mehanike*, Moskva, Izdatel`stvo Moskovskoi` gosudarstvennoi` akademii priborostroeniia i informatiki, (1997).
[17] ZH.-L. Leeons, *Nekotory`e metody` resheniia nelinei`ny`kh kraevy`kh zadach*, Moskva, Mir, (1972).
[18] G. Fikera, *Teoremy` sushchestvovaniia v teorii uprugosti*, Moskva, Mir, (1974).

Поступила в редакцию 10 июня 2014 года.