

## НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЙ БЛЯШКЕ И ДЖРБАШЯНА

Р.В. ДАЛЛАКЯН \*

\* Государственный инженерный университет Армении  
Ереван, Армения  
e-mail: dallakyan57@mail.ru

**Ключевые слова:** Оператор интегродифференцирования Римана-Лиувилля, произведение Бляшке, произведение Джрбашяна, ядра Джрбашяна типа Коши, Шварца и Пуассона

**Аннотация.** В Пользуясь аппаратом интегродифференцирования Римана-Лиувилля, М. М. Джрбашян ([1], гл. IX) обобщил класс мероморфных в единичном круге функций Р. Неванлинны, вводя также произведения  $B_\alpha$  ( $-1 < \alpha < +\infty$ ), которые в специальном случае  $\alpha = 0$  совпадают с произведениями Бляшке. При  $-1 < \alpha < 0$  М. М. Джрбашяну и В. С. Захаряну удалось установить взаимосвязь между произведениями  $B_\alpha$  и  $B$  Бляшке.

В настоящей заметке,пользуясь этой связью, а также свойствами аппарата интегродифференцирования Римана-Лиувилля, удалось доказать предельные соотношения для произведений  $B$  и  $B_\alpha$ . Далее, получено условие принадлежности произведения Бляшке классу  $A_\alpha$  ( $-1 < \alpha \leq 0$ ).

## SOME LIMIT RELATIONS OF BLASCHKE AND DJRBASHYAN PRODUCTS

R. DALLAKYAN \*

\* State Engineering University of Armenia  
Yerevan, Armenia  
e-mail: dallakyan57@mail.ru

**Summary.** Using Riemann-Liouville integrodifferentiation, M. M. Djrbashyan in [1] (ch. IX) generalized R. Nevanlinna's class of meromorphic functions in the unit disk and introduced  $B_\alpha$  ( $-1 < \alpha < +\infty$ ) product which in the special case  $\alpha = 0$  coincide with Blaschke product  $B$ . M. M. Djrbashyan and V. S. Zakaryan have found connection of  $B_\alpha$  and Blaschke product  $B$  in case of  $-1 < \alpha < 0$ .

Limit relations of products  $B$  and  $B_\alpha$  are proved in this paper using this connection and Riemann-Liouville integrodifferentiation. The condition under which Blaschke product belongs to class  $A_\alpha$  ( $-1 < \alpha \leq 0$ ) is also found.

**2010 Mathematics Subject Classification:** 30J10, 31A20, 32A35.

**Key words and Phrases:** Riemann-Liouville, integrodifferentiation operator, Blaschke product, Djrbashyan product, Cauchy, Schwartz and Poisson's type Djrbashyan kernels.

## 1 ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $0 < l < +\infty$  и пусть  $f(x)$  - произвольная функция из класса  $L(0, l)$ . Интегралом от  $f(x)$  порядка  $\alpha$  ( $0 < \alpha < +\infty$ ) с началом в точке  $x = 0$  принято называть функцию

$$D^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, x \in (0, l).$$

Для  $\alpha = 0$  определяется

$$D^0 f(x) = f(x).$$

Если же  $-1 < \alpha < 0$ , то оператор  $D^{-\alpha}$  определяется следующим образом:

$$D^{-\alpha} f(x) = \frac{d}{dx} \left\{ D^{-(1+\alpha)} f(x) \right\}.$$

Пусть  $D = \{z; |z| < 1\}$  - единичный круг комплексной плоскости. М. М. Джрбашьяном (см. [1], стр. 576) были введены следующие ядра:

$$C_\alpha(z) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(1-z)^{1+\alpha}}, z \in D,$$

$$S_\alpha(z) = 2C_\alpha(z) - C_\alpha(0) = \Gamma(1+\alpha) \left\{ \frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}} - 1 \right\}, z \in D,$$

$$P_\alpha(\varphi; r) = \operatorname{Re} S_\alpha(re^{i\varphi}) = \Gamma(1+\alpha) \left\{ \operatorname{Re} \frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}} - 1 \right\}, 0 \leq r < 1.$$

Известные из теории функций ядра Коши, Шварца и Пуассона получаются из введенных выше функций при  $\alpha = 0$ . М. М. Джрбашьяном доказано, что

$$r^{-\alpha} D^{-\alpha} C_\alpha(re^{i\varphi}) = C_0(re^{i\varphi}),$$

$$r^{-\alpha} D^{-\alpha} S_\alpha(re^{i\varphi}) = S_0(re^{i\varphi}),$$

$$r^{-\alpha} D^{-\alpha} P_\alpha(\varphi; r) = P_0(\varphi; r).$$

Пусть  $\{z_n\} \in D$  - произвольная последовательность комплексных чисел, пронумерованных в порядке неубывания их модулей, такая что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-|z_n|)^{1+\alpha} < +\infty \quad (1)$$

Произведение М. М. Джрбашьяна  $B_\alpha(z; \{z_n\})$ ,  $-1 < \alpha < +\infty$ , определяется следующим образом:

$$B_\alpha(z; \{z_n\}) = \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{z_n} \right) e^{-W_\alpha(z, z_n)},$$

где

$$W_\alpha(z, \xi) = \int_{|\xi|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+n)} \left\{ \xi^{-n} \int_0^{|\xi|} (1-x)^\alpha x^{n-1} dx - \bar{\xi}^n \int_{|\xi|}^1 (1-x)^\alpha x^{n-1} dx \right\} z^n, z \in \mathcal{D}, \xi \in \mathcal{D}.$$

В специальном случае  $\alpha=0$  произведения М. М. Джрбашяна превращаются в произведения Бляшке:

$$B_0(z; \{z_n\}) = B(z; \{z_n\}) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_n z} \frac{|z_n|}{z_n}.$$

Известно, что справедливы следующие утверждения (см. [2], стр.72)

1.  $|B(z; \{z_n\})| < 1, z \in \mathcal{D}.$
2.  $\lim_{r \rightarrow 1-0} |B(re^{i\varphi}; \{z_n\})| = 1$  для почти всех  $\varphi \in [0, 2\pi].$

Для произведений  $B_\alpha(z; \{z_n\}), -1 < \alpha < 0,$  аналог утверждения 1 доказан В. С. Захаряном [3]. Им доказано, что если  $-1 < \alpha < 0$  и  $\{z_n\} \subset \mathcal{D},$  любая последовательность, удовлетворяющая условию (1), то

$$|B_\alpha(z; \{z_n\})| \leq |B(z; \{z_n\})| \exp \left\{ \frac{\alpha}{2+\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{|z_n|}^1 \frac{(1-x)^\alpha - 1}{x} dx \right\}. \quad (2)$$

Аналог же утверждения 2 для произведений  $B_\alpha(z; \{z_n\}), -1 < \alpha < +\infty,$  доказан М. М. Джрбашяном. А именно им доказано, что для любого сходящегося произведения  $B_\alpha(z; \{z_n\}), -1 < \alpha < +\infty,$  справедливо предельное соотношение (см. [1], стр. 626)

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} \left\{ D^{-\alpha} \log |B_\alpha(re^{i\varphi}; \{z_n\})| \right\} d\varphi = 0 \quad (3)$$

В специальном случае  $\alpha=0$  последнее равенство переходит в известное равенство

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} \log |B(re^{i\varphi}; \{z_n\})| d\varphi = 0.$$

В. С. Захаряном в [4] доказано, что если для данного  $\varphi \in [0, 2\pi]$  выполняется условие типа Фростмана

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 - |z_n|}{|e^{i\varphi} - z_n|} \right)^{1+\alpha} < +\infty, -1 < \alpha < 0, \quad (4)$$

то в точке  $e^{i\varphi}$  произведение  $B_\alpha(z; \{z_n\})$  имеет конечное радиальное изменение. Это означает, что

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} B_\alpha(re^{i\varphi}; \{z_n\}) = B_\alpha(e^{i\varphi}; \{z_n\})$$

существует и конечен. В [5] (стр. 94) показано, что соотношение (4) может нарушаться лишь на некотором исключительном множестве  $E, (\alpha+1)$ - емкость которого равна нулю. В работе [4] В.С. Захаряном также доказано, что при выполнении условия (4) существует  $q$  такое, что

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left| B_\alpha \left( r e^{i\varphi}; \{z_n\} \right) \right| = \left| B_\alpha \left( e^{i\varphi}; \{z_n\} \right) \right| \geq q > 0. \quad (5)$$

Таким образом, неравенство (5) также может нарушаться лишь на некотором исключительном множестве,  $(\alpha+1)$ - емкость которого равна нулю.

М. М. Джрбашян и В. С. Захарян (см. [6]) установили следующую взаимосвязь между произведениями  $B_\alpha(z; \{z_n\})$ ,  $-1 < \alpha < 0$  и  $B(z; \{z_n\})$  с нулями, удовлетворяющими условию (1):

$$B_\alpha(z; \{z_n\}) = B(z; \{z_n\}) \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_\alpha(e^{-i\theta} z) d\omega(\theta) \right\}, \quad (6)$$

где  $\omega(\theta)$  - невозрастающая функция ограниченной вариации на  $[0, 2\pi]$ , имеющая вид

$$\omega(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\theta D^{-\alpha} \log \left| \frac{B_\alpha(r_n e^{i\theta}; \{z_n\})}{B(r_n e^{i\theta}; \{z_n\})} \right| d\theta \quad (7)$$

$$(0 < r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots, r_n \uparrow 1).$$

В [1] (стр. 655) М. М. Джрбашяном введены классы  $A_\alpha (-1 < \alpha < +\infty)$  как множество всех аналитических в единичном круге  $D$  функций, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0 < r < 1} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} D_{(+)}^{-\alpha} \log |f(re^{i\varphi})| d\varphi \right\} < +\infty,$$

где, как обычно

$$D_{(+)}^{-\alpha} \varphi(r) = \begin{cases} D^{-\alpha} \varphi(r), & \text{если } D^{-\alpha} \varphi(r) \geq 0 \\ 0, & \text{если } D^{-\alpha} \varphi(r) \leq 0. \end{cases}$$

Отметим, что справедливы следующие включения:

$$A_{\alpha_1} \subset A_{\alpha_2}, -1 < \alpha_1 < \alpha_2 < +\infty.$$

$$A_\alpha \subset A_0, -1 < \alpha < 0.$$

$$A_0 \subset A_\alpha, 0 < \alpha < +\infty.$$

Нетрудно убедиться, что класс  $A_0$  совпадает с классом  $A$  Островского - Неванлинны (см. [2], стр.82, [7], пункт. 160).

## 2 ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Сначала докажем аналогичное (3) предельное соотношение для произведений  $B_\alpha(z; \{z_n\})$ .

**Теорема 1.** Пусть  $-1 < \alpha < +\infty$  и пусть  $\{z_n\} \in \mathcal{D}$  - последовательность комплексных чисел удовлетворяющая условию (1), тогда

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} \log |B_\alpha(re^{i\varphi}; \{z_n\})| d\varphi = - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{|z_n|}^1 \frac{(1-x)^\alpha - 1}{x} dx. \quad (8)$$

**Доказательство.** Из формулы Йенсена имеем (см. [8])

$$\int_0^{2\pi} \log |B_\alpha(re^{i\varphi}; \{z_n\})| d\varphi = \log |B_\alpha(0)| + \sum_{|z_n| < r} \log \frac{r}{|z_n|}.$$

Отсюда, так как

$$B_\alpha(0) = \exp \left( - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{|z_n|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx \right),$$

то получаем

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} \log |B_\alpha(re^{i\varphi}; \{z_n\})| d\varphi = - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{|z_n|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx - \sum_{n=1}^{\infty} \log |z_n|. \quad (9)$$

Покажем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log |z_n| = - \sum_{n=1}^{\infty} \log (1 - (1 - |z_n|))$$

сходится, если выполняется условие (1). Для этого достаточно показать, что функция

$$y = \log(1-x) - x^{\alpha+1}, \quad x \in [0,1)$$

является монотонно убывающей функцией, а это очевидно. Из предельного соотношения (9) следует справедливость утверждения теоремы.

**Замечание 1.** Если в (8) параметр  $\alpha$  стремится к нулю, то получается известное предельное соотношение для произведений Бляшке:

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} \log |B(re^{i\varphi}; \{z_n\})| d\varphi = 0.$$

**Замечание 2.** Интересным является и тот факт, что в правой части предельного соотношения (8) появился тот же ряд, что и в экспоненте правой части неравенства (2) В. С. Захаряна.

Далее исследуется следующая задача: каким будет предел (3), если оператор  $r^{-\alpha} D^{-\alpha}$  - Римана-Лиувилля применять на произведение Бляшке с нулями, удовлетворяющими

условию (1). Здесь естественно предполагать, что  $-1 < \alpha \leq 0$ , чтобы произведение Бляшке сходилось.

**Теорема 2.** Пусть  $-1 < \alpha \leq 0$  и пусть  $\{z_n\} \subset \mathcal{D}$  - последовательность комплексных чисел удовлетворяющая условию (1), тогда

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} \left\{ r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log \left| B(re^{i\varphi}; \{z_n\}) \right| \right\} d\varphi = - \int_0^{2\pi} d\omega_\alpha(\theta),$$

где  $\omega(\theta)$  - определенная в (7) невозрастающая функция конечной вариации на  $[0, 2\pi]$ .

**Доказательство.** Когда  $\alpha = 0$ , то оператор  $r^{-\alpha} D^{-\alpha}$  является тождественным оператором, а  $\omega_0(\theta) = 0$  везде на  $[0, 2\pi]$ , кроме, быть может, некоторого счетного множества. Так что получается следующий известный результат:

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} \log \left| B(re^{i\varphi}; \{z_n\}) \right| d\varphi = 0.$$

Теперь пусть  $-1 < \alpha < 0$ . Пользуясь соотношением (6) о связи произведений  $B_\alpha(z; \{z_n\})$  и  $B(z; \{z_n\})$ , вычислим

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} \left\{ r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log \left| B(re^{i\varphi}; \{z_n\}) \right| \right\} d\varphi &= \lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} \left\{ r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log \left| B_\alpha(re^{i\varphi}; \{z_n\}) \right| \right\} d\varphi - \\ &- \lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} \left\{ r^{-\alpha} D^{-\alpha} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} S_\alpha(re^{i(\varphi-\theta)}) d\omega_\alpha(\theta) \right] \right\} d\varphi. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая предельное соотношение (3) и тот факт, что  $\operatorname{Re} S_\alpha(re^{i(\varphi-\theta)}) = P_\alpha(\varphi-\theta; r)$ , получаем

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} \left\{ r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log \left| B(re^{i\varphi}; \{z_n\}) \right| \right\} d\varphi &= - \lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} \left\{ r^{-\alpha} D^{-\alpha} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_\alpha(\varphi-\theta; r) d\omega_\alpha(\theta) \right] \right\} d\varphi = \\ &= - \lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} r^{-\alpha} D^{-\alpha} P_\alpha(\varphi-\theta; r) d\omega_\alpha(\theta) \right\} d\varphi. \end{aligned}$$

Отсюда же пользуясь теоремой Фубины и принимая во внимание, что  $r^{-\alpha} D^{-\alpha} P_\alpha(\varphi-\theta; r) = P_0(\varphi-\theta; r)$ , получаем

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} \left\{ r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log \left| B(re^{i\varphi}; \{z_n\}) \right| \right\} d\varphi = - \lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_0(\varphi-\theta) d\varphi \right\} d\omega_\alpha(\theta).$$

Из последнего равенства заметив, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_\alpha(\varphi-\theta; r) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\varphi-\theta)+r^2} d\varphi = 1,$$

имеем

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} \left\{ r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log \left| B \left( r e^{i\varphi}; \{z_n\} \right) \right| \right\} d\varphi = - \int_0^{2\pi} d\omega_\alpha(\theta).$$

Далее исследуется вопрос о принадлежности произведения Бляшке классу  $A_\alpha$  ( $-1 < \alpha < 0$ ). Произведение Бляшке хотя и является ограниченной аналитической функцией, однако не всегда принадлежит классу  $A_\alpha$  ( $-1 < \alpha < 0$ ), так как для этого (см. [1], стр. 655) необходимо, чтобы нули этой функции удовлетворяли условию (1). Возникает вопрос: если  $B_\alpha(z; \{z_n\})$  принадлежит классу  $A_\alpha$  ( $-1 < \alpha < 0$ ), то соответствующее произведение  $B(z; \{z_n\})$  принадлежит ли классу  $A_\alpha$ . Ответ на этот вопрос положителен.

**Теорема 3.** Пусть  $-1 < \alpha \leq 0$  и пусть  $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$  - последовательность комплексных чисел удовлетворяющая условию (1), тогда произведение  $B(z; \{z_n\})$  принадлежит классу  $A_\alpha$ .

**Доказательство.** Для  $\alpha = 0$  утверждение теоремы очевидно. Пусть  $-1 < \alpha < 0$ . Из результата (6) о взаимосвязи произведений  $B_\alpha(z; \{z_n\})$  и  $B(z; \{z_n\})$  имеем

$$B(z; \{z_n\}) = B_\alpha(z; \{z_n\}) \exp \left\{ - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_\alpha(e^{-i\theta} z) d\omega(\theta) \right\},$$

где  $\omega(\theta)$  - невозрастающая функция ограниченной вариации на  $[0, 2\pi]$ , имеющая вид (7). Вычислим

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left\{ r^{-\alpha} D_{(+)}^{-\alpha} \log \left| B \left( r e^{i\varphi}; \{z_n\} \right) \right| \right\} d\varphi &\leq \int_0^{2\pi} \left\{ r^{-\alpha} D_{(+)}^{-\alpha} \log \left| B_\alpha \left( r e^{i\varphi}; \{z_n\} \right) \right| \right\} d\varphi - \\ &- \int_0^{2\pi} \left\{ r^{-\alpha} D^{-\alpha} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} S_\alpha \left( r e^{i(\varphi-\theta)} \right) d\omega(\theta) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим, что из формулы (12) следует, что левая часть равенства (13) положительна. Первый интеграл правой части (13) ограничен, так как  $B_\alpha(z; \{z_n\}) \in A_\alpha$  (см. [1], стр. 637). Ограниченность второго интеграла правой части равенства (13) доказывается так же, как в теореме 2. Таким образом

$$\sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} \left\{ r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log \left| B \left( r e^{i\varphi}; \{z_n\} \right) \right| \right\} d\varphi < +\infty.$$

**Замечание.** Последняя теорема доказывается сравнительно легко, однако, результат представляет определенный интерес.

### 3 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в статье доказаны две теоремы о граничных значениях произведений Джрбашяна и Бляшке, а также доказана, что произведение Бляшке принадлежит классу  $A_\alpha$  ( $-1 < \alpha < 0$ ) Джрбашяна.

### REFERENCES

- [1] M. M. Jrbashyan. *Intergalnie preobrazovanja i predstavlenija funkcij v kompleksnoj oblasti*. Nauka, Moskva, (1986).
- [2] I. I. Gavrilov. *Granichnie svojstva analiticheskix funkcij*. Gos. Izd. Texniko-teor. Mt., Moskva, Leningrad, (1950).
- [3] V. S. Zakaryan. Ob odnoj ocenke dlja proizvedenij M. M. Jrbashyana. *Izvestija AN Arm. SSR, Matematika*, **XXIII**, **2**, 189-192, (1988).
- [4] V. S. Zakaryan. O predelnix znachenijax funkcii  $B_\alpha$ . *Izvestija AN Arm. SSR, Matematika*, **3**, **4-5**, 287-300, (1968).
- [5] M. M. Jrbashyan, V. S. Zakaryan. *Klassi i granichnie svojstva funkcij meromorfnix v krugе*. Nauka, Moskva, (1993).
- [6] M. M. Jrbashyan, V. S. Zakaryan. O faktorizacii funkcii  $B_\alpha$ . *Mat. zametki*, **4**, **1**, 3-10, (1968)
- [7] R. Nevanlinna. *Einduetige Analytische Funktionen*, Springer, Berlin, (1937).
- [8] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, (1979).

Поступила в редакцию 10 февраля 2014 года.