

## МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОЙ АДАПТАЦИИ В ЗАДАЧАХ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ БЕЗ ЯВНОГО ВЫДЕЛЕНИЯ РАЗРЫВОВ

БРЕСЛАВСКИЙ П.В.\*

\* Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН  
Миусская пл., 4, Москва, 125047, Россия  
e-mail: brepv@bk.ru

**Ключевые слова:** газодинамические задачи, метод динамической адаптации разностных сеток.

**Аннотация.** Рассматривается применение метода динамической адаптации для задач газовой динамики без явного выделения разрывов. Выбор функции адаптации осуществляется из условий квазиравномерного распределения узлов и сгущения в областях значительного изменения искомого решения. На основе метода динамической адаптации с использованием вышеуказанной функции адаптации решаются модельные задачи SOD (распад произвольного разрыва), Woodward Colella (взаимодействие двух встречных ударных волн, возникающих при распаде произвольных разрывов). Сравнение результатов расчетов производится с полученными для данных задач решениями методами WENO3, WENO5 и MUSCL.

## DYNAMIC ADAPTATION SHOCK-CAPTURING METHOD FOR GASDYNAMIC SIMULATION

BRESLAVSKII P.V.\*

\* Keldysh Institute of Applied Mathematics Russian Academy of Sciences  
Miusskaya sq., 4, Moscow, 125047, Russia  
e-mail: brepv@bk.ru

**Summary.** A dynamic adaptation shock-capturing method is applied to gas dynamics problems. The adaptation function is determined by the condition that the grid point is quasi-uniform and is concentrated in the steep-gradient regions. The dynamic adaptation method with the adaptation function thus determined and a shock-capturing technique are used to solve SOD problem and two blast wave's problem. The numerical results are compared with solutions obtained by WENO3, WENO5 and MUSCL methods.

## 1 ВВЕДЕНИЕ

Газовая динамика, как один из разделов физики, в основном имеет дело с ситуациями, в которых условия существенно отличаются от нормальных. В отличие от классической аэродинамики, в газовой динамике одним из главных факторов является учет сжимаемости газа, который приводит к изменению поведения исследуемой среды. Имеется в виду, прежде всего, широкий класс задач о движении газовых потоков со скоростями близкими или превышающими скорость звука и возникающей, как следствие, градиентной катастрофе с последующим рассмотрением разрывных решений типа контактных разрывов и ударных волн. С математической точки зрения исследование подобного рода задач сводится к решению системы дифференциальных уравнений гиперболического типа, так называемых уравнений газовой динамики.

Методы решения уравнений газовой динамики можно условно разбить на два класса: методы с явным выделением разрывов<sup>1-6</sup> и методы сквозного счета<sup>7-11</sup>. При необходимости учета процессов, происходящих на границах внутренних подобластей решения (например, при выделении энергии, или строгом учете кинетики), используются методы с явным выделением. К ним можно отнести методы с отслеживанием фронтов<sup>12</sup>, методы, использующие вариационный принцип<sup>13</sup>, метод динамической адаптации<sup>5,6,14</sup> и др. Несомненным их преимуществом является экономичность (малое число расчетных ячеек и, как следствие, меньшее время счета). Однако в ряде случаев, например, когда при решении многомерных задач разрывы образуются локально внутри области решения, реализация определения места и времени образования разрыва и его дальнейшего выделения является алгоритмически сложной проблемой. Тогда, если нет необходимости выделения границ, обусловленных первоначальной физической постановкой, возможно использование методов сквозного счета.

Методы сквозного счета получили значительно большее распространение по сравнению с методами с явным выделением разрывов. Связано это в первую очередь с относительной простотой реализации многих из них. Основной проблемой при построении разностных схем для методов сквозного счета является повышение порядка аппроксимации при сохранении монотонности получаемого решения. Согласно теореме Годунова<sup>15</sup> среди линейных разностных схем для уравнения переноса с порядком аппроксимации выше первого нет монотонных. Первоначально для получения гладких решений вводили линейную или квадратичную искусственную вязкость<sup>7</sup>. Исходная система газодинамических уравнений становилась при этом параболической. В настоящее время исследования с искусственной вязкостью достаточно редки. Связано это с появлением и развитием методов решения уравнений газовой динамики со сглаживанием разрывов. Среди них хотелось бы отметить методы FCT<sup>8</sup>, TVD<sup>16</sup>, MUSCL<sup>11</sup>, WENO<sup>10</sup> и несколько более сложный в реализации PPM<sup>17</sup>. Наибольшее распространение получили различные модификации методов построения TVD и WENO схем. Основным недостатком всех методов сквозного счета является использование большого числа узлов расчетной сетки для достижения требуемой точности. Чтобы избежать этого недостатка, необходимо сгущать сетку в областях быстро меняющегося решения. Добиться этого можно, используя либо адаптивно встраивающиеся сетки (AMR – adaptive mesh refinement)<sup>18</sup>, либо метод динамической

адаптации с функцией адаптации, позволяющей автоматически производить сгущение в требуемых областях решения<sup>19,20</sup>.

Основной целью данной работы является развитие метода динамической адаптации для задач газовой динамики без явного выделения разрывов.

На основе метода динамической адаптации осуществляется решение задачи о распаде произвольного разрыва, так называемой проблемы SOD в модификации Того<sup>21</sup>, и задачи Woodward Colella<sup>17</sup> о двух встречных ударных волнах, возникающих при распаде произвольных разрывов. Функция адаптации выбирается из условий квазиравномерного распределения узлов и сгущения в областях значительного изменения искомого решения. Сравнение полученных результатов производится с широко используемыми в настоящее время методами MUSCL<sup>11</sup>, WENO3 и WENO5<sup>10</sup>.

## 2 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В эйлеровой системе координат в одномерной постановке для решения указанных тестовых задач выписывается система уравнений газовой динамики в приближении динамики идеального газа:

$$\partial_t \mathbf{E} + \partial_x \mathbf{F} = 0, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho E + p) \end{bmatrix},$$

с уравнениями состояния  $p = \rho RT$ ,  $E = \frac{R}{\gamma-1} T + \frac{1}{2} u^2$ ,  $\gamma = 1.4$ .

В соответствии с методом динамической адаптации, используя замену переменных общего вида, выполним переход к произвольной нестационарной системе координат  $(q, \tau)$ , в которой система уравнений (1) запишется следующим образом<sup>20</sup>:

$$\partial_\tau \tilde{\mathbf{E}} + \partial_q \tilde{\mathbf{F}} = 0, \quad (2)$$

где

$$\tilde{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \Psi/\rho \\ \Psi u \\ \Psi E \\ \Psi \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} Q/\rho - u \\ Qu + p \\ QE + pu \\ Q \end{bmatrix},$$

здесь  $x_q = \Psi/\rho$  - якобиан обратного преобразования, а  $Q$  - функция преобразования, подлежащая определению, физический смысл которой представляет собой поток вещества через границу,  $\partial_\tau x = u - Q/\rho$  - скорость движения системы координат.

Система (2) для каждой конкретной задачи дополняется начальными и граничными условиями, а также определяется конкретный вид функции  $Q$ , управляющей движением узлов сетки.

Уравнения с первого по третье в системе (2) гиперболического типа и, как следствие, допускают возникновение разрывных решений. При решении этой системы без явного выделения разрывов с помощью разностных схем с порядком аппроксимации выше первого необходимо либо использовать монотонные схемы, либо вводить искусственную вязкость. Численные эксперименты с монотонными схемами WENO и MUSCL не привели к положительным результатам, поэтому для решения системы (2)

ко второму и третьему уравнениям было решено добавить члены с искусственной вязкостью. Тогда система уравнений (2) запишется в виде:

$$\partial_\tau \tilde{\mathbf{E}} + \partial_q \tilde{\mathbf{F}} + \partial_q \tilde{\mathbf{G}} = 0, \quad (3)$$

где

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} -v(1/\rho)_q \\ -\mu \rho u_q \\ -\mu \rho u u_q - \lambda \rho T_q \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Функция преобразования или адаптации  $Q$  в данном исследовании определяется следующим образом. Во-первых, из диффузионного приближения<sup>6</sup> вводится первое слагаемое, которое отвечает за равномерность шага расчетной сетки в физическом пространстве:  $Q = -D\psi_q$ ,  $D = nh$ , где  $n$  задает зону влияния диффузионного механизма, а  $h$  - шаг расчетной сетки. Во-вторых, для обеспечения необходимого сгущения в областях больших градиентов решения добавляется второе слагаемое  $Q = -(f\psi)_q$ ,  $f = k_1 h |\rho_q| / \max_N(|\rho_q|) + k_2 h |\rho_{qq}| / \max_N(|\rho_{qq}|)$ , параметры  $k_1$  и  $k_2$  по аналогии с  $n$  в диффузионном механизме определяют зону влияния соответствующего механизма сгущения, а функция  $\max_N(Y)$  обозначает максимум  $Y$  во всей области решения. Легко заметить, что первое слагаемое в  $f$  будет приводить к сгущению узлов сетки в областях с большим градиентом плотности, а второе к сгущению там, где велика вторая производная плотности. Конкретные значения  $n$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  будут приведены при решении тестовых задач. Окончательно функция преобразования запишется в виде

$$Q = -h \frac{\partial}{\partial q} \left( \left( n + \frac{k_1 |\rho_q|}{\max_N(|\rho_q|)} + \frac{k_2 |\rho_{qq}|}{\max_N(|\rho_{qq}|)} \right) \psi \right). \quad (4)$$

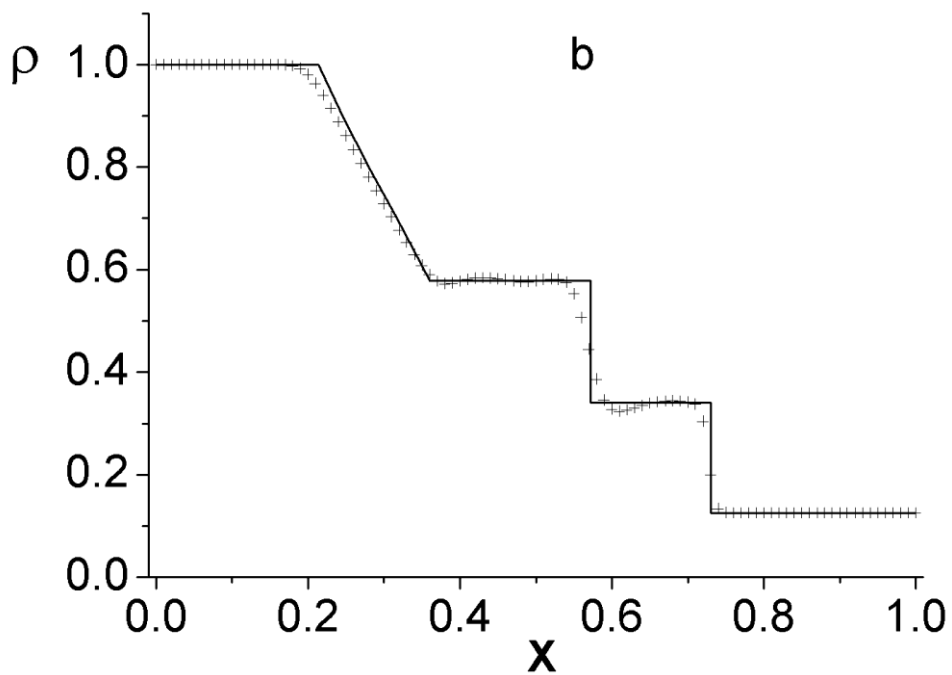
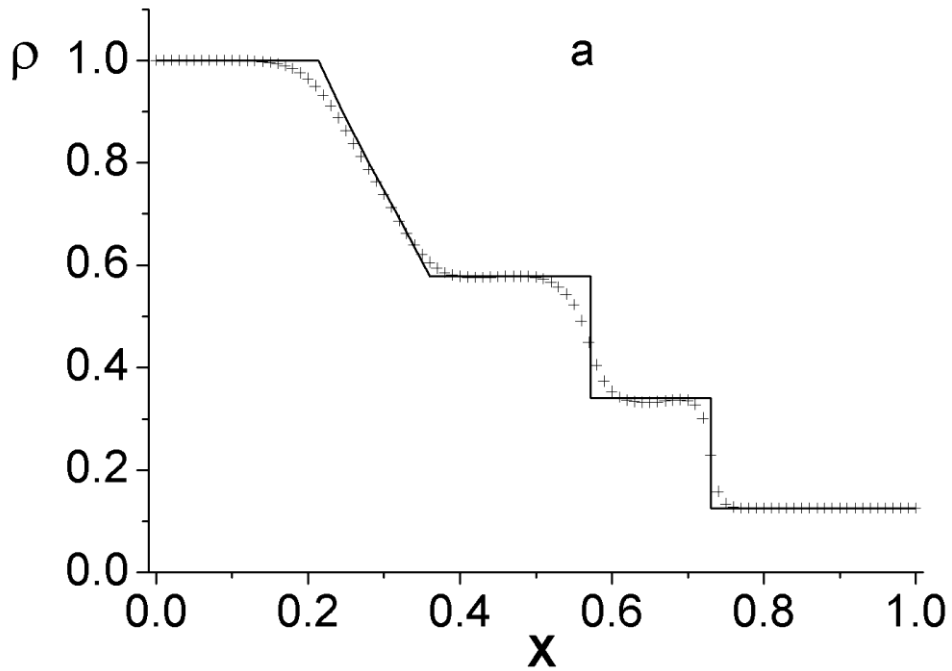
### 3 ЗАДАЧА О РАСПАДЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО РАЗРЫВА

В качестве первой тестовой задачи рассматривалась проблема SOD в модификации Того<sup>21</sup> о распаде произвольного разрыва, находящегося в координате  $x_0 = 0.3$  области  $[0,1]$  газа с показателем адиабаты  $\gamma = 1.4$  и газовой постоянной  $R = 1$ . Слева и справа от разрыва значения физических величин в начальный момент времени  $t = 0$  определялись следующим образом:  $[\rho_l, u_l, p_l]^T = [1., 0.75, 1.]^T$ ,  $[\rho_r, u_r, p_r]^T = [0.125, 0., 0.1]^T$ . Для решения системы (3) также задавались граничные условия  $Q_l = \rho_l u_l = 0.75$  и  $Q_r = \rho_r u_r = 0$  и коэффициенты для функции адаптации (4)  $n = 0.1$ ,  $k_1 = 0.4\rho$ ,  $k_2 = 0.01\rho$ . Решение осуществлялось методом конечных разностей по полностью явной разностной схеме на разнесенной сетке с шагом по времени  $\tau = 0.1\tau_K$ , где  $\tau_K$  - критерий Куранта, который определялся на каждом временном шаге. Коэффициенты искусственной вязкости в (3) выбирались исходя из соотношений

$$v = 0, \quad \mu = \begin{cases} 0.7h & \text{если } u_q < 0 \\ 0.2h & \text{если } u_q \geq 0 \end{cases}, \quad \lambda = \mu \frac{R}{\gamma - 1}$$

Сравнение результатов производилось с решениями, полученными для системы (1) широко известными монотонными методами WENO3, WENO5 и MUSCL на равномерной сетке с интегрированием по времени методом Рунге-Кутты третьего

порядка аппроксимации и шагом  $\tau = 0.02$ . Для всех методов число расчетных ячеек составляло  $N=100$ , и расчет прекращался по достижении времени  $t = 2$ .



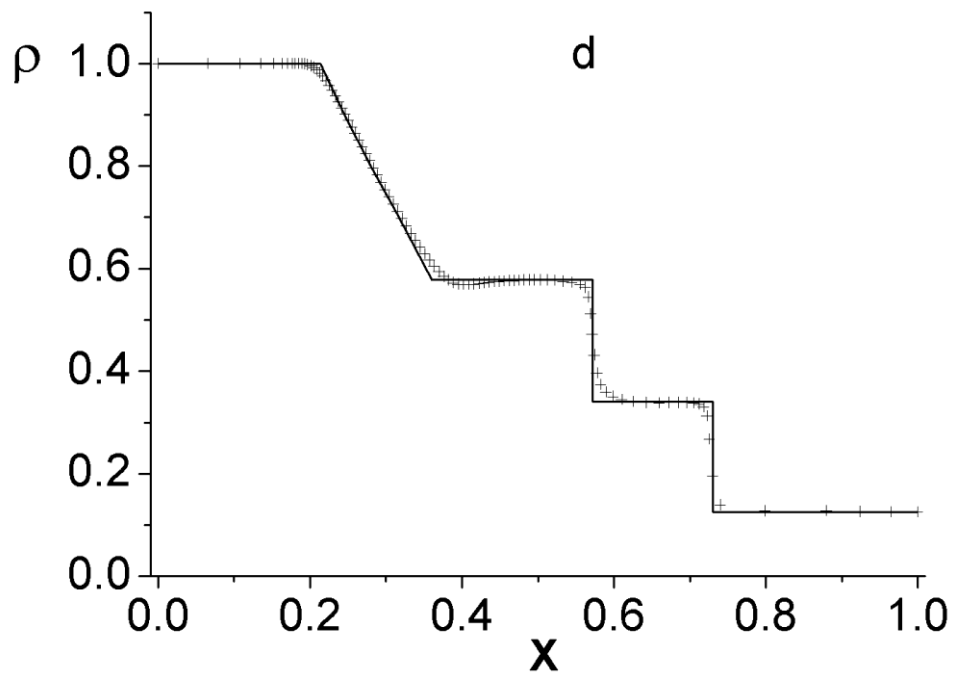
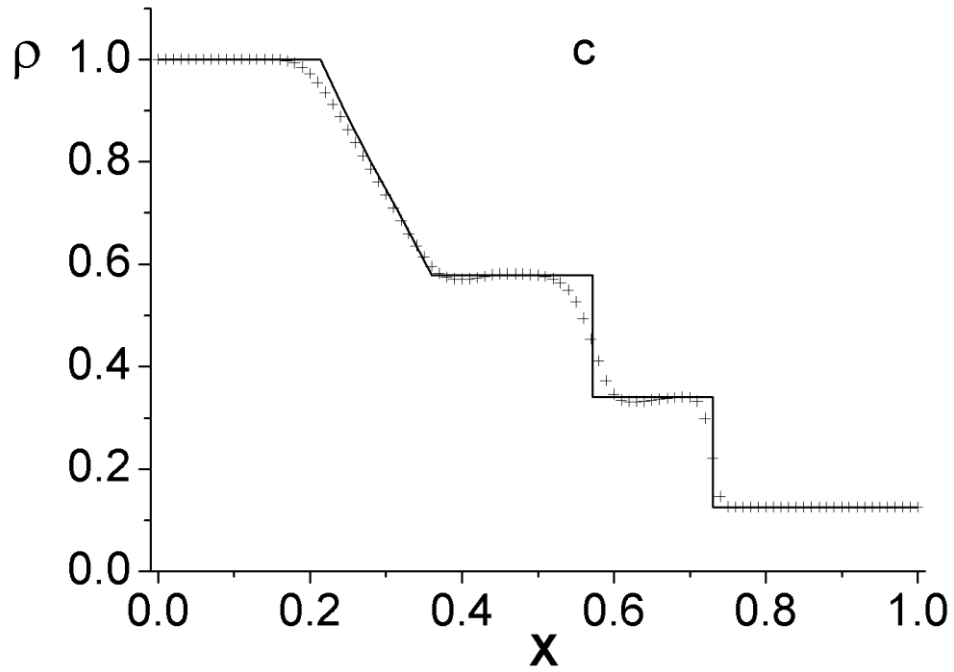


Рис.1: Профили плотности для задачи SOD в момент времени  $t = 2$ : а – WENO3, б – WENO5, в – MUSCL, д – метод динамической адаптации.

На рис. 1 маркером показаны все полученные решения в сравнении с точным, которое изображено сплошной линией. Если время расчета по схеме WENO3 принять за 1, то в схемах WENO5 и MUSCL оно будет равно 1.205, а в методе динамической адаптации - 3.615. Однако в методе динамической адаптации отношение максимального и минимального пространственных шагов в физическом пространстве превышает 30, причем в областях неменяющегося решения получается наибольший шаг, а сильно меняющегося – наименьший. Поэтому можно говорить о лучшей эффективности метода динамической адаптации в сравнении с другими рассмотренными в данной статье методами.

#### 4 ЗАДАЧА О ДВУХ ВСТРЕЧНЫХ ВЗРЫВНЫХ ВОЛНАХ

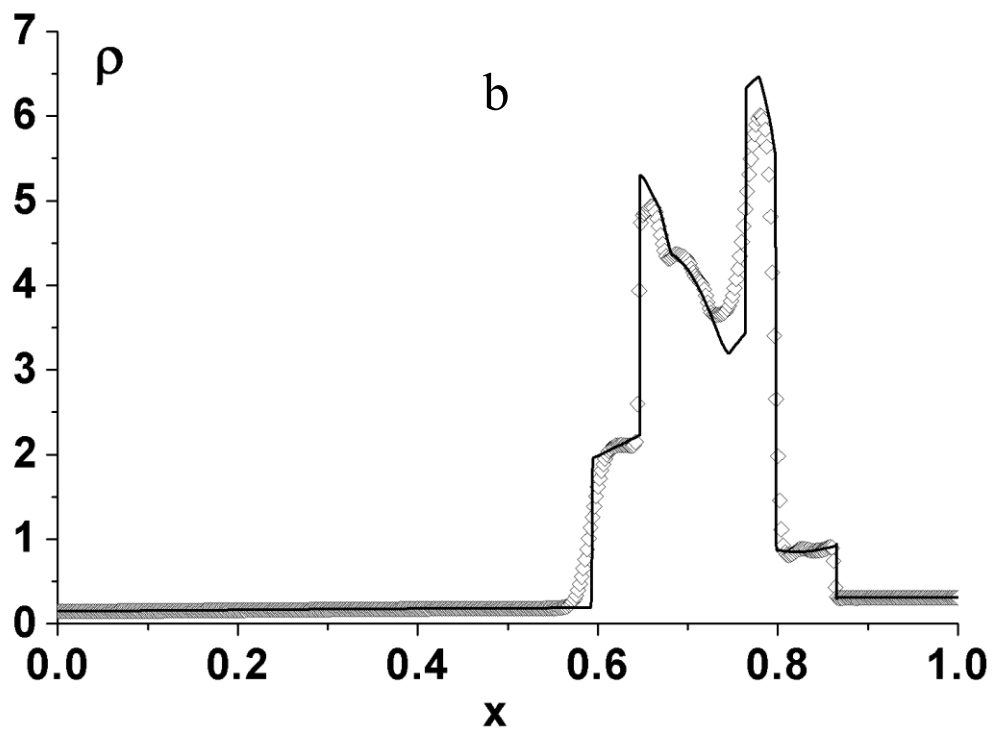
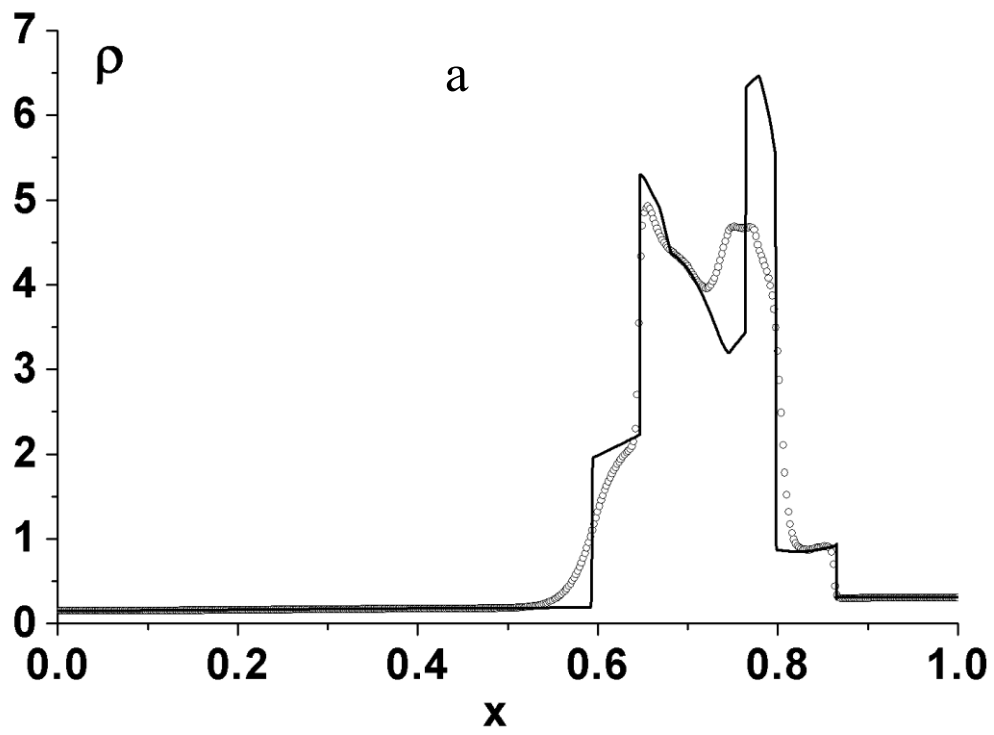
Вторая тестовая задача о двух встречных взрывных волнах, так называемая “two blast waves problem”, предложенная Woodward и Colella<sup>17</sup>, ранее уже решалась методом динамической адаптации с явным выделением фронтов<sup>6</sup>. Область определения задачи состоит из трех подобластей  $x_l \in [0, 0.1]$ ,  $x_m \in (0.1, 0.9)$ ,  $x_r \in [0.1, 1]$ , в которых находится неподвижный газ с показателем адиабаты  $\gamma = 1.4$  и газовой постоянной  $R = 1$  с существенно разным давлением:

$$t = 0: \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix}_l = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix}_m = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^{-2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^2 \end{pmatrix}.$$

На границах области определения задачи задается условие непроницаемости  $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$ . Коэффициенты искусственной вязкости в (3) выбирались исходя из соотношений  $\nu = 400h^2$ ,  $\mu = 6h$ ,  $\lambda = 600h^2$ . Для решения системы (3) также задавались граничные условия  $Q_l = \rho_l u_l = 0$  и  $Q_r = \rho_r u_r = 0$  и коэффициенты для функции адаптации (4)  $n = 0.3/x_q$ ,  $k_1 = k_2 = 20\rho$ .

Как и в задаче о распаде произвольного разрыва, решение (3)-(4) с вышеприведенными начальными и граничными условиями осуществлялось методом конечных разностей по полностью явной разностной схеме на разнесенной сетке с шагом по времени  $\tau = 0.1\tau_K(t)$ , где  $\tau_K(t)$  - критерий Куранта, определяемый на каждом временном шаге. Сравнение результатов производилось с решениями, полученными для системы (1) методами WENO3, WENO5 и MUSCL на равномерной сетке с интегрированием по времени методом Рунге-Кутты третьего порядка аппроксимации. Для всех задач число расчетных ячеек составляло  $N = \{500, 2000, 40000\}$ , и расчет прекращался по достижении времени  $t = 0.038$ . Шаг по времени для методов WENO3, WENO5 и MUSCL равнялся  $0.8\tau_K(t)$ .

На рис. 2-3 показаны пространственные профили плотности на момент окончания расчетов для  $N=500$  (рис. 2),  $N=2000$  (рис. 3) всеми описанными выше методами (маркеры) в сравнении с решением, полученным методом динамической адаптации с  $N=40000$  (сплошная линия). В таблице 1 приведены времена расчетов для каждого из используемых методов по отношению ко времени расчета схемой WENO3 с  $N=500$ . Отношение максимального и минимального пространственных шагов в физическом пространстве в методе динамической адаптации с  $N=2000$  равно  $14.08h/0.156h$ , то есть достигает двух порядков.





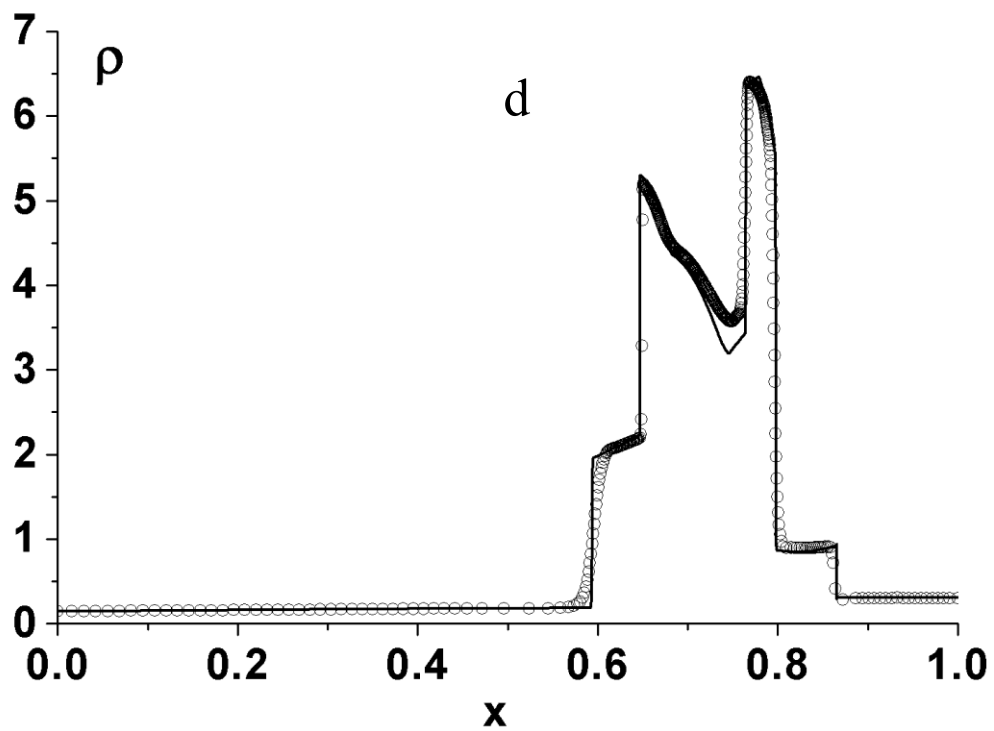
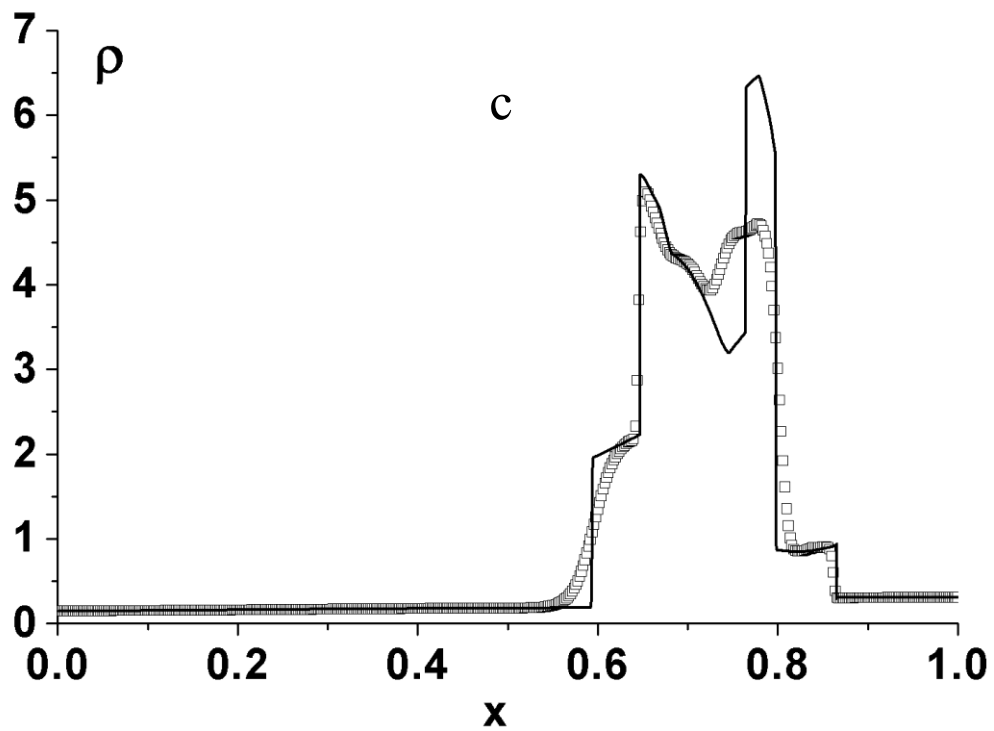
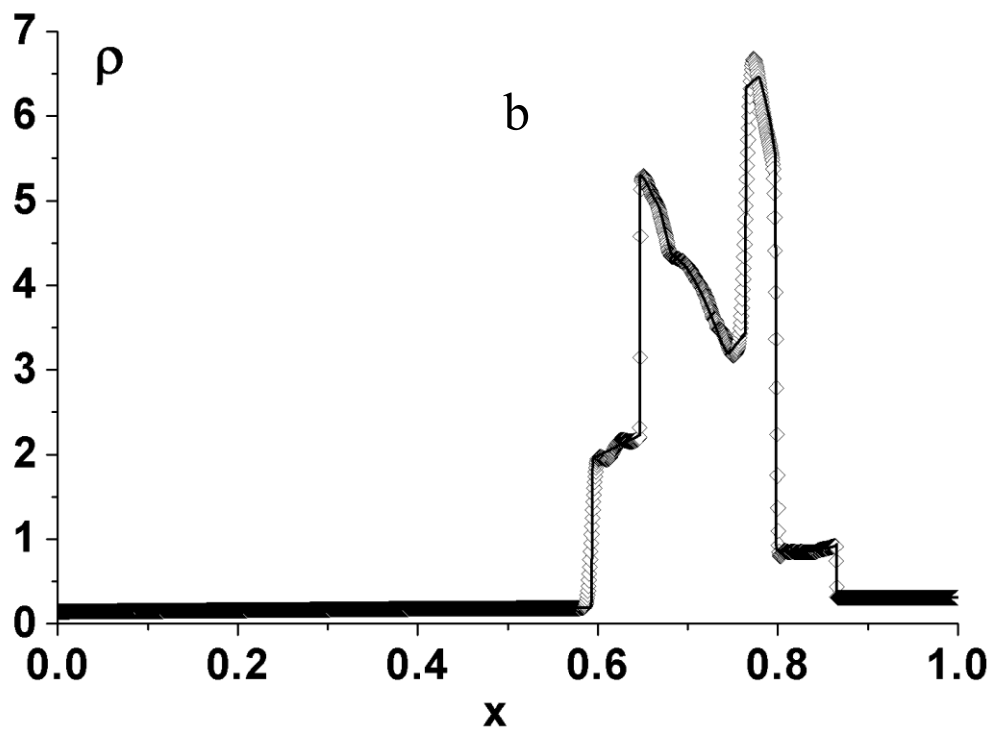
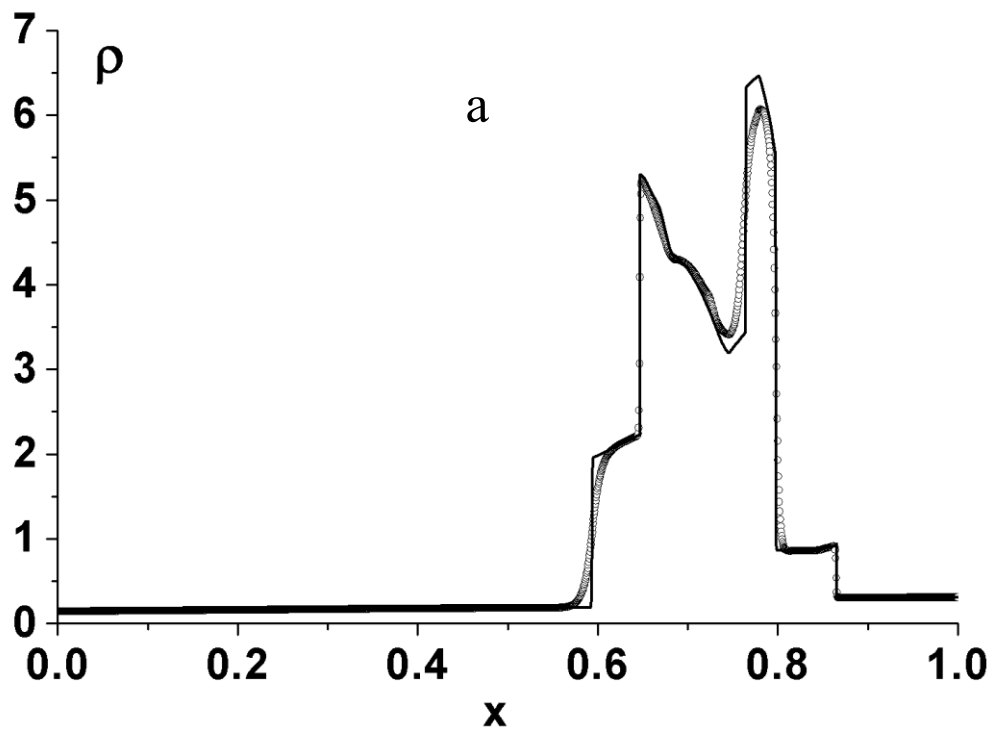


Рис.2: Профили плотности для задачи Woodward-Colella в момент времени  $t = 0.38$  для  $N=500$ :  
а – WENO3, b – WENO5, c – MUSCL, d – метод динамической адаптации.



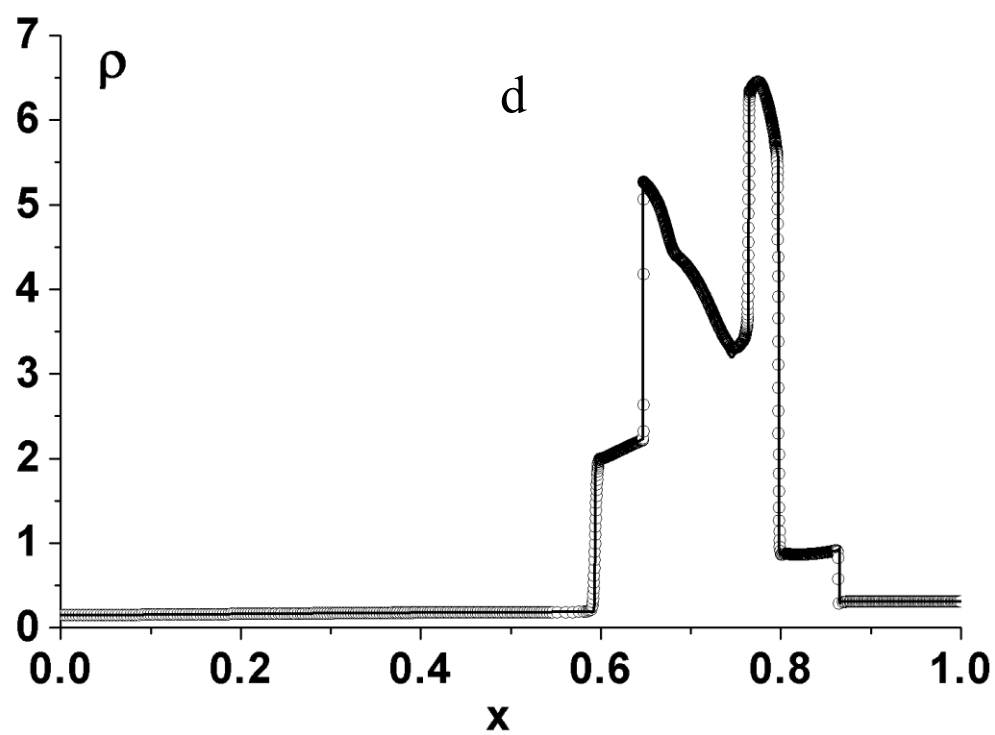
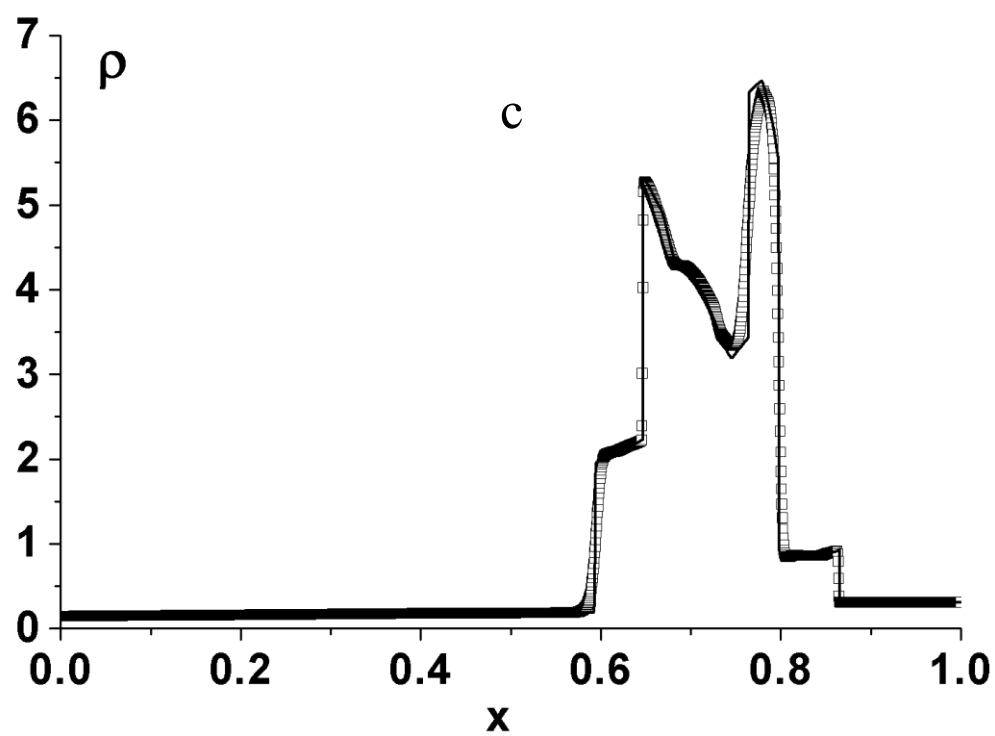
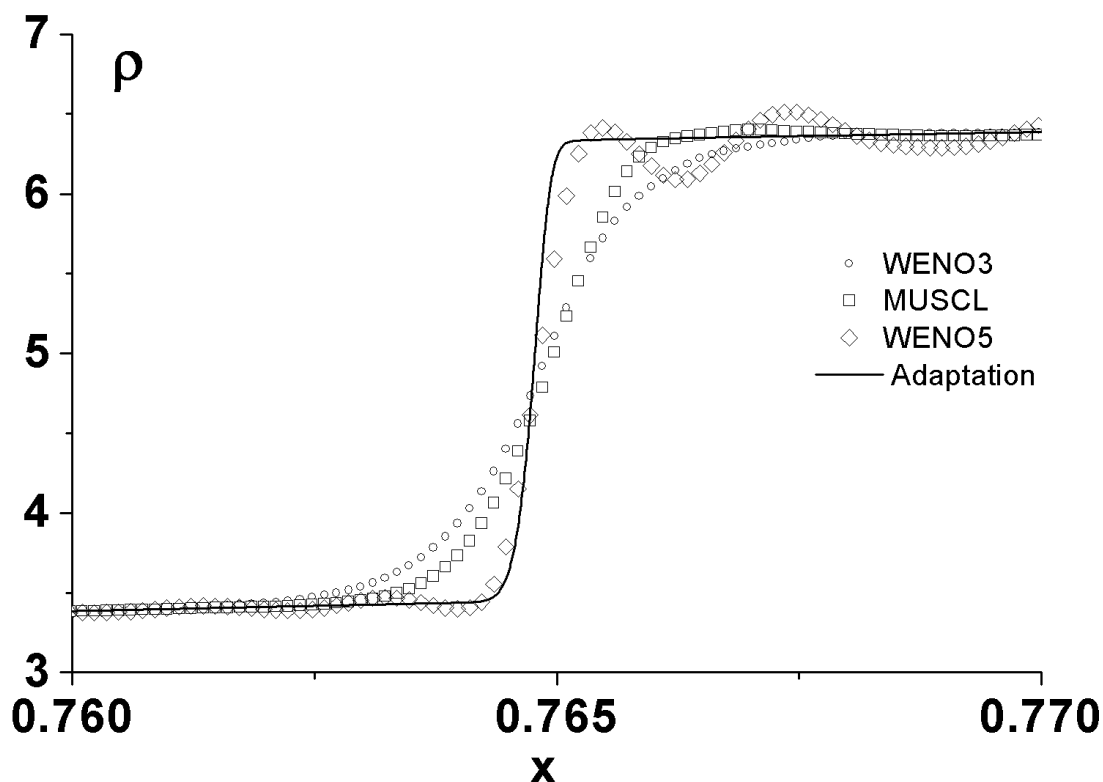


Рис.3: Профили плотности для задачи Woodward-Colella в момент времени  $t = 0.38$  для  $N=2000$ :  
а – WENO3, б – WENO5, в – MUSCL, д – метод динамической адаптации.

	500	2000	40000
WENO3	1	14.63	5854
WENO5	1.615	25.6	10240
MUSCL	1.035	16.42	6568
Дин.адаптация	5.99	96.54	38000

Таблица 1: Относительные времена расчетов

На рис.4 показаны все профили плотности в окрестности центрального контактного разрыва для всех методов с  $N=40000$ . Наиболее точно к разрыву приближается решение, полученное с помощью метода динамической адаптации, затем следуют WENO5, MUSCL и WENO3 соответственно. Как и ожидалось, наибольшей диссипацией решения обладает метод WENO3. Методу WENO5 в ходе численных экспериментов также были свойственны определенные недостатки, которые выражались в проявлении немонотонности получаемых решений и возможной большей ошибкой даже в сравнении с WENO3 (например, на рис. 3b максимальное значение плотности значительно превышает именно в методе WENO5). Профили, получаемые с помощью метода динамической адаптации, наиболее точно отражают общее поведение решения даже на малом числе расчетных ячеек.

Рис.4: Профили плотности в окрестности контактного разрыва при  $N=40000$ .

## ЛІТЕРАТУРА

- [1] A. Andersen, X. Zheng, and V. Cristini, "Adaptive Unstructured Volume Remeshing. I: The Method," *J. Comput. Phys.* **208**, 616–625 (2005).
- [2] M. J. Berger and P. Colella, "Local Adaptive Mesh Refinement for Shock Hydrodynamics," *J. Comput. Phys.* **82**, 64–84 (1989).
- [3] V. D. Liseikin, "A Survey of Structured Adaptive Grid Generation Methods," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **36**, 3–41 (1996).
- [4] D. V. Rudenko and S. V. Utyuzhnikov, "Use of Dynamically Adaptive Grids for Modeling Three-Dimensional Unsteady Gas Flows with High Gradients," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **42**, 395–409 (2002)
- [5] N. A. Dar'in, V. I. Mazhukin, and A. A. Samarskii, "A Finite Difference Method for Solving One-Dimensional Gas Dynamics Problems on Adaptive Grids that Are Dynamically Related to the Solution," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **28**, 1210–1225 (1988).
- [6] P.V. Breslavskii and V.I. Mazhukin, "Dynamically Adapted Grids for Interacting Discontinuous Solutions", *Comput. Math. Math. Phys.* **47**, 687-706 (2007).
- [7] A. A. Samarskii and Yu. P. Popov, *Finite Difference Methods for Solving Gas Dynamics Problems*, 3rd ed. Nauka, Moscow, (1992).
- [8] E. S. Oran and J. P. Boris, *Numerical Simulation of Reactive Flow*, Elsevier, New York, (1987); Mir, Moscow, (1990).
- [9] A. Harten, "ENO Schemes with Subcell Resolution," *J. Comput. Phys.* **83**, 148–184 (1989).
- [10] X.-D. Liu, S. Osher, and T. Chan, "Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes," *J. Comput. Phys.* **115**, 200–212 (1994).
- [11] B. Van Leer, "Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. V. A Second Order Sequel to Godunov's Method," *J. Comput. Phys.* **32**, 101–136 (1979).
- [12] R. J. LeVeque and K. M. Shyue, "One-Dimensional Front Tracking Based on High Resolution Wave Propagation Methods," *SISC* **16**, 348–377 (1995).
- [13] S. A. Ivanenko and A. A. Charakhch'yan, "Curved Grids Consisting of Convex Quadrangles," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **28**, 503–514 (1988).
- [14] N. A. Dar'in and V. I. Mazhukin, "An Approach to Generation of Adaptive Grids," *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **298**, 64–68 (1988).
- [15] S. K. Godunov, "A Finite Difference Method for the Numerical Calculation of Discontinuous Solutions to Gas Dynamics Equations," *Mat. Sb.* **47** (3), 271–306 (1959).
- [16] A. Harten, "High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws," *J. Comput. Phys.* **49**, 357–393 (1983).
- [17] Ph. Colella and P. R. Woodward, "The Piecewise Parabolic Method (PPM) for Gas-Dynamical Simulations," *J. Comput. Phys.* **54**, 174–201 (1984).
- [18] J. M. Hyman and Sh. Li, Iterative and Dynamic Control of Adaptive Mesh Refinement with Nested Hierarchical Grids, *Los Alamos Lab. Rep.*, No. 5462 (1998).
- [19] V. I. Mazhukin, O. Kastel'yanos, A. A. Samarskii, and A. V. Shapranov, "The Dynamic Adaptation Method in Nonstationary Problems with High Gradients," *Mat. Modelir.* **5** (4), 32–56 (1993).
- [20] P. V. Breslavskii and V. I. Mazhukni, "The Dynamic Adaptation Method in Gas Dynamics," *Mat. Modelir.* **7** (12), 48–78 (1995).
- [21] E.F.Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, 2<sup>nd</sup> ed. Springer - Verlag Berlin Heidelberg New-York, (1999)

Received June 8, 2013