MATHEMATICA MONTISNIGRI
Vol XXVII (2013) 5-8

О структуре нулевых множеств функций из F-алгебр M^q, $0 < q < 1$, в круге

В. И. Гаврилов, А. В. Субботин

Abstract. The paper deals with the F-algebras M^q, $0 < q < 1$, of analytic functions f in the unit disc D: $|z| < 1$ on the complex z-plane such that the functions $\log_+(\sup\limits_{0\leqslant r<1} |f(re^{i\theta})|)$ belong to the Lebesgue class $L^q[0, 2\pi]$, $0 < q < 1$. A necessary condition is proved for a sequence of points in D to be the sequence of zeros for a function in M^q, $0 < q < 1$.[1]

1 Введение

В заметке рассматриваются классы M^q, $0 < q < 1$, функций f, аналитических в единичном круге D: $|z| < 1$ на комплексной z-плоскости и удовлетворяющие условию

$$|f|_q = \int\limits_0^{2\pi} \log^q(1 + \sup_{0\leqslant r<1} |f(re^{i\theta})|)\, \frac{d\theta}{2\pi} < +\infty. \tag{1}$$

В статье [1] установлено, что каждый класс M^q, $0 < q < 1$, содержит все аналитические функции из пространства Неванлинны N; т. е. все аналитические в D функции f, у которых

$$\sup_{0\leqslant r<1} \int\limits_0^{2\pi} \log_+ |f(re^{i\theta})|\, \frac{d\theta}{2\pi} < +\infty,$$

где $\log_+ = \ln_+$ и $\ln_+ a = \max(\ln a, 0)$, $a > 0$, $\ln_+ 0 = 0$, и что функции f классов M^q, $0 < q < 1$, обладают почти всюду на единичной окружности Γ: $|z| = 1$ конечными угловыми пределами $f(e^{i\theta})$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, и

$$\int\limits_0^{2\pi} \log_+^q |f(e^{i\theta})|\, \frac{d\theta}{2\pi} < +\infty.$$

[1]2010 Mathematics Subject Classification: 30H05, 30D55.
Key words and phrases: analytic functions, F-algebras, sets of zeros

Кроме того, установлено, что для каждого фиксированного q, $0 < q < 1$, функция $\rho_q(f,g) = |f-g|_q$, $f,g \in M^q$, определяет на M^q инвариантную метрику, относительно которой класс M^q, $0 < q < 1$, образует полное сепарабельное метрическое пространство с непрерывной операцией умножения; т. е. образует сепарабельную F-алгебру (отметим, что полное метрическое пространство N Неванлинны F-алгебры не образует и не сепарабельно). Отметим еще, что результаты статьи [1] сформулированы и доказаны для аналитических функций нескольких комплексных переменных.

Авторы неоднократно (см., например, [2]) публиковали гипотезу о структуре множества нулей функций из F-алгебр M^q, $0 < q < 1$, состоящую в том, что последовательность (z_n) точек круга D образует множество нулей некоторой функции из M^q, $0 < q < 1$, в том и только в том случае, когда сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|)^{1/q} < +\infty. \tag{2}$$

В этой заметке мы приведем доказательство необходимости условия (2).

2 Основной результат

Будет доказана следующая

Теорема. *Необходимым условием, чтобы последовательность* (z_n) *точек круга* D *была последовательностью нулей некоторой функции из* M^q, $0 < q < 1$, *служит условие* (2).

Доказательство теоремы базируется на утверждении, что F-алгебры M^q, $0 < q < 1$, содержатся в пространствах М. М. Джрбашяна $\mathscr{N}_\alpha$, $\alpha > -1$, с соответствующими значениями параметра α. Напомним (см., например, [3]), что аналитическая в круге D функция f принадлежит классу $\mathscr{N}_\alpha$, $\alpha > -1$, если

$$\frac{1}{c_\alpha}\iint\limits_D (1-|z|)^\alpha \log_+|f(z)|\,dx\,dy < +\infty, \tag{3}$$

где

$$c_\alpha = \iint\limits_D (1-|z|)^\alpha\,dx\,dy$$

и $z = x + iy$.

Лемма. *Вложение*

$$M^q \subseteq \mathscr{N}_{1/q-2} \tag{4}$$

справедливо для любого q, $0 < q < 1$.

Доказательство. Действительно, объединение основных результатов статей [4] и [5] позволяет заключить, что для произвольной неотрицательной субгармонической в D функции F и любых $0 < q < p < +\infty$ имеет место оценка

$$\left(\iint\limits_D (1-|z|)^{p/q-2} F(z)^p \, dx\, dy\right)^{1/p} \leqslant C\left(\int\limits_0^{2\pi} \bigl(\sup_{0\leqslant r<1} F(re^{i\theta})\bigr)^q \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/q}, \tag{5}$$

с некоторой конечной постоянной $C = C(p,q)$.

Положив в (5) $p = 1$ и $F(z) = \log_+ |f(z)|$, получим для любого q, $0 < q < 1$, и произвольной аналитической в D функции $f(z)$ оценку

$$\iint\limits_D (1-|z|)^{1/q-2} \log_+ |f(z)| \, dx\, dy \leqslant C\left(\int\limits_0^{2\pi} \log_+^q \bigl(\sup_{0\leqslant r<1} |f(re^{i\theta})|\bigr) \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/q},$$

из которой, с учетом условий (1) и (3) с $\alpha = 1/q - 2$, следует вложение (4). □

Переходим к доказательству теоремы.

Доказательство теоремы. М. М. Джрбашяном доказано (см. также [3]), что последовательность (z_n) точек круга D будет последовательностью нулей некоторой функции класса $\mathscr{N}_\alpha$, $\alpha > -1$, тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-|z_n|)^{\alpha+2}. \tag{6}$$

Для функций из F-алгебр M^q, $0 < q < 1$, на основании вложения (4), условие сходимости ряда (6) принимает вид условия (2). □

Замечание 1. Доказательство достаточности условия (2), скорее всего, сводится к изучению свойств бесконечных произведений М. М. Джрбашяна, являющихся обобщениями классических произведений Бляшке (см. [3]).

Замечание 2. Результаты этой заметки и другие свойства нулевых множеств содержатся в выходящей из печати монографии [6].

Список литературы

[1] В. И. Гаврилов, А. В. Субботин. F-алгебры голоморфных функций в шаре, содержащие класс Неванлинны// *Math. Montisnigri*, vol. XII (2000), 17-31.

[2] V. I. Gavrilov, A. V. Subbotin. On F-algebras of holomorphic functions in the ball that contain the Nevanlinna class. XI Congress of mathematicians of Serbia and Montenegro. Petrovac na moru, September 28–October 3, 2004. Book of Abstracts, 31.

[3] С. В. Шведенко. Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре. Математический анализ (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР), т. 23 (1985), 3–124.

[4] B. Jawerth, A. Torchinsky. On a Hardy and Littlewood imbedding theorem. Michigan Math. J., vol. 31 (1984), 131–137.

[5] H. O. Kim, Y. Y. Park. Maximal functions of plurisubharmonic functions // Tsukuba J. Math., vol. 16 (1992), №1, 11–18.

[6] В. И. Гаврилов, А. В. Субботин, Д. А. Ефимов. Граничные свойства аналитических функций (дальнейший вклад). Москва, Издательство Московского университета, 2012.— 264 стр.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра математического анализа; 119992 Москва, ГСП-2, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет.

E-mail: `awsubbotin@mail.ru`

Received April 4, 2013