MATHEMATICA MONTISNIGRIX
Vol XXIV (2012)

International Seminar
"Mathematical Models & Modeling in
Laser-Plasma Processes &
Advanced Science Technologies"
LPpM3-2012

К МГД МОДЕЛИРОВАНИЮ СТРУКТУРЫ И ЭВОЛЮЦИИ ТУРБУЛЕНТНОГО АККРЕЦИОННОГО ДИСКА ПРОТОЗВЕЗДЫ

А.В. КОЛЕСНИЧЕНКО

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Москва, Россия

e-mail: kolesn@keldysh.ru, web page: http://keldysh.ru/kolesnichenko/person.htm

Ключевые слова: МГД- уравнения, турбулентность, протопланетные диски.

Аннотация. В рамках основной проблемы космогонии, связанной с реконструированием солнечного протопланетного диска на самых ранних этапах его существования, сформулирована в приближении одножидкостной магнитной гидродинамики замкнутая система МГД уравнений масштаба среднего движения, предназначенная для постановки и численного решения различных задач по взаимосогласованному моделированию структуры и эволюции диска и связанной с ним короны. Проанализировано влияние на формирование структуры диска, как осесимметричного магнитного поля прото-звезды, так и крупномасштабного поля, порождаемого механизмом турбулентного динамо. Разработан новый подход к моделированию коэффициентов турбулентного переноса в слабо ионизованном диске, позволяющий учитывать эффекты обратного влияния сгенерированного магнитного поля и процессов конвективного переноса тепла на развитие турбулентности в стратифицированном слое конечной толщины и, тем самым, отойти от широко используемого в астрофизической литературе α-формализма Шакуры и Сюняева. Обсуждается модель тонкого (но оптически толстого) некеплеровского диска, учитывающая диссипацию турбулентности за счет кинематической и магнитной вязкости, непрозрачность среды, наличие аккреции из окружающего пространства, воздействие турбулентного $\alpha\omega$-динамо на генерацию магнитного поля, магнитное силовое и энергетическое взаимодействие между диском и его короной и т.п. Предпринятое исследование является продолжением стохастико-термодинамического подхода к описанию турбулентности астрогеофизических систем, развиваемого автором в серии работ[1-10].

1 ВВЕДЕНИЕ

Значительная доля газа в околозвездном протопланетном диске, находящемся на самом начальном этапе своей эволюции, представляет собой частично ионизованную плазму, степени ионизации которой вполне достаточно для развития в ней различного рода плазменных неустойчивостей[11,12], в частности, гидромагнитной сдвиговой неустойчивости, открытой Велиховым[13]. Эта неустойчивость, которая в приложении к астрофизическим дискам получила название магниторотационной неустойчивости Бальбюса-Хаули[14], возникает, когда существует компонента магнитного поля, перпендикулярная плоскости вращения диска, а угловая скорость вращения уменьшается с расстоянием. В результате появляется большое число неустойчивых мелкомасштабных (по сравнению с толщиной диска) мод, развитие которых эффективно генерирует турбулентность в дифференциально вращающемся диске[15-23].

Существование крупномасштабного магнитного поля (даже слабого, $\left|\overline{\mathbf{B}}\right|^2/4\pi\mu\rho \le c_s^2$) существенно усложняет гидродинамические течения в протопланетном диске звезды. Действующие на проводящие слои диска магнитные силы заметно влияют на динамику происходящих в них астрофизических процессов, таких как перенос углового момента на периферию диска, характер и темп аккреции из окружающего пространства (из космической диффузной среды), струйные истечения из короны диска (МГД- активного верхнего слоя) замагниченного вращающегося ветра и т.п. Вполне вероятно, что на раннем этапе образования протопланетного диска во внутренних его областях (т.е. при малых расстояниях ϖ от звезды) в верхних слоях (при больших z) присутствовали и хаотические магнитные поля, генерируемые механизмом турбулентного динамо или просто привнесенные в диск вместе с аккрецируемой межзвездной плазмой. Эти поля, турбулентная энергия которых сопоставима с энергией гидродинамической турбулентности, перемешиваемые благодаря дифференциальному вращению вещества диска, вносят значительный вклад в турбулентную вязкость, как во внутренней области диска, так и во внешних слоях его короны. Эффективность МГД турбулентности как механизма диссипации также существенно зависит от процесса магнитного перезамыкания силовых линий магнитного поля, возможного в том случае, когда силовые линии разной направленности тесно сближаются друг с другом. Перед началом этого процесса в плазме имеется определенный избыток магнитной энергии, затем в ней начинает развиваться так называемая разрывная (тиринг) неустойчивость, которая, в конечном счете, приводит к перезамыканию силовых линий и переходу избыточной энергии магнитного поля в кинетическую или тепловую энергию плазмы[24].

В результате воздействия магнитного поля на движение космической плазмы в диске возникают не только эффективная турбулентная вязкость и турбулентная магнитная диффузия, но и все эффекты, связанные с электродинамикой средних полей[25]. В частности, поскольку во вращающейся проводящеей среде эффективную магнитную диффузию неизбежно сопровождает возникновение турбулентной электродвижущей силы $\alpha\mathbf{B}$ (так называемый α-эффект, связанный в конечном счете с влиянием кинематической и магнитной спиральности на генерацию индуцированного магнитного поля[7,26,27]), то следует ожидать существенного воздействия и механизма турбулентного динамо на структуру и эволюцию «молодого» протопланетного диска. Как известно[28], мелкомасштабная отражательно- неинвариантная (гиротропная) турбулентность во вращающемся диске создает «петли», когда любая силовая трубка магнитного поля под действием локального спирального движения приобретает форму скрученной буквы Ω. Эта магнитная петля сопровождается током, имеющим антипараллельную (параллельную) относительно приложенного среднего магнитного поля компоненту для правовинтовых (левовинтовых) случайных спиральных движений. Энергия производимого подобными токами джоулева тепла является мощным источником нагрева, при котором создается, в частности, дисковая корона, толщина которой порядка толщины диска[29,30]. В действительности корона может быть и гораздо толще[17], поскольку в результате перезамыкания малых петель могут образовываться и крупные петли, которые всплывают в турбулентной среде под действием подъемной силы. Одновременно, короной поддерживается магнитная связь удаленных друг от друга областей диска посредством проходящих через нее крупномасштабных силовых линий, замыкающихся в диске. Подобного рода магнитная связь является также возможным дополнительным источником напряжений в короне и тем самым ее нагрева.

Таким образом, из-за вязких напряжений, возникающих вследствие дифференциального вращения намагниченного аккреционного диска звезды и действия турбулентного динамо, его корона нагревается, подобно тому, как нагревается солнечная корона. Горячая корона способна породить струйное истечение вещества и поля. Фактически подобная струя является замагниченным вращающимся плазменным ветром, истекающим из аккрецирующего диска[31-32]. В свою очередь, вращающийся ветер переносит на бесконечность вместе с веществом и магнитным полем значительный момент количества движения диска, позволяя тем самым ему медленно сжиматься, и обеспечивая, наряду с вязким переносом углового момента наружу, другую возможность удалить момент количества движения из диска[33]. Отметим, что магнитные напряжения в ветре могут также вызывать очень эффективную фокусировку движения вещества – джеты[34].

Применительно к проблеме реконструирования эволюции допланетного газопылевого аккреционного диска, автором в цикле работ[1-5,9,10] разрабатывается подход к решению проблемы адекватного математического моделирования дисковой турбулизованной среды, учитывающей совместное влияние магнитогидродинамических эффектов и эффектов гидродинамической турбулентности на динамику и процессы тепло- и массопереноса в дифференциально вращающейся космической газопылевой плазме, инерционные свойства полидисперсной примеси твердых частиц, процессы коагуляции и излучения, а также ряд дополнительных эффектов, возникающих при турбулентных движениях плазмы в магнитном поле. В частности, в работе[8] в рамках основной проблемы космогонии, связанной с реконструированием протопланетного аккреционного диска, окружавшего прото-звезду на ранних этапах ее существования, была получена в приближении одножидкостной магнитной гидродинамики замкнутая система магнитогидродинамических уравнений масштаба среднего движения, предназначенная для ряда схематизированных постановок и численных решений специальных задач по взаимосогласованному моделированию структуры и эволюции турбулизованного вещества в магнитном диске и в связанной с ним короне в случае, когда происходит аккреция вещества из окружающего космического пространства.

В настоящей работе, продолжающей этот цикл, рассмотрены следующие 4-е аспекта проблемы построения адекватной модели эволюции протопланетного диска звезды:

– формулирование базовой системы осредненных МГД - уравнений для развитой турбулентности, предназначенной для постановки и численного решения задач по взаимосогласованному моделированию астрофизического диска и его короны на ранних этапах их существования;

– разработка нового подхода к моделированию коэффициентов турбулентного переноса в проводящем диске, позволяющего учитывать эффекты обратного влияния магнитного поля и процессов конвективного переноса тепла на развитие турбулентности в стратифицированном по плотности слое конечной толщины;

– анализ влияния на формирование структуры, движения и энергетики осесимметричного диска крупномасштабного магнитного поля, порождаемого механизмом турбулентного $\alpha\omega$ – динамо;

– постановка задачи моделирования тонкого (но оптически толстого) проводящего диска, учитывающая магнитное силовое и энергетическое взаимодействие между диском и его короной, диссипацию турбулентности за счет кинематической и магнитной вязкости, непрозрачность среды, генерацию крупномасштабного магнитного поля механизмом турбулентного динамо, приток вещества, количества движения и энергии (кинетической и гравитационной) из внешней аккреционной оболочки.

2 ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ

Основываясь на результатах работы[8], приведем вначале систему осредненных МГД-уравнений для развитой турбулентности, на основе которых возможно численное моделирование, позволяющее реконструировать ход эволюции и структуру протопланетного аккреционного диска, находящегося около молодого прото-Солнца. Ниже для обозначения осредненных параметров задачи будем использовать два символа: черта сверху означает традиционное теоретико-вероятностное осреднение какой-либо величины $\mathcal{A}(\mathbf{r},\mathrm{t})$ по ансамблю возможных реализаций (времени и/или пространству), в то время как тильда сверху означает весовое осреднение Фавра[35], задаваемое соотношением $\widetilde{\mathcal{A}} \equiv \overline{\rho\mathcal{A}}/\overline{\rho}$ (где $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} + \mathcal{A}' = \widetilde{\mathcal{A}} + \mathcal{A}''$; $\mathcal{A}', \mathcal{A}''$ – соответствующие турбулентные пульсации, $\overline{\mathcal{A}'} = 0$, $\overline{\rho\mathcal{A}''} = 0$; используемые в статье свойства весового осреднения можно найти в монографии[36]. В инерциальной системе отсчета осредненные гидродинамические уравнения для развитого турбулентного течения и уравнение магнитной индукции для среднего магнитного поля $\overline{\mathbf{B}}(\mathbf{r},\mathrm{t})$ в абсолютной гауссовской системе единиц принимают следующий вид:

$$\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\overline{\rho}\,\widetilde{\mathbf{u}}\right) = 0, \tag{1}$$

$$\overline{\rho}\frac{d\widetilde{\mathbf{u}}}{dt} = -\nabla\,(\overline{p} + p^{M}_{turb}) + \nabla\cdot\mathbf{R}^{K} + \frac{1}{c}\overline{\mathbf{j}}\times\overline{\mathbf{B}} - \overline{\rho}\nabla\Psi_{G}, \tag{2}$$

$$\overline{\rho}\frac{d\widetilde{E}}{dt} = -\nabla\cdot(\overline{\mathbf{q}}_{rad} + \mathbf{q}^{turb}) - (\overline{p} + p^{M}_{turb})\nabla\cdot\widetilde{\mathbf{u}} + \mathbf{R}^{K}:\nabla\widetilde{\mathbf{u}} + \frac{1}{4\pi\mu_0}\mathbf{R}^{M}:\nabla\overline{\mathbf{B}} + \frac{1}{\sigma_e}\left|\overline{\mathbf{j}}\right|^2, \tag{3}$$

$$\overline{\rho}\frac{d}{dt}\left(\frac{\overline{\mathbf{B}}}{\overline{\rho}}\right) = \left(\overline{\mathbf{B}}\cdot\nabla\right)\widetilde{\mathbf{u}} + \nabla\cdot\mathbf{R}^{M} + \nu_M\nabla^2\overline{\mathbf{B}}, \qquad (\nabla\cdot\overline{\mathbf{B}} = 0), \tag{4}$$

$$\overline{p} = \Re\overline{\rho}\widetilde{T}. \tag{5}$$

Здесь $d/dt \equiv \partial/\partial t + \widetilde{\mathbf{u}}\cdot\nabla$ – субстанциональная производная по времени для осредненного континуума; $\overline{\rho}(\mathbf{r},\mathrm{t})$, $\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r},\mathrm{t}) \equiv \overline{\rho\mathbf{u}}/\overline{\rho}$ – соответственно осредненные плотность и гидродинамическая скорость космического вещества в диске ($\rho = \overline{\rho} + \rho'$; $\mathbf{u} = \widetilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}''$; $\mathbf{u}''$ – турбулентная пульсация осредненной по Фавру скорости); $\overline{\mathbf{B}}(\mathbf{r},\mathrm{t})$ – осредненный вектор напряженности пульсирующего магнитного поля (среднее магнитное поле);

$$\mathbf{R}^{M}(\mathbf{r},\mathrm{t}) \equiv -\left(\overline{\mathbf{u}''\mathbf{B}} - \overline{\mathbf{B}\mathbf{u}''}\right) \tag{6}$$

– так называемый, магнитный тензор Рейнольдса; $\nu_M \equiv c^2/4\pi\mu_0\sigma_e$ – коэффициент молекулярной магнитной вязкости; c – скорость света; μ_0 – магнитная проницаемость, σ_e – удельный молекулярный коэффициент электропроводности (далее будем предполагать, что μ_0, ν_M и σ_e – const); $\bar{p}(\mathbf{r},t)$, $p^M_{turb}(\mathbf{r},t) \equiv \overline{|\mathbf{B}'|^2}/8\pi\mu_0$ – соответственно газодинамическое давление и турбулентное магнитное давление;

$$\mathbf{R}^K(\mathbf{r},t) \equiv \left\{-\bar{\rho}\overline{\mathbf{u}''\mathbf{u}''} + \overline{\mathbf{B}'\mathbf{B}'}/4\pi\mu_0\right\} \equiv \mathbf{R}(\mathbf{r},t) + \mathbf{T}^M_{turb}(\mathbf{r},t) \tag{7}$$

– кинетический тензор турбулентных напряжений Рейнольдса для турбулизованной среды в присутствии пульсирующего магнитного поля; $\mathbf{R}(\mathbf{r},t) \equiv -\bar{\rho}\overline{\mathbf{u}''\mathbf{u}''}$ – обычный тензор Рейнольдса для газа, имеющий смысл дополнительных (турбулентных) напряжений; $\mathbf{T}^M_{turb}(\mathbf{r},t) \equiv \overline{\mathbf{B}'\mathbf{B}'}/4\pi\mu_0$ – тензор магнитных натяжений для пульсационной составляющей магнитного поля; $\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t)$ – плотность тока проводимости (тока, измеряемого наблюдателем, движущимся вместе с электропроводящим газом), фигурирующая в осредненном законе Ампера

$$\bar{\mathbf{j}} = (c/4\pi\mu_0)\nabla \times \overline{\mathbf{B}}; \tag{8}$$

$$\Psi_G(\mathbf{r}) \equiv -G\mathcal{M}_\odot |\mathbf{r}|^{-1/2} \tag{9}$$

– потенциальная функция гравитационного поля, $\mathcal{M}_\odot$ – масса прото-звезды, G – гравитационная постоянная (ниже мы будем пренебрегать самогравитацией диска, что возможно всегда, когда $\mathcal{M}_{disk}/\mathcal{M}_\odot \le h/R_\infty << 1$, здесь $h(r)$ и R_∞ полутолщина и внешний радиус диска соответственно); $\tilde{E}(\mathbf{r},t) \equiv \overline{\rho E}/\bar{\rho}$ – осредненное по Фавру удельное значение внутренней энергии $E(\mathbf{r},t)$ дисковой среды (далее внутреннюю энергию газа будем далее считать пропорциональной температуре

$$E(\mathbf{r},t) = c_V T = \Re T(\gamma-1)^{-1}, \tag{10}$$

где $\Re = \mathcal{R}/\mu$; $\mathcal{R}$ – газовая постоянная; μ – средняя атомная масса (средняя масса на частицу в единицах m_p); $\gamma = c_P/c_V$ – показатель адиабаты; c_p, $c_V = \Re/(\gamma-1)$ – соответственно удельная теплоемкость газа при постоянном давлении и теплоемкость при постоянном объеме (далее эти величины будем считать постоянными); $\bar{\mathbf{q}}_{rad}(\mathbf{r},t)$ – плотность потока энергии, переносимого излучением; $\mathbf{q}^{turb}_*(\mathbf{r},t) \cong c_p \bar{\rho}\overline{T''\mathbf{u}''}$ – турбулентный поток тепла; $\mathbf{q}^{turb}(\mathbf{r},t) \equiv \mathbf{q}^{turb}_* - \overline{p'\mathbf{u}''}$ – приведенный поток тепла[36].

Относительно осредненных МГД уравнений (1)-(5) заметим следующее: При их выводе мы для простоты не учитывали давления и энергию излучения, хотя часто необходимо рассматривать дисковую среду как смесь идеального газа и излучения абсолютно черного тела. Обобщение на этот случай этих уравнений не представляет труда. В уравнении индукции (4) присутствует член

$$\nabla \cdot \mathbf{R}^M \equiv \overline{(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{u}''} - \overline{(\mathbf{u}''\cdot\nabla)\mathbf{B}} - \overline{\mathbf{B}\nabla\cdot\mathbf{u}''} = \nabla \times \overline{(\mathbf{u}''\times\mathbf{B})} \equiv c\nabla \times \mathcal{G}, \tag{11}$$

играющий роль дополнительного источника, генерирующего среднее магнитное поле $\overline{\mathbf{B}}$. Здесь

$$\mathcal{G}(\mathbf{r},t) \equiv c^{-1}\overline{\mathbf{u}'' \times \mathbf{B}} = c^{-1}\overline{\rho\,\mathbf{u}'' \times (\mathbf{B}/\rho)''}\,, \tag{12}$$

(или в тензорном виде $\mathcal{G}_i \equiv -\varepsilon_{ijk} R^{M}_{jk}/2c$) – порождаемая случайными флуктуациями скорости и магнитного поля дополнительная электродвижущая сила, появляющаяся и в осредненном законе Ома

$$\bar{\mathbf{j}} = \sigma_e(\overline{\mathbf{E}}^* + \mathcal{G}), \qquad \overline{\mathbf{E}}^* \equiv \overline{\mathbf{E}} + c^{-1}\tilde{\mathbf{u}} \times \overline{\mathbf{B}}\,; \tag{13}$$

$\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$ – вектор напряженности электрического поля; ε_{ijk} – альтернирующий тензор Леви-Чивита. Отметим, что одной из основных целей полуэмпирической теории МГД- турбулентности как раз и является конструирование специального замыкающего соотношения для турбулентного потока $\mathcal{G}$, как функции средних полей $\overline{\mathbf{B}}$ и $\tilde{\mathbf{u}}$, с тем, чтобы задавшись полем $\tilde{\mathbf{u}}$, можно было найти $\overline{\mathbf{B}}$ из уравнения индукции (4). С учетом (12), предпоследний член в уравнении притока тепла (3) для среднего движения может быть представлен в виде

$$(1/4\pi\mu_0)\mathbf{R}^{M} : \nabla\overline{\mathbf{B}} = -\mathcal{G}\cdot\bar{\mathbf{j}}\,. \tag{14}$$

Наконец, важно ясно себе представлять[8], что субстанциональное уравнение баланса внутренней энергии принимает форму (3) только в случае сильно развитой турбулентности, когда в структуре пульсирующих полей $\mathbf{u}''$ и $\mathbf{B}'$ устанавливается такое квазистационарное состояние, при котором полная турбулентная энергия плазмы

$$\tilde{b}_\Sigma \equiv \tilde{b} + \tilde{b}_M \equiv \overline{\rho|\mathbf{u}''|^2}\,/\,2\bar{\rho} + \overline{|\mathbf{B}'|^2}/8\pi\mu_0\bar{\rho}\,, \tag{15}$$

равная сумме пульсационной кинетической энергии газа $\tilde{b} \equiv \overline{\rho|\mathbf{u}''|^2}\,/\,2\bar{\rho}$ и турбулентной энергии магнитного поля $\tilde{b}_M \equiv \overline{|\mathbf{B}'|^2}/8\pi\mu_0\bar{\rho}$, мало меняется как во времени, так и в пространстве, $d\,\tilde{b}_\Sigma\,/\,dt \cong 0$.

Система уравнений (1)-(5) должна быть дополнена замыкающими соотношениями для турбулентных потоков, а также выражениями для термодинамических и переносных характеристик. Граничные и начальные условия для структурных параметров не отличаются от соответствующих условий для неэлектропроводящих сред, но необходимо привлекать дополнительные условия для среднего магнитного поля.

Закон сохранения полной энергии. Для целей моделирования нам понадобится также уравнение баланса осредненной (по Фавру) полной энергии дисковой системы, равной сумме $\tilde{U}_{tot} = \tilde{U}^{sub}_{tot} + \tilde{E}^{M}$ полной энергии проводящего газа

$$\tilde{U}^{sub}_{tot}(\mathbf{r},t) \equiv \tilde{E} + \Psi_G + |\tilde{\mathbf{u}}|^2\,/\,2 + \tilde{b} \tag{16}$$

и осредненной энергии электромагнитного поля

$$\tilde{E}_M(\mathbf{r},t) \equiv \overline{\rho\,E_M}/\bar{\rho} \equiv \overline{\rho(|\mathbf{B}|^2\,/\,8\pi\mu_0\rho)}\,/\,\bar{\rho} = |\overline{\mathbf{B}}|^2\,/\,8\pi\mu_0\bar{\rho} + \tilde{b}_M\,. \tag{17}$$

Следуя работе[8], это уравнение для развитой турбулентности запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\,\widetilde{U}^{sub}_{tot}+\bar{\rho}\,\widetilde{E}^{M}\right)+\nabla\cdot\left\{\left(\bar{\rho}\,\widetilde{U}^{sub}_{tot}\right)\widetilde{\mathbf{u}}+\mathbf{q}^{turb}+\bar{p}\widetilde{\mathbf{u}}-\left(\left|\overline{\mathbf{B}}\right|^2/8\pi\mu_0\right)\widetilde{\mathbf{u}}+\overline{\mathbf{q}_{Poynt}}-\mathbf{R}\cdot\widetilde{\mathbf{u}}+\overline{\rho b''\,\mathbf{u}''}\right\}=Q_{rad}$$

где (18)

$$\overline{\mathbf{q}_{Poynt}}\equiv(c/4\pi)\,\overline{\mathbf{E}\times\mathbf{B}} \tag{19}$$

– осредненный вектор Пойнтинга, имеющий смысл плотности потока энергии электромагнитного поля;

$$Q_{rad}\equiv-\nabla\cdot\bar{\mathbf{q}}_{rad}=\mathcal{A}-\mathcal{R}=\int_0^\infty\int_\Omega\rho\kappa_{\nu a}I_\nu d\Omega\,d\nu-4\pi\int_0^\infty\rho\kappa_{\nu a}B_\nu d\nu\,; \tag{20}$$

ν, $I_\nu(\mathbf{r},\Omega,t)$ и $B_\nu(\mathbf{r},\Omega,t)$ – соответственно частота, спектральная интенсивность и функция внутренних источников излучения; Ω – направление движения фотонов, $\kappa_{\nu a}$ – истинный коэффициент поглощения излучения веществом диска (спектральная непрозрачность). Первый ($\mathcal{A}$) член в выражении (20) соответствует поглощаемой, а второй ($\mathcal{R}$) – спонтанно излучаемой радиационной энергии в единице объема в единицу времени. Возможны несколько режимов переноса излучения, которые применимы в различных областях диска в зависимости от темпа аккреции, массы прото-звезды и т.п. В частности, если полная оптическая толщина диска $d\tau_\nu=\rho\kappa_{\nu a}ds$ вдоль направления распространения s превосходит единицу, фотоны переносятся к его поверхности путем диффузии (см. соотношение (26)). В общем случае спектральная интенсивность I_ν, входящая в формулу (20), должна определяться в процессе решения уравнения переноса излучения.

В МГД приближении вектор Пойнтинга $\overline{\mathbf{q}_{Poynt}}$ может быть преобразован к виду[8]

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{q}_{Poynt}}=\bar{\rho}\left(\frac{\left|\overline{\mathbf{B}}\right|^2}{8\pi\mu_0\bar{\rho}}+b_M+\frac{p^M_{turb}}{\bar{\rho}}\right)\widetilde{\mathbf{u}}+\left(\frac{\left|\overline{\mathbf{B}}\right|^2}{8\pi\mu_0}\mathbf{I}-\frac{\overline{\mathbf{B}}\,\overline{\mathbf{B}}}{4\pi\mu_0}\right)\cdot\widetilde{\mathbf{u}}-\mathbf{T}^M_{turb}\cdot\widetilde{\mathbf{u}}+\\+\frac{1}{4\pi\mu_0}\overline{(|\mathbf{B}|^2\mathbf{I}-\mathbf{B}\mathbf{B})\cdot\mathbf{u}''}-\nu_M\nabla\cdot\left(\frac{\left|\overline{\mathbf{B}}\right|^2}{8\pi\mu_0}\mathbf{I}-\frac{\overline{\mathbf{B}}\,\overline{\mathbf{B}}}{4\pi\mu_0}\right)-\nu_M\nabla\cdot\left(p^M_{turb}\mathbf{I}-\mathbf{T}^M_{turb}\right),\end{aligned} \tag{19*}$$

причем для сильно развитой турбулентности два малых члена, включающие коэффициент ν_M, для большинства областей аккреционного диска и короны могут быть опущены[37]. Их следует принимать во внимание только в областях высоких градиентов магнитного поля, например, в области стохастического перезамыкания магнитных силовых линий.

Комбинируя (18) и (19*), запишем закон сохранения полной энергии дисковой системы в следующем виде

$$\frac{d(\bar{\rho}\widetilde{U}_{tot})}{dt}+\nabla\cdot\left\{\mathbf{q}^{turb}+(\bar{p}+p^M_{turb})\widetilde{\mathbf{u}}-\left(\mathbf{R}^K+\frac{\overline{\mathbf{B}}\,\overline{\mathbf{B}}}{4\pi\mu_0}\right)\cdot\widetilde{\mathbf{u}}+\overline{\rho b''\mathbf{u}''}+\frac{1}{4\pi\mu_0}\overline{\rho\left(\frac{|\mathbf{B}|^2\mathbf{I}-\mathbf{B}\mathbf{B}}{\rho}\right)''\cdot\mathbf{u}''}\right\}=Q_{rad}, \tag{18*}$$

причем два корреляционных члена в левой части этого уравнения также можно опустить в силу их малости в рассматриваемой здесь задаче[38].

Определяющие соотношения. В работе[8] описание турбулентных движений электропроводящего газа проводилось в рамках двухжидкостного термодинамического континуума, состоящего из двух взаимно открытых подсистем, заполняющих одно и то же координатное пространство непрерывно – подсистемы осредненного движения и подсистемы турбулентного хаоса, связанного с пульсационным движением вещества и поля. Предполагалось, что элементарный объем $d\mathbf{r}$ подсистемы турбулентного хаоса может быть охарактеризован обобщенными термодинамическими параметрами состояния, такими как энтропия S_{turb}, внутренняя энергия E_{turb}, давление p_{turb} и температура T_{turb} турбулизации (величина, характеризующая степень интенсивности турбулентных пульсаций[39]). Энтропия S_{turb} и внутренняя энергия E_{turb} турбулизации рассматривались в качестве первичных концепций и вводились в модель a priori для обеспечения связности термодинамической теории; при этом не подразумевалась их точная физическая интерпретация[40]. Особо был проанализирован квазиравновесный режим движения в подсистеме турбулентного хаоса, при котором суммарное возникновение $\sigma_{(S_{turb})} \equiv \sigma^e_{(S_{turb})} + \sigma^i_{(S_{turb})}$ энтропии турбулизации S_{turb} почти отсутствует. Это условие означает, что производство $\sigma^i_{(S_{turb})}$ энтропии S_{turb} (за счет необратимых процессов внутри подсистемы турбулентного хаоса) в такой степени компенсируется ее оттоком $\sigma^e_{(S_{turb})}$ к подсистеме осредненного движения, что $\sigma_{(S_{turb})} \cong 0$. Поскольку всегда $\sigma^i_{(S_{turb})} \geq 0$, то справедливо выражение $0 > \sigma^e_{(S_{turb})} \cong -\sigma^i_{(S_{turb})}$. Отсюда следует, что для поддержания стационарно-неравновесного режима турбулентности необходим приток отрицательной энтропии (негэнтропии) от осредненного движения к хаотической составляющей, причем $\sigma^e_{(S_{turb})} = -T\sigma^e_{(\widetilde{S})} / T_{turb} < 0$. Только в этом случае балансовое уравнение для удельная энтропия системы $\widetilde{S} = c_v \ln\left(\widetilde{T}/\bar{\rho}^{\,\gamma-1}\right)$ принимает «стандартный» вид общего уравнения переноса тепла[10]

$$\bar{\rho}\, d\widetilde{S}/dt + \nabla\cdot\left(\mathbf{q}^{turb}/\widetilde{T}\right) = \sigma_{\widetilde{S}}, \tag{21}$$

где локальное возникновение $\sigma_{\widetilde{S}}$ энтропии $\widetilde{S}$ за счет диссипативных процессов в электропроводящей турбулизованной среде определяется выражением

$$0 \leq \widetilde{T}\sigma_{\widetilde{S}} \equiv -\mathbf{q}^{turb}\cdot\frac{\nabla\widetilde{T}}{\widetilde{T}} + \left(\mathbf{R}^K + \tfrac{2}{3}\bar{\rho}(\widetilde{b} - \widetilde{b}_M)\mathbf{I}\right) : \overset{0}{\mathbf{D}} + \frac{\mathbf{R}^M : (\nabla\overline{\mathbf{B}})^a}{4\pi\mu_0} + \frac{|\bar{\mathbf{j}}|^2}{\sigma_e} + Q_{rad}. \tag{22}$$

Здесь $\overset{0}{\mathbf{D}} \equiv (\nabla\widetilde{\mathbf{u}})^s - \frac{1}{3}\mathbf{I}(\nabla\cdot\widetilde{\mathbf{u}})$ – скорость сдвига для осредненного движения; $\mathbf{I}$ – единичный тензор; $\left((\nabla\widetilde{\mathbf{u}})^s\right)_{jk} \equiv \frac{1}{2}\left(\partial\widetilde{u}_j/\partial x_k + \partial\widetilde{u}_k/\partial x_j\right)$, $\left((\nabla\overline{\mathbf{B}})^a\right)_{jk} \equiv \frac{1}{2}\left(\partial\overline{B}_j/\partial x_k - \partial\overline{B}_k/\partial x_j\right)$ – соответственно симметрическая и антисимметрическая части тензоров $\nabla\widetilde{\mathbf{u}}$ и $\nabla\overline{\mathbf{B}}$.

При использовании метода Онзагера неравновесной термодинамики билинейная форма (22) для $\sigma_{\widetilde{S}}$ позволяет получить определяющие (замыкающие) соотношения для турбулентного потока тепла $\mathbf{q}^{turb}$, полного тензора турбулентных напряжений $\mathbf{R}^K$ и магнитного тензора Рейнольдса $\mathbf{R}^M$, отвечающие режиму стационарно-неравновесного состояния турбулентного поля. Для изотропной турбулентности (здесь мы ограничимся именно этим случаем), при использовании принципа Кюри-Пригожина (согласно которому связь между тензорами различного ранга в изотропной среде невозможна), эти соотношения в случае пренебрежения малыми перекрестными эффектами принимают вид[9]

$$\mathbf{q}^{\mathrm{turb}}(\mathbf{r},t) = -\lambda^{\mathrm{turb}}(\nabla\widetilde{T} - \nabla\overline{p}/\overline{\rho}c_p) = -(\lambda^{\mathrm{turb}}\widetilde{T}/c_p)\nabla\widetilde{S} \cong -\lambda^{\mathrm{turb}}(\nabla\widetilde{T} - \mathbf{g}/c_p)\,, \qquad (23)$$

$$\mathbf{R}^{K}(\mathbf{r},t) = -\tfrac{2}{3}\overline{\rho}(\widetilde{b} - \widetilde{b}_M)\,\mathbf{I} + 2\overline{\rho}\nu_K^{\mathrm{turb}}\left((\nabla\widetilde{\mathbf{u}})^s - \tfrac{1}{3}\mathbf{I}\,\nabla\cdot\widetilde{\mathbf{u}}\right), \qquad (24)$$

$$\mathbf{R}^{M}(\mathbf{r},t) = 2\nu_M^{\mathrm{turb}}(\nabla\overline{\mathbf{B}})^a\,, \quad (\text{или}\;\; c\mathcal{G} = -\nu_M^{\mathrm{turb}}\nabla\times\overline{\mathbf{B}}\,), \qquad (25)$$

где λ^{turb}, ν_K^{turb}, ν_M^{turb} – соответственно коэффициенты турбулентной теплопроводности, турбулентной кинематической вязкости и турбулентной диффузии магнитного поля, зависящие в общем случае от параметров: $\overline{\rho}$, $\nabla\widetilde{\mathbf{u}}$, $\overline{\mathbf{B}}/4\pi\mu_0$ и L (величина $L(\mathbf{r})$ является некоторой геометрической характеристикой расположения точки $\mathbf{r}$, например, равной обычной «длине пути смешения»[41]).

Ниже определяющее соотношение для вектора радиации будем использовать в форме лучистого потока тепла:

$$\mathbf{q}_{\mathrm{rad}}(\mathbf{r},t) = -\chi_{\mathrm{rad}}\nabla\widetilde{T} = -\frac{16\sigma_B\widetilde{T}^3}{3\kappa\,\overline{\rho}}\nabla(\widetilde{T}) = -\frac{4\sigma_B}{3\kappa\,\overline{\rho}}\nabla(\widetilde{T}^4)\,, \qquad (26)$$

справедливой в случае диффузии равновесного излучения (например, при локальном термодинамическом равновесии излучения с веществом внутри оптически толстых дисков). Здесь σ_B, $\chi_{\mathrm{rad}} = 16\sigma_B\widetilde{T}^3/3\kappa\,\overline{\rho}$ – соответственно постоянная Стефана-Больцмана и коэффициент лучистой (нелинейной) теплопроводности среды, весьма сильно зависящий от температуры и плотности вещества; $\kappa(\rho,T)$ – полная непрозрачность среды, которая сложным образом зависит от ρ и T, а также от степени ионизации, химического состава[42] и т.п. В общем случае величина κ определяется как Росселандово среднее по обратным величинам $1/\kappa_\nu$ спектральной непрозрачности[43]. Как известно, доминирующий вклад κ_{ff} в непрозрачность κ в аккреционном диске вносит нерелятивистское тепловое тормозное излучение, или «свободно-свободные переходы». Связанную с этими процессами поглощения среднюю по Росселанду непрозрачность κ, можно определять формулой Крамерса

$$\kappa_{ff}(\rho,T) = \mathcal{K}\rho T^{-7/2}\ \text{см}^2\,\text{г}^{-1}, \qquad (27)$$

где $\mathcal{K} = 0.32\times10^{23}$ – константа. В оптически толстых дисках сравнимую (но все же меньшую) величину $\kappa_{es} = 2\times10^{-2}(1) + X)$ см^2 г$^{-1}$ вносят «связанно-связанные» переходы в линиях и «связанно-свободные» ионизационные переходы (здесь X – массовая доля водорода в среде).

Сделаем теперь важное замечание по поводу формулы (25) для Э.Д.С., связанной с вектором $\mathcal{G}$. Эта формула справедлива только для изотропной (в гидродинамическом смысле) турбулентности, когда поле пульсирующих скоростей $\mathbf{u}''$ обладает зеркальной симметрией во всей системе. Однако в случае вращающегося аккреционного диска возможна ситуация, когда, например, в верхней части диска левовращательные турбулентные движения более вероятны, чем правовращательные, или наоборот. Физической причиной нарушения отражательной симметрии служит воздействие силы Кориолиса на вихри, всплывающие и опускающиеся в турбулентной среде диска. При этом отсутствует зеркальная симметрия поля $\mathbf{u}''$ относительно центральной плоскости диска, и турбулентность может обладать так называемой плотностью гидродинамической спиральности $h_{hel} \equiv \overline{\mathbf{u}'' \cdot (\nabla \times \mathbf{u}'')}$, которая характеризует избыток вихрей данного знака[7,26,27,44]. Обобщение формулы (25) на случай отражательно-несимметричной турбулентности приминает вид[45]

$$c\mathcal{G} = \alpha\,\overline{\mathbf{B}} - \nu_M^{turb} \nabla \times \overline{\mathbf{B}}\,, \qquad (25^*)$$

где коэффициент спиральности α является псевдоскаляром. Легко видеть, что с дополнительным слагаемым в соотношении (25^*) связан электрический ток $\bar{\mathbf{j}} = \sigma_e \alpha\,\overline{\mathbf{B}} + \ldots$, направленный вдоль магнитного поля. Простые рассуждения показывают, что для случая изотропного и зеркально-симметричного поля скоростей $\mathbf{u}''$, коэффициент спиральности α равен нулю. Действительно, для изотропной среды одинакова вероятность, как некоторой данной реализации ансамбля этого поля, так и реализации, полученной из неё зеркальным отражением. Тогда, с одной стороны, величина α не должна изменяться, если выполнить это отражение, так как ансамбль не изменился, но, с другой стороны, коэффициент α должен изменить свой знак, так как он является псевдоскаляром; поэтому $\alpha = 0$.

Подстановка (25^*) в уравнение индукции (4) для средних полей дает

$$\bar{\rho}\frac{d}{dt}\left(\frac{\overline{\mathbf{B}}}{\bar{\rho}}\right) = \left(\overline{\mathbf{B}} \cdot \nabla\right)\tilde{\mathbf{u}} + (\nu_M + \nu_M^{turb})\nabla^2 \overline{\mathbf{B}} - \nabla \times \left\{\nu_M^{turb}(\nabla \times \overline{\mathbf{B}})\right\} + \nabla \times (\alpha\,\overline{\mathbf{B}})\,. \qquad (28)$$

Для хорошо перемешанной турбулентности (создаваемой $\mathbf{u}''$-полем), когда магнитное поле становятся запутанным и мелкомасштабным, процесс диффузии усиливается, $\nu_M^{turb} >> \nu_M > 0$ (условие сильно развитой турбулентности). Ниже мы будем для простоты предполагать, что в уравнении (28) $\nu_M^{turb} - \mathrm{const}$; $\alpha - \mathrm{const}$; тогда

$$\bar{\rho}\frac{d}{dt}\left(\overline{\mathbf{B}}/\bar{\rho}\right) = \left(\overline{\mathbf{B}} \cdot \nabla\right)\tilde{\mathbf{u}} + \nu_M^{turb}\nabla^2 \overline{\mathbf{B}} + \alpha \nabla \times \overline{\mathbf{B}}\,. \qquad (28^*)$$

Отсюда видно, что отражательно-симметричная изотропная турбулентность, в отличие от гиротропной, вызывает только турбулентную диффузию магнитного поля.

Следует отметить, что в силу своей псевдоскалярной природы альфа-эффект антисимметричен относительно центральной плоскости диска. Свойства симметрии уравнений Максвелла допускают при этом два вида симметрии для собственных решений (мод) уравнения динамо среднего поля (28^*): магнитные поля могут быть антисимметричными относительно экватора (дипольная симметрия) и симметричны относительно экватора (квадрупольная симметрия). В частности, механизм солнечного динамо возбуждает, как правило, преимущественно дипольную осциллирующую моду (правило Хейла).

Если теперь подставить в закон Ома (13) для средних полей выражения (25^*) и (8), то для осредненного тока будем иметь

$$\bar{\mathbf{j}} = \sigma_e^{turb}\overline{\mathbf{E}}^* + \frac{c\alpha}{4\pi\mu_0\nu_M^{turb}}\overline{\mathbf{B}} \cong \sigma_e^{turb}\left(\overline{\mathbf{E}}^* + c^{-1}\alpha\overline{\mathbf{B}}\right). \qquad (29)$$

Здесь турбулентная проводимость σ_e^{turb} определяется формулой

$$\sigma_e^{turb} = \frac{\sigma_e}{1+4\pi\mu\nu_M^{turb}\sigma_e/c^2} = \frac{\sigma_e\nu_M}{\nu_M+\nu_M^{turb}} \cong \frac{\sigma_e\nu_M}{\nu_M^{turb}} = \frac{c^2}{4\pi\mu_0\nu_M^{turb}}, \qquad (30)$$

из которой видно, что турбулентная проводимость σ_e^{turb} в случае развитой турбулентности меньше молекулярной проводимости σ_e.

Общее уравнение переноса тепла (21), с учетом определяющих соотношений (23)-(25), принимает вид

$$\tilde{T}\bar{\rho}\frac{d\tilde{S}}{dt} = \nabla\cdot\left\{\lambda^{turb}\left(\nabla\tilde{T} - \frac{\nabla\bar{p}}{\bar{\rho}c_p}\right)\right\} + 2\bar{\rho}\nu_K^{turb}\left(\overset{0}{\mathbf{D}}:\overset{0}{\mathbf{D}}\right) + \frac{\nu_M^{turb}}{2\pi\mu_0}\left((\nabla\overline{\mathbf{B}})^a:(\nabla\overline{\mathbf{B}})^a\right) + \frac{|\bar{\mathbf{j}}|^2}{\sigma_e} + Q_{rad}. \qquad (22^*)$$

Поскольку, в силу (30), имеем $\frac{\nu_M^{turb}}{2\pi\mu_0}\left((\nabla\overline{\mathbf{B}})^a:(\nabla\overline{\mathbf{B}})^a\right) + \frac{|\bar{\mathbf{j}}|^2}{\sigma_e} = \frac{|\bar{\mathbf{j}}|^2}{\sigma_e^{turb}} + \frac{|\bar{\mathbf{j}}|^2}{\sigma_e} \cong \frac{|\bar{\mathbf{j}}|^2}{\sigma_e^{turb}}$, то уравнение (22*) может быть переписано в следующей окончательной форме

$$\tilde{T}\bar{\rho}\frac{d\tilde{S}}{dt} \cong \nabla\cdot\left(\frac{\lambda^{turb}\tilde{T}}{c_p}\nabla\tilde{S}\right) + 2\bar{\rho}\nu_K^{turb}\left(\overset{0}{\mathbf{D}}:\overset{0}{\mathbf{D}}\right) + \frac{|\bar{\mathbf{j}}|^2}{\sigma_e^{turb}} + Q_{rad}, \qquad (22^{**})$$

где величина $\tilde{T}\bar{\rho}d\tilde{S}/dt$ представляет собой количество тепла (отнесенное к единице объема среды), получаемого системой в единицу времени, первый член справа есть тепло, приносимое в рассматриваемый объем посредством турбулентной теплопроводности, второй член представляет собой энергию, диссипируемую в виде тепла благодаря турбулентной вязкости, третий член, соответствующий джоулевому нагреву, учитывает вклад среднего магнитного поля в производство энтропии системы и, наконец, последний член $Q_{rad} \equiv -\nabla\cdot\mathbf{q}_{rad}$ связан с процессом лучистого теплоотвода из системы.

Коэффициенты турбулентного переноса. Известно, что при изотропной турбулентности коэффициенты турбулентной кинематической вязкости ν_K^{turb} и турбулентной диффузии магнитного поля ν_M^{turb} близки к произведению $w_{turb}l_{cor}$ скорости турбулентных вихрей $w_{turb} \cong \sqrt{|\mathbf{u}''|^2}$ и их корреляционной длины l_{cor}, а коэффициент спиральности α по порядку величины $\alpha \cong -\tfrac{1}{3}h_{hel}\tau_{cor}$, где $h_{hel} \equiv \overline{\mathbf{u}''\cdot(\nabla\times\mathbf{u}'')}$ – плотность гидродинамической спиральности (псевдоскаляр), τ_{cor} – масштаб, характеризующий изменения поля турбулентных скоростей $\mathbf{u}''$ во времени[44]. В частности, если согласно стандартной гипотезе Шакуры и Сюняева[46] принять, что l_{cor} – эффективная полутолщина аккреционного диска, а w_{turb} выражается через термическую скорость звука c_s, то турбулентная диффузия приводит к характерному времени затухания магнитного поля (вернее, тех его компонентов, которые заметно меняются на масштабе толщины диска) порядка периода кеплеровского вращения. При этом магнитное число Рейнольдса $\mathbf{Re}_M \propto 1$ и важен турбулентный перенос.

С другой стороны, обобщая известную формулу Колмогорова для непроводящей жидкости на случай МГД - турбулентности, можно предположить, что кинетический коэффициент турбулентной вязкости ν_K^{turb} вычисляется по формуле

$$\nu_K^{turb} = L\sqrt{b_\Sigma}\ , \qquad (31)$$

где L – путь перемешивания по Прандтлю (числовой множитель может быть включен в значение L). Это предположение также часто вполне приемлемо для практических приложений. Вместе с тем, в соотношении (31) явно не учитывается возможное влияние магнитного поля на характер перемешивания, что для развитой МГД турбулентности не вполне корректно (например, для возмущений больших масштабов). По этой причине в формулу (31) необходимо, в общем случае, вводить поправку, учитывающую обратный эффект диффузии магнитного поля и переноса тепла на развитие турбулентности в электропроводящей дисковой среде.

Для нахождения такого поправочного множителя к величине L воспользуемся уравнением баланса энтропии турбулизации S_{turb}, которое в случае стационарно-неравновесного режима развитой турбулентности принимает вид

$$0 \cong \bar{\rho}\frac{dS_{turb}}{dt} + \nabla\cdot\mathbf{J}_{S_{turb}} = 2\bar{\rho}\nu_K^{turb}\left(\overset{0}{\mathbf{D}}:\overset{0}{\mathbf{D}}\right) + \frac{\nu_M^{turb}}{4\pi\mu}(\nabla\times\bar{\mathbf{B}})^2 + \frac{\lambda^{turb}}{c_p\tilde{T}}\mathbf{g}\cdot\left(\nabla\tilde{T} - \frac{\mathbf{g}}{c_p}\right) - \bar{\rho}\varepsilon_\Sigma. \qquad (32)$$

Здесь $\mathbf{g} = -\nabla\Psi_G = G\mathcal{M}_\odot\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$; $\Phi_v \equiv 2\bar{\rho}\nu_K^{turb}\left(\overset{0}{\mathbf{D}}:\overset{0}{\mathbf{D}}\right)$ – диссипативная функция; $\mathbf{P}$ – тензор вязких напряжений, связанный с процессами молекулярного переноса количества движения дискового вещества; $\varepsilon_\Sigma \equiv \langle\varepsilon_M\rangle + \langle\varepsilon_b\rangle = \left\{\overline{\rho(\mathbf{P}/\rho)'' : \nabla\mathbf{u}''} + (\nu_M/4\pi\mu_0)\overline{|\nabla\times\mathbf{B}'|^2}\right\}$ – полная удельная скорость диссипации турбулентной кинетической и турбулентной магнитной энергии в тепло (под действием молекулярной кинематической вязкости и вязкости магнитного поля).

Используя обозначение w_{turb} для характерной пульсационной скорости проводящей среды, и L для пути перемешивания по Прандтлю (в случае отсутствия магнитного поля), напишем

$$\nu_K^{turb} = Lw_{turb}, \quad \nu_M^{turb} = \frac{Lw_{turb}}{\mathbf{Pr}_M^{turb}}, \quad \frac{\lambda^{turb}}{\bar{\rho}\langle c_p\rangle} = \frac{Lw_{turb}}{\mathbf{Pr}_K^{turb}}, \quad \varepsilon_\Sigma = \frac{1}{\alpha_{ss}^2}\frac{w_{turb}^3}{L}. \qquad (33)$$

При этом эмпирическую константу α_{ss}, а также турбулентные числа Прандтля-Шмидта (кинетическое и магнитное)

$$\mathbf{Pr}_K^{turb} = \bar{\rho}c_p\nu_K^{turb}/\lambda^{turb}, \qquad \mathbf{Pr}_M^{turb} = \nu_K^{turb}/\nu_M^{turb} \qquad (34)$$

можно в первом приближении считать постоянными. Подставляя эти выражения в (32), получаем для стационарного режима:

$$w_{turb}\left\{2L\left(\overset{0}{\mathbf{D}}:\overset{0}{\mathbf{D}}\right)+\frac{L}{\mathbf{Pr}_M^{turb}}\frac{(\nabla\times\overline{\mathbf{B}})^2}{4\pi\mu\overline{\rho}}+\frac{L}{\mathbf{Pr}_K^{turb}}\frac{\mathbf{g}}{\tilde{\overline{T}}}\cdot\left(\nabla\tilde{T}-\frac{\mathbf{g}}{c_p}\right)-\frac{1}{\alpha_{ss}^2}\frac{w_{turb}^2}{L}\right\}\cong 0 \qquad (35)$$

Уравнение (35) распадается на два уравнения: уравнение $w_{turb}=0$, соответствующее ламинарному режиму течения, и уравнение

$$w_{turb}^2=\alpha_{ss}^2L^2\left\{2\left(\overset{0}{\mathbf{D}}:\overset{0}{\mathbf{D}}\right)+\frac{1}{\mathbf{Pr}_M^{turb}}\frac{(\nabla\times\overline{\mathbf{B}})^2}{4\pi\mu_0\overline{\rho}}+\frac{1}{\mathbf{Pr}_K^{turb}}\frac{\mathbf{g}}{\tilde{\overline{T}}}\cdot\left(\nabla\tilde{T}-\frac{\mathbf{g}}{c_p}\right)\right\}, \qquad (36)$$

описывающее установившийся турбулентный режим. Уравнение (36) имеет вещественное решение в том случае, когда $2\left(\overset{0}{\mathbf{D}}:\overset{0}{\mathbf{D}}\right)+\frac{1}{\mathbf{Pr}_K^{turb}}\left\{\frac{(\nabla\times\overline{\mathbf{B}})^2}{4\pi\mu_0\overline{\rho}}+\frac{\mathbf{g}}{\tilde{\overline{T}}}\cdot\left(\nabla\tilde{T}-\frac{\mathbf{g}}{c_p}\right)\right\}\geq 0$, откуда получаем

$$\mathbf{Ri}_\Sigma\equiv\mathbf{Ri}_K-\mathbf{Ri}_M\leq\left(\mathbf{Ri}_\Sigma\right)_{cr}=\mathbf{Pr}_K^{turb}, \qquad (36)$$

где введены обозначения

$$\mathbf{Ri}_K\equiv-\frac{\mathbf{g}\cdot\left(\nabla\tilde{T}-\mathbf{g}/c_p\right)/\tilde{\overline{T}}}{2\left(\overset{0}{\mathbf{D}}:\overset{0}{\mathbf{D}}\right)},\qquad \mathbf{Ri}_M\equiv\frac{1}{4\pi\mu_0\overline{\rho}}\frac{(\nabla\times\overline{\mathbf{B}})^2}{2\left(\overset{0}{\mathbf{D}}:\overset{0}{\mathbf{D}}\right)}. \qquad (37)$$

Здесь $\mathbf{Ri}_K$ и $\mathbf{Ri}_M$ – соответственно градиентное гидродинамическое число Ричардсона – безразмерная величина, определяющая относительный вклад термической конвекции вещества в порождение турбулентной энергии (по сравнению с передачей энергии от осредненного движения) и градиентное магнитогидродинамическое число Ричардсона (пропорциональное отношению магнитной энергии к кинетической энергии плазмы), учитывающее влияние магнитного поля на возникновение турбулентности в потоке.

Если $\mathbf{Ri}_\Sigma=\mathbf{Pr}_K^{turb}$, то имеется единственное вещественное решение $w_{turb}=0$, соответствующее ламинарному режиму. Пусть имеет место турбулентный режим и, следовательно $\mathbf{Ri}_\Sigma<\left(\mathbf{Ri}_\Sigma\right)_{cr}$, тогда для турбулентного коэффициента вязкости электропроводной жидкости получим

$$\nu_K^{turb}=\alpha_{ss}L^{*2}\sqrt{2\left(\overset{0}{\mathbf{D}}:\overset{0}{\mathbf{D}}\right)},\qquad L^*\equiv L(1-\mathbf{Ri}_\Sigma/\mathbf{Pr}_K^{turb})^{0.25}, \qquad (38)$$

где $L^*=L\varphi$; безразмерная функция $\varphi\equiv(1-\mathbf{Ri}_\Sigma/\mathbf{Pr}_K^{turb})^{0.25}$ учитывает влияние магнитного поля и обратный эффект переноса тепла на развитие турбулентности через посредство пути смешения. Одновременно получилась приближенная оценка для критического числа Ричардсона $\left(\mathbf{Ri}_\Sigma\right)_{cr}=\mathbf{Pr}_K^{turb}=\overline{\rho}c_p\nu_K^{turb}/\lambda^{turb}$.

Для вычисления пути перемешивания по Прандтлю (в случае отсутствия магнитного поля) можно воспользоваться известной формулой Прандтля- Никурадзе, которая применительно к моделированию дисковой структуры может быть записана в виде

$$L / h_{eff} = 0{,}14 - 0{,}08(1 - z/h_{eff})^2 - 0.06(1 - z/h_{eff})^4 . \qquad (39)$$

Приведенная в этом разделе замкнутая система осредненных МГД уравнений является основной при моделировании структуры и эволюции турбулизованного протопланетного диска; при моделировании тонких аккреционных дисков она может быть существенно упрощена[47].

3. МГД УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНОГО АККРЕЦИОННОГО ДИСКА.

Рассмотрим теперь медленно эволюционирующий аккреционный турбулентный диск, который в момент времени t вращается с угловой скоростью $\Omega(\varpi, z)$ вокруг оси z. Будем полагать, что диск является электропроводящим и имеется начальное крупномасштабное и медленно меняющееся осесимметричное магнитное поле $\mathbf{B}_{\odot}$ прото-звезды, дипольный момент которого совпадает с осью вращения диска. Далее мы будем использовать цилиндрическую систему координат (ϖ, φ, z) и предполагать, что центральная плоскость аккреционного диска совпадает с экваториальной плоскостью звезды, определяемой условием $z = 0$. Ограничимся здесь моделью тонкого осесимметричного ($\partial(...)/\partial\varphi = 0$) аккреционного диска, когда пространственный масштаб изменения структурных параметров в слое перпендикулярном к экваториальной плоскости велик по сравнению с полутолщиной диска, т.е. величина $h(\varpi)$ мала по сравнению с ϖ для всех ϖ, $\partial h/\partial\varpi \approx h / \varpi << 1$. Можно показать[56], что толщина аккреционного диска зависит от баланса нагрева и охлаждения. Эффективное охлаждение приводит к геометрически тонкому диску. Для такого диска характер течения проводящего дискового вещества может быть проанализирован с использованием двухмерных МГД уравнений.

Коэффициент турбулентной вязкости. Проанализируем вначале выражение (38) для коэффициента вязкости в тонком аккреционном диске, движение вещества в котором можно представить как суперпозицию общего дифференциального вращения и случайного турбулентного движения. Для простоты будем предполагать, что вращение диска настолько медленное, что меридиональной циркуляцией можно пренебречь[48], т.е. осредненное движение космического вещества реализуется лишь в азимутальном направлении, а истинная скорость течения беспорядочно пульсирует около этого среднего значения, крайне нерегулярно изменяясь в меридиональном и азимутальном направлениях; тогда $\tilde{u}_{\varpi} = 0$, $\tilde{u}_{\varphi} = \varpi\,\Omega(\varpi, z)$, $\tilde{u}_z = 0$.

В принятых предположениях $\varpi\varphi$- компонента кинетического тензора Рейнольдса (24) и диссипативная функция Φ_v принимают вид

$$R^{K}_{\varpi\varphi} = \bar{\rho}\nu^{turb}_{K}\varpi\frac{\partial\Omega(\varpi,z)}{\partial\varpi}, \quad \Phi_v \equiv \nu^{turb}_{K}2\left(\overset{0}{\mathbf{D}}:\overset{0}{\mathbf{D}}\right) = \nu^{turb}_{K}\varpi^2\left\{\left(\frac{\partial\Omega(\varpi,z)}{\partial\varpi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega(\varpi,z)}{\partial z}\right)^2\right\}. \qquad (40)$$

Тогда для большей части диска (за исключением областей, близких к звезде) справедливо следующее приближенное выражение для коэффициента турбулентной вязкости

$$\nu^{turb}_{K} = \alpha_{ss}L^{*2}\varpi\left|\frac{\partial\Omega(\varpi,z)}{\partial\varpi}\right|, \qquad L^{*}(z) \equiv L(z)\left\{1 - (\mathbf{Ri}_K - \mathbf{Ri}_M)/\mathbf{Pr}^{turb}_{K}\right\}^{0.25}, \qquad (41)$$

где

$$\mathbf{Ri}_K \cong \frac{\Omega^2_{K,mid}\, z}{\varpi^2} \frac{1}{\langle T\rangle} \frac{\partial\langle T\rangle/\partial z + G_a}{\left(\partial\Omega/\partial z\right)^2}, \qquad \mathbf{Ri}_M \cong \frac{1}{4\pi\mu_0\overline{\rho}} \frac{(\partial\overline{B}_\varphi/\partial z)^2}{\varpi^2\left(\partial\Omega/\partial z\right)^2}, \tag{42}$$

$$G_a \equiv \frac{g_z}{c_P} = -\frac{1}{c_P}\frac{G\mathcal{M}_\odot z}{\varpi^3}\left(1+\frac{z^2}{\varpi^2}\right)^{-3/2} \cong \frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{1}{\Re}\Omega^2_{K,mid}\, z \tag{43}$$

– адиабатический градиент температуры в протопланетном аккреционном диске. В выражениях (42) и (43) использована эффективная сила тяжести $\mathbf{g} = \{0, 0, -g_z\}$, где

$$g_z = \frac{G\mathcal{M}_\odot z}{\varpi^3}\left(1+\frac{z^2}{\varpi^2}\right)^{-3/2} \cong \Omega^2_{K,mid}(\varpi)\, z\,; \qquad \Omega_K(\varpi, z) \equiv \sqrt{\frac{G\mathcal{M}_\odot}{(\varpi^2+z^2)^{3/2}}} \tag{44}$$

– кеплеровская угловая скорость; $\Omega_{K,mid}(\varpi) \equiv \Omega_K(\varpi, 0) = \sqrt{G\mathcal{M}_\odot/\varpi^3}$ – кеплеровская угловая скорость вращения в центральной плоскости диска.

Из формулы (42) видно, что в случае адиабатического распределения температуры с высотой (безразличная стратификация), когда $-\partial\langle T\rangle/\partial z = \left(-\partial\langle T\rangle/\partial z\right)_{ad} = z\Omega^2_{K,mid}(\varpi)/c_P$, число Ричардсона $\mathbf{Ri}_K = 0$, т.е. температурный градиент в диске не оказывает влияния на коэффициенты турбулентного переноса. Однако, в случае неустойчивой термической стратификации аккреционного диска, когда имеют место сверхадиабатические градиенты температуры, энергия турбулентности возрастает за счет энергии неустойчивости в направлении перпендикулярном к экваториальной плоскости диска (конвективный источник турбулентности); при этом одновременно увеличивается коэффициент турбулентной вязкости. В то же время, пространственная неоднородность (по высоте) осредненного магнитного поля приводит к увеличению турбулентной энергии, поскольку магнитное число Ричардсона $\mathbf{Ri}_M > 0$. Обратное турбулентное число Прандтля -Шмидта $1/\mathbf{Pr}^{turb}_K$ в формуле (41) можно принять равным единице, когда основным механизмом турбулентности являются сдвиговые напряжения при дифференциальном вращении диска; однако оно может быть в 2-3 раза больше, когда причиной турбулентности, является тепловая конвекция в вертикальном направлении.

Для того чтобы получить формальное совпадение выражения (41) с широко используемой в астрофизической литературе формулой Шакуры- Сюняева[49], предназначенной для моделирования лежащего в центральной плоскости кеплеровского диска тонкого слоя, нужно положить в выражении (41) параметры $\mathbf{Ri} = 0$ и $\mathbf{Ri}_M = 0$ и подставить в него угловую скорость кеплеровского вращения $\Omega_{K,mid}(\varpi)$. Если использовать теперь в качестве масштаба турбулентности эффективную полутолщину диска $h_{eff} \cong c_s\big|_{z=0}/\Omega_{K,mid}$ (которую можно оценить, используя баланс сил в z-направлении (см. ниже), то в результате получим

$$\nu^{turb}_K = \tfrac{3}{2}\alpha_{ss} h^2_{eff}\Omega_{K,mid} = \tfrac{3}{2}\alpha_{ss} h_{eff} c_s\big|_{z=0} = \tfrac{3}{2}\alpha_{ss}\gamma\left(\overline{p}/\overline{\rho}\right)\big|_{z=0}/\Omega_{K,mid}\,. \tag{45}$$

Тогда между ϖ, φ-компонентной тензора турбулентных напряжений Рейнольдса $R_{r\varphi}$ и давлением $\overline{p}$ газа имеет место следующая «классическая» зависимость

$$R_{\varpi\varphi} = \bar{\rho}\nu_K^{turb}\varpi(\partial\Omega_{K,mid}(\varpi)/\partial r) = -\alpha_s \bar{p}\big|_{z=0}\,. \qquad (46)$$

Здесь $c_s\big|_{z=0} \cong \sqrt{\gamma\bar{p}/\bar{\rho}}\big|_{z=0}$ – термическая скорость звука; $\alpha_s = {}^{9}\!/\!{}_{4}\alpha_{ss}$ – не поддающийся сколько-нибудь точному определению свободный параметр, удовлетворяющий ограничению $\alpha_s \le 1$.

Астрофизические модели, построенные с применением соотношения (46), относятся к так называемым вязким α-дискам. В моделях подобного рода параметра Шакуры-Сюняева α_s остается обычно свободным параметром в уравнениях строения диска. Значение α_s может быть прокалибровано эмпирически, в частности, при помощи зависящих от времени спектров, получаемых при наблюдении вспышек в двойных звездных системах с переносом массы, содержащих карликовые новые. Для этого случая были найдены[50-51] значения α_{ss} в интервале $0.1 \le \alpha_s \le 1$. Эти значения частично совпадают с оценками $0.01 \le \alpha_s \le 1$ из работ[15,4252-54], где рассматривалась вязкость, возникающая вследствие сдвига скорости и перезамыкание силовых линий хаотического магнитного поля. В аналитических работах[18,19] была получена связь между вязкостью в диске и процессом перезамыкания магнитных полей внутри диска. Известно, что скорость перезамыкания может быть охарактеризована величиной $M_A = u/c_A$, где u – скорость вещества перед разрывом, а $c_A = |\mathbf{B}|/\sqrt{4\pi\mu\rho}$ – альфвеновская скорость перед разрывом[55] . Обе эти модели используют сдвиговое течение внутри диска для усиления магнитного поля и используют МГД турбулентность как механизм радиального переноса вещества. Вязкий параметр Шакуры-Сюняева, полученный в работе[18] Коронити, выражается через параметр перезамыкания следующим образом: $\alpha_{ss} \approx M_A^{2/3}$. Модель[19] Тоута и Прингла дает следующее выражение для параметра Шакуры-Сюняева: $\alpha_{ss} \approx 0.6 M_A$. Для того чтобы вызвать аккрецию, согласующуюся с наблюдениями различных астрофизических явлений число Маха M_A должно быть порядка 0.1, что предполагает очень большие скорости перезамыкания в режиме турбулентного МГД, чему нет, вообще говоря, никаких оснований. Чтобы получить реальную картину связи между аккрецией и перезамыканием необходимо, по-видимому, численное моделирование, которое рассматривает турбулентное динамо и процесс перезамыкания самосогласованно.

Отметим еще раз, что в подходе Шакуры и Сюняева, разработанном специально для тонких аккреционных дисков, не принималось во внимание обратное влияние конвективного переноса тепла, а также градиента крупномасштабного магнитного поля на развитие дисковой турбулентности. В связи с адекватным моделированием структуры и эволюции солнечного протопланетного диска и его короны представляется целесообразным отойти от α-формализма и получить обобщение формулы (46) на случай расслоенного по плотности вещества в диске конечной толщины.

Уравнение неразрывности. Запишем теперь осредненные МГД- уравнения для турбулизованной среды в цилиндрической системе координат. Уравнение сохранения массы для осредненного движения (2) принимает вид

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t} + \frac{1}{\varpi}\frac{\partial}{\partial\varpi}(\varpi\bar{\rho}\,\tilde{u}_\varpi) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{\rho}\tilde{u}_z) = 0\,. \qquad (47)$$

Из этого уравнения следует, что

$$\left|\tilde{u}_z / \tilde{u}_\varpi\right| \le h / \varpi << 1. \qquad (48)$$

Далее для компонент скорости в дифференциально вращающемся диске будем употреблять новые обозначения: радиальную скорость которая по предположению не зависит от z-координаты, будем обозначать $\tilde{u}_\varpi(\varpi, z) \cong \tilde{u}_\varpi(\varpi, z=0) \equiv V_\varpi(\varpi) > 0$; орбитальную скорость определим соотношением $\tilde{u}_\varphi(\varpi, z) \equiv V_\varphi(\varpi, z) = \varpi\Omega(\varpi, z)$, где $\Omega(\varpi, z)$ – угловая скорость вращения дискового вещества, а осредненную вертикальную скорость обозначим так $\tilde{u}_z(\varpi, z) \equiv V_z(\varpi, z)$.

Уравнение движения. При использовании справедливых для тонких дисков оценочных неравенств[56]

$$V_\varphi >> V_\varpi >> V_z, \quad c_s / V_\varphi \propto h / \varpi << 1, \quad \nu_K^{turb} \propto \varepsilon c_s h \quad (\varepsilon << 1) \qquad (49)$$

(здесь $c_s \equiv \sqrt{\gamma\, \overline{p}/\overline{\rho}}$ – изотермическая скорость звука), а также выражений

$$\overline{\mathbf{j}} = \frac{c}{4\pi\mu_0} \nabla \times \overline{\mathbf{B}} = \frac{c}{4\pi\mu_0}\left\{\mathbf{e}_\varpi\left(-\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\right) + \mathbf{e}_\varphi\left(\frac{\partial B_\varpi}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial \varpi}\right) + \mathbf{e}_z \frac{1}{\varpi}\frac{\partial(\varpi B_\varphi)}{\partial \varpi}\right\}, \qquad (50)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\overline{\mathbf{j}} \times \overline{\mathbf{B}} = \frac{1}{4\pi\mu_0}\Bigg\{ & \mathbf{e}_\varpi\left(-\frac{1}{2\varpi^2}\frac{\partial(\varpi^2 \overline{B}_\varphi^2)}{\partial r} + \frac{4\pi\mu_0}{c}\overline{B}_z \overline{j}_\varphi\right) + \\ & + \mathbf{e}_\varphi\left(\frac{\overline{B}_\varpi}{\varpi}\frac{\partial(\varpi \overline{B}_\varphi)}{\partial \varpi} + \overline{B}_z \frac{\partial \overline{B}_\varphi}{\partial z}\right) + \mathbf{e}_z\left(-\frac{\partial(\overline{B}_\varphi^2/2)}{\partial z} - \frac{4\pi\mu_0}{c}\overline{B}_\varpi \overline{j}_\varphi\right)\Bigg\}, \end{aligned} \qquad (51)$$

радиальную, азимутальную и вертикальную компоненты уравнения движения (3) можно записать в следующем виде:

$$\overline{\rho}\left(\frac{dV_\varpi}{dt} - \varpi\Omega^2\right) = -\overline{\rho}\frac{G\mathcal{M}_\odot}{\varpi^2} - \frac{\partial}{\partial r}\left(\overline{p} + p_{turb} + \tfrac{1}{3}p_{turb}^M\right) - \frac{1}{\varpi^2}\frac{\partial}{\partial \varpi}\left(\frac{\varpi^2 \overline{B}_\varphi^2}{8\pi\mu_0}\right) + \frac{1}{c}\overline{B}_z \overline{j}_\varphi, \qquad (52)$$

$$\overline{\rho}\left(\frac{d(\varpi\Omega)}{dt} + V_\varpi\Omega\right) = \frac{1}{\varpi^2}\frac{\partial}{\partial \varpi}\left(\overline{\rho}\nu_K^{turb}\varpi^3\frac{\partial\Omega}{\partial\varpi} + \varpi^2\frac{\overline{B}_\varphi \overline{B}_\varpi}{4\pi\mu_0}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\overline{B}_\varphi \overline{B}_z}{4\pi\mu_0}\right), \qquad (53)$$

$$\overline{\rho}\frac{dV_z}{dt} = -\overline{\rho}\frac{G\mathcal{M}_\odot z}{\varpi^3} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{p} + p_{turb} + \tfrac{1}{3}p_{turb}^M + \frac{\overline{B}_\varphi^2}{8\pi\mu_0}\right) - \frac{1}{c}\overline{B}_\varpi \overline{j}_\varphi, \qquad (54)$$

где

$$\overline{\rho}\frac{d\mathcal{A}}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho}\mathcal{A}) + \frac{1}{\varpi}\frac{\partial}{\partial\varpi}(\varpi\overline{\rho}\mathcal{A}V_\varpi) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{\rho}\mathcal{A}V_z). \qquad (55)$$

– субстанциональная производная параметра $\mathcal{A}$ в цилиндрической системе координат. Оператор (55) позволяет переписать уравнения (52)-(54) также и в дивергентном виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} V_\varpi)+\frac{\partial}{\partial \varpi}\left(\varpi\bar{\rho} V_\varpi^2+P+\frac{\overline{B}_z{}^2}{8\pi\mu_0}\right)-\frac{1}{\varpi^2}\frac{\partial}{\partial \varpi}\left\{\varpi^2\frac{\left(\overline{B}_\varpi{}^2-\overline{B}_\varphi^2\right)}{8\pi\mu_0}\right\}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{\rho} V_\varpi V_z-\frac{\overline{B}_\varpi\overline{B}_z}{4\pi\mu_0}\right)-\bar{\rho}\varpi\Omega^2+\bar{\rho}\frac{G\mathcal{M}_\odot}{\varpi^2}=0, \qquad (52^*)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} J)+\frac{1}{\varpi}\frac{\partial}{\partial \varpi}\left(\varpi\bar{\rho} J V_\varpi-\varpi^3\bar{\rho}\nu_K^{turb}\frac{\partial\Omega}{\partial\varpi}-\varpi^2\frac{\overline{B}_\varphi\overline{B}_r}{4\pi\mu_0}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{\rho} J V_z-\varpi\frac{\overline{B}_\varphi\overline{B}_z}{4\pi\mu_0}\right)=0, \qquad (53^*)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} V_z)+\frac{1}{\varpi}\frac{\partial}{\partial \varpi}\left\{\varpi\left(\bar{\rho} V_z V_\varpi-\frac{\overline{B}_z\overline{B}_\varpi}{4\pi\mu_0}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{\rho} V_z^2+P+\frac{\overline{B}_\varpi^2+\overline{B}_\varphi^2-\overline{B}_z^2}{8\pi\mu_0}\right)+\bar{\rho}\frac{G\mathcal{M}_\odot z}{\varpi^3}=0. \qquad (54^*)$$

Здесь $P\equiv\left(\bar{p}+p_{turb}+\frac{1}{3}p_{turb}^M\right)$ – полное давление в турбулизованной электропроводящей среде; $\bar{p}=\Re\bar{\rho}\widetilde{T}$ – давление турбулизованного газа; $p_{turb}(\varpi,z)=\frac{2}{3}\bar{\rho}\,\widetilde{b}$ – так называемое давление турбулизации[8]; $p_{turb}^M(\varpi,z)=\bar{\rho}\,\widetilde{b}_M$ – турбулентное магнитное давление; $J(\varpi,z)\equiv\varpi^2\Omega(\varpi,z)$ – удельный угловой момент импульса дискового вещества, находящегося на расстоянии ϖ от центра вращения. Заметим, что азимутальная компонента уравнения движения (53^*) описывает эволюцию момента количества движения J за счет вязкого трения и влияния магнитного поля.

Энергетическое уравнение. Уравнение переноса тепла (22**) для тонкого аккреционного диска, при учете (40), принимает вид

$$\widetilde{T}\bar{\rho}\frac{d\widetilde{S}}{dt}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\lambda^{turb}}{c_p}\frac{\partial\widetilde{S}}{\partial z}\right)+\bar{\rho}\nu_K^{turb}\varpi^2\left(\frac{\partial\Omega(\varpi,z)}{\partial\varpi}\right)^2+\frac{\nu_M^{turb}}{4\pi\mu_0}\left\{\left(\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial B_\varpi}{\partial z}\right)^2\right\}+Q_{rad}. \qquad (56)$$

Это уравнение предназначено, в частности, для определения вертикального распределения температуры в тонком диске с учетом конвекции, лучистой теплопроводности, вязкой и магнитной диссипации.

Уравнение (18^*) для полной энергии дисковой системы удобно использовать в стационарных моделях тонкого диска; в цилиндрической системе координат оно принимает вид

$$\bar{\rho}\frac{d}{dt}(\widetilde{U}_{tot})+\frac{1}{\varpi}\frac{\partial}{\partial\varpi}\left(\varpi\mathbf{J}^{sub}_{U_{tot},\varpi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathbf{J}^{sub}_{U_{tot},z}\right)=Q_{rad}, \qquad (57)$$

где

$$\mathbf{J}^{sub}_{U_{tot}}=\mathbf{J}_{U_{tot}}-\bar{\rho}\,\widetilde{U}_{tot}\widetilde{\mathbf{u}}\cong\mathbf{q}^{turb}+P\widetilde{\mathbf{u}}-2\bar{\rho}\nu_K^{turb}\left(\overset{0}{\mathbf{D}}:\overset{0}{\mathbf{D}}\right)+\frac{\overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{B}}}{4\pi\mu_0}\cdot\widetilde{\mathbf{u}} \qquad (58)$$

– субстанциональный поток полной энергии $\widetilde{U}_{tot}$ через единичную площадку за единицу времени, составляющие которого в радиальном и вертикальном направлении определяются соотношениями

$$\mathbf{J}^{sub}_{U_{tot},\varpi}=-\lambda^{turb}\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\varpi}-\bar{\rho}\varpi^2\nu_K^{turb}\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial\varpi}-\varpi\Omega\frac{\overline{B}_\varpi\overline{B}_\varphi}{4\pi\mu_0},$$

$$\mathbf{J}^{\mathrm{sub}}_{\mathrm{U_{tot}},z} = -\lambda^{\mathrm{turb}}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial z} - \frac{4\sigma_B}{3\kappa\bar{\rho}}\frac{\partial\tilde{T}^4}{\partial z} - \bar{\rho}\,\varpi^2\nu_K^{\mathrm{turb}}\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial z} - \frac{\bar{B}_z\bar{B}_\varphi}{4\pi\mu_0}\varpi\Omega$$

Уравнение магнитной индукции. Поскольку влияние гидродинамической спиральности на генерацию среднего магнитного поля неизбежно сопровождает эффективную магнитную диффузию, то в общем случае для описания структуры и механизма генерации крупномасштабного магнитного поля $\bar{\mathbf{B}}$ в диске необходимо привлекать к рассмотрению уравнение индукции (28^*). При этом действие альфа-эффекта и дифференциального вращения в осесимметричном диске удобно проанализировать с помощью разложения магнитного поля $\bar{\mathbf{B}}$ на тороидальную $\bar{B}_\varphi\mathbf{e}_\varphi$ и полоидальную $\bar{\mathbf{B}}_p$ составляющие[44]. Тогда уравнение (28^*) заменяется двумя скалярными уравнениями. Действительно, разложив осредненную скорость течения $\tilde{\mathbf{u}} \equiv \mathbf{V} = V_\varpi\mathbf{e}_\varpi + V_z\mathbf{e}_z + V_\varphi\mathbf{e}_\varphi$ дискового вещества и среднее магнитное поле на полоидальную и тороидальную компоненты: $\mathbf{V} = \mathbf{V}_p + \varpi\Omega(\varpi,z)\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{V}_p = V_\varpi\mathbf{e}_\varpi + V_z\mathbf{e}_z$, $\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{B}}_p + \bar{B}_\varphi\mathbf{e}_\varphi$, и полагая $\bar{\mathbf{B}}_p(\varpi,z) \equiv \bar{B}_\varpi\mathbf{e}_\varpi + \bar{B}_z\mathbf{e}_z = \nabla\times\mathbf{A} = -\dfrac{\partial A}{\partial z}\mathbf{e}_\varpi + \dfrac{1}{\varpi}\dfrac{\partial(\varpi A)}{\partial\varpi}\mathbf{e}_z$, где $\mathbf{A} = A_\varphi(\varpi,z)\mathbf{e}_\varphi \equiv A(\varpi,z)\mathbf{e}_\varphi$ – магнитный векторный потенциал, получим

$$\frac{\partial\bar{B}_\varphi}{\partial t} + \varpi\nabla\cdot\left(\frac{\bar{B}_\varphi\mathbf{V}_p}{\varpi}\right) = \varpi\left(\bar{\mathbf{B}}_p\cdot\nabla\right)\Omega + \nu_M^{\mathrm{turb}}\left(\nabla^2\bar{B}_\varphi - \frac{\bar{B}_\varphi}{\varpi^2}\right) - \alpha\left(\nabla^2 A - \frac{A}{\varpi^2}\right), \quad (59)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{\varpi}\left(\mathbf{V}_p\cdot\nabla\right)(\varpi A) = \nu_M^{\mathrm{turb}}\left(\nabla^2 A - \frac{A}{\varpi^2}\right) + \alpha\,\bar{B}_\varphi. \quad (60)$$

Этим уравнениям легко придать более наглядный вид:

$$\frac{\partial\bar{B}_\varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\varpi}(\bar{B}_\varphi V_\varpi) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{B}_\varphi V_z) = \varpi\left(B_\varpi\frac{\partial\Omega}{\partial\varpi} + B_z\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right) + \nu_M^{\mathrm{turb}}\frac{\partial^2\bar{B}_\varphi}{\partial z^2} + \alpha\frac{4\pi\mu_0}{c}\bar{j}_\varphi, \quad (59^*)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + V_\varpi\bar{B}_z - V_z\bar{B}_\varpi = -\frac{4\pi\mu_0}{c}\nu_M^{\mathrm{turb}}\bar{j}_\varphi + \alpha\,\bar{B}_\varphi. \quad (60^*)$$

При моделировании структуры магнитного поля в тонком аккреционном диске эти уравнения необходимо решать в некоторой конечной области, ограниченной плоскостями $z = \pm h$, при этом α-эффект сконцентрирован в окрестности плоскостей $z = \pm\xi h(\varpi)$ $(\xi < 1)$. В астрофизических приложениях обычно[26], ограничиваются рассмотрением случая, когда коэффициент спиральности $\alpha(z)$ является заданной нечетной функцией z, $\alpha(z) = -\alpha(-z)$. Далее мы будем задавать $\alpha(z)$ ступенчатой функцией

$$\alpha(z) = \begin{cases} \alpha_0, & 0 < z < h; \\ 0, & z = 0; \\ -\alpha_0, & -h < z < 0. \end{cases} \quad (61)$$

Относительно уравнений (59) и (60) заметим следующее. Поскольку $\nabla^2 A - A/\varpi^2 = -4\pi\mu_0 c^{-1}\bar{j}_\varphi = -(\nabla\times\bar{\mathbf{B}}_p)\cdot\mathbf{e}_\varphi$, то в правой части уравнения (59) имеются два члена, содержащие $\overline{\mathbf{B}}_p$ и в зависимости от того, какой из них преобладает, получаются два типа турбулентного динамо, генерирующего дополнительную электродвижущую силу в законе Ома для средних полей. Если относительную величину α-эффекта охарактеризовывать безразмерным числом $R_\alpha = \alpha_0 l / \nu_M^{turb}$, а относительную роль дифференциального вращения – безразмерным числом $R_\omega = |\nabla\Omega|_0 l^3 / \nu_M^{turb}$ (здесь нижний индекс «0» обозначает характерные значения соответствующих параметров, а величина l означает масштаб, характеризующий пространственные изменения турбулизованного поля), то по порядку величины отношение этих двух членов равно

$$\left|\varpi\left(\overline{\mathbf{B}}_p \cdot \nabla\right)\Omega\right| / \left|\alpha\nabla \times \overline{\mathbf{B}}_p\right| \propto R_\omega / R_\alpha = l^2 |\nabla\Omega|_0 / \alpha_0 . \qquad (62)$$

Таким образом, различные режимы генерации магнитного поля определяются соотношением этих безразмерных чисел. Если $R_\alpha >> R_\omega$, то в (59) можно пренебречь членом с дифференциальным вращением. В этом случае α-эффект действует в качестве источника как полоидального поля $\overline{\mathbf{B}}_p$, так и, благодаря члену $\alpha \overline{B}_\varphi$ в уравнении (60), источником тороидального поля $\overline{B}_\varphi$. Подобного рода динамо, отличительной особенностью которого является двукратное действие α-эффекта, обычно называют «α^2-динамо». В этом случае магнитные петли растягиваются и складываются в восьмерку спиральными турбулентными потоками. С другой стороны, если $R_\alpha << R_\omega$, то более эффективно растягивать магнитные петли дифференциальным вращением, а складывать их за счет α-эффекта («$\alpha\omega$-динамо»). В уравнении (59) доминирует тогда член с дифференциальным вращением, и в результате мы имеем

$$\frac{\partial \overline{B}_\varphi}{\partial t} + \varpi\nabla \cdot \left(\frac{\overline{B}_\varphi \mathbf{V}_p}{\varpi}\right) = \varpi\left(\overline{\mathbf{B}}_p \cdot \nabla\right)\Omega + \nu_M^{turb}\left(\nabla^2 \overline{B}_\varphi - \frac{\overline{B}_\varphi}{\varpi^2}\right), \qquad (59^{**})$$

В этом случае тороидальное поле генерируется дифференциальным вращением, а полоидальное поле определяется α-эффектом. В дифференциально вращающихся аккреционных дисках действует, как правило, $\alpha\omega$-динамо[25]. Для $\alpha\omega$-динамо простое перемасштабирование переменных позволяет связать два безразмерных числа R_α и R_ω в одно безразмерное динамо-число $D = R_\alpha R_\omega$, с помощью которого возможна приблизительная оценка вероятности самовозбуждения крупномасштабного магнитного поля в данном течении; при этом вероятность самовозбуждения сводится к требованию, чтобы динамо-число D превышало некоторое критическое значение D_{cr}, которое можно вычислить, находя нетривиальные стационарные решения уравнения динамо. При малых динамо-числах магнитное поле затухает, а по достижению критического значения $D = D_{cr}$ наступает самовозбуждение.

Сделаем теперь некоторые оценки. Из максвелловского уравнения $\nabla \cdot \overline{\mathbf{B}} = 0$ следует, что $|\overline{B}_\varpi| / |\overline{B}_z| \propto \varpi / h >> 1$, откуда $|\overline{B}_\varpi| >> |\overline{B}_z|$. Из ($59^*$) вытекает, что $|\overline{\mathbf{B}}_p| \propto (\alpha_0 l / \nu_M^{turb}) |\overline{B}_\varphi|$, в то время как из (60) следует, что $|\overline{B}_\varphi| \propto \left(|\nabla\Omega|_0 l^3 / \nu_M^{turb}\right) |\overline{\mathbf{B}}_p|$; следовательно, для $\alpha\omega$-

динамо справедлива оценка $\left|\overline{B}_\varphi\right|/\left|\overline{\mathbf{B}}_p\right| \propto \sqrt{\left|\nabla\Omega\right|_0 l^2/\alpha_0} >> 1$, откуда $\left|\overline{B}_\varphi\right| >> \left|\overline{\mathbf{B}}_p\right| \propto \left|\overline{B}_\varpi\right| >> \left|\overline{B}_z\right|$. Можно показать[57], что для реалистических коэффициентов магнитной диффузии в диске магнитные силы в уравнении (53) не могут значительно превышать вязкие силы. Это условие совместно с оценкой (48) приводит к тому, что для тонких дисков в уравнении (59) адвективные члены и радиальные производные становятся малыми, и уравнения (59^{**}) и (60^{*}) для тороидальной и полоидальной компонент магнитного поля в медленно вращающихся аккреционных дисках принимают вид

$$\varpi\overline{B}_z \frac{\partial\Omega}{\partial z} + \nu_M^{turb} \frac{\partial^2 \overline{B}_\varphi}{\partial z^2} = 0\,, \tag{63}$$

$$-\alpha\overline{B}_\varphi + \frac{4\pi\mu_0}{c}\nu_M^{turb}\overline{j}_\varphi = 0\,, \quad \text{где} \quad \frac{4\pi\mu_0}{c}\overline{j}_\varphi = \frac{\partial \overline{B}_\varpi}{\partial z}\,. \tag{64}$$

В заключение этого раздела отметим, что по сравнительно давней[57] оценке Пудрица, а с тех пор, по нашему мнению, теория астрофизического динамо не получила существенного развития, критическое значение динамо-числа D_{cr} меньше 10, в то время как реальное значение D приближается к $(6/5\pi)M_A^{-2}$, где M_A – число Маха турбулентных движений. Поэтому $\alpha\,\omega$-динамо действует лишь в том случае, когда турбулентность в диске «достаточно дозвуковая». Поскольку достоверно не известно, насколько турбулентная скорость меньше скорости звука в реальных условиях эволюции протопланетного диска, количественные результаты, полученные с учетом «$\alpha\,\omega$-динамо», могут носить лишь приблизительный характер.

4. МОДЕЛЬ ТОНКОГО ПРОТОПЛАНЕТНОГО ДИСКА

Рассмотрим теперь модель тонкого (но оптически толстого) протопланетного диска, когда пространственный масштаб изменения структурных параметров в слое перпендикулярном к экваториальной плоскости велик по сравнению с полутолщиной диска, т.е. величина $h(\varpi)$ мала по сравнению с ϖ для всех ϖ, $\partial h/\partial\varpi \approx h/\varpi << 1$. В этом случае характер течения проводящего дискового вещества (особенно в его верхнем МГД – активном слое) может быть проанализирован с использованием одномерных уравнений магнитной гидродинамики. Возможность понижения размерности задачи связана с дополнительными предположениями о симметрии определяющих параметров задачи и о медлительном характере течения в плоскости слоя по сравнению со временем установления равновесия в вертикальном z-направлении. Ниже мы будем предполагать, что плотность и давление, имея максимальное значение на центральной плоскости $z = 0$, убывают с высотой так, что на верхней и нижней поверхностях диска $\rho(\varpi, \pm h) = p(\varpi, \pm h) = 0$; при $z = 0$ вертикальная скорость дискового вещества $V_z(\varpi, z = 0) = 0$. Кроме этого, будем считать, что плотность, давление и компоненты скорости имеют следующую отражательную симметрию относительно экваториальной плоскости диска

$$\rho(\varpi, z) = \rho(\varpi, -z), \quad P(\varpi, z) = P(\varpi, -z),$$

$$V_{\varpi}(\varpi,z)=V_{\varpi}(\varpi,-z),\quad V_{\varphi}(\varpi,z)=V_{\varphi}(\varpi,-z),\quad V_z(\varpi,z)=-V_z(\varpi,-z) \tag{65}$$

Существующая магнитная связь между короной и характером формирования аккреционного диска сильно зависит от конфигурации магнитного поля $\mathbf{B}$ в диске. В отсутствии сформировавшегося диска силовые линии внешнего магнитного поля (поля протозвезды) не имеют, как правило, φ-компоненты (т.е. лежат в меридиональных плоскостях), а вблизи экваториальной плоскости преобладает компонента $\overline{B}_z$. Однако, по мере формирования ионизованного диска, силовые линии, первоначально «вмороженные» во вращающуюся плазму, начинают испытывать сдвиг в азимутальном направлении φ, который приводит к появлению отличной от нуля компоненты $\overline{B}_{\varphi}$. В предположении непрерывности силовых линий дипольного поля $\mathbf{B}$ при пересечении поверхности диска, можно сделать вывод, что радиальная и азимутальная компоненты магнитного поля должны быть одинаковыми по величине, но противоположными по направлению сверху и снизу от центральной плоскости диска. Таким образом, будем считать, что компоненты $\overline{B}_{\varpi}$ и $\overline{B}_{\varphi}$ нечетны по z, а компонента $\overline{B}_z$ четна; тогда:

$$\overline{B}_{\varpi}(\varpi,z)=-\overline{B}_{\varpi}(\varpi,-z),\quad \overline{B}_{\varphi}(\varpi,z)=-\overline{B}_{\varphi}(\varpi,-z),\quad \overline{B}_z(\varpi,z)=\overline{B}_z(\varpi,-z). \tag{66}$$

Прежде чем выполнить z-осреднение МГД уравнений (47),(51),(52), (53) и (56) для турбулизованного дискового вещества, выполним его для балансового уравнения общего вида (записанного цилиндрической системе координат)

$$\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial t}+\frac{1}{\varpi}\frac{\partial(\varpi J_{\mathcal{A}\varpi})}{\partial\varpi}+\frac{\partial(J_{\mathcal{A}z})}{\partial z}=\mathcal{S}_{\mathcal{A}}. \tag{67}$$

Здесь $\mathbf{J}_{\mathcal{A}}(t,\varpi,z)$, $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(t,\varpi,z)$ – соответственно поток и возникновение величины $\mathcal{A}(t,r,z)$. Вводя обозначение

$$\langle\mathcal{A}(\varpi,t)\rangle=\int_{-h(\varpi)}^{+h(\varpi)}dz\,\mathcal{A}(t,\varpi,z), \tag{68}$$

для осредненного по вертикали параметра $\mathcal{A}$ и интегрируя (67) по вертикальной компоненте z от $-h(\varpi)$ до $h(\varpi)$, в результате получим

$$\frac{\partial\langle\mathcal{A}\rangle}{\partial t}+\frac{1}{\varpi}\int_{-h(\varpi)}^{+h(\varpi)}dz\frac{\partial\left(\varpi J_{\mathcal{A}\varpi}\right)}{\partial r}+\left(J^{+}_{\mathcal{A}z}-J^{-}_{\mathcal{A}z}\right)=\langle\mathcal{S}_{\mathcal{A}}\rangle,$$

или

$$\frac{\partial\langle\mathcal{A}\rangle}{\partial t}+\frac{1}{\varpi}\frac{\partial}{\partial\varpi}\left(\varpi\langle J_{\mathcal{A}\varpi}\rangle\right)-\left(J^{+}_{\mathcal{A}\varpi}-J^{-}_{\mathcal{A}\varpi}\right)\frac{\partial h(\varpi)}{\partial\varpi}+\left(J^{+}_{\mathcal{A}z}-J^{-}_{\mathcal{A}z}\right)=\langle\mathcal{S}_{\mathcal{A}}\rangle. \tag{69}$$

Здесь $J^{+}_{\mathcal{A}\varpi}$, $J^{+}_{\mathcal{A}z}$ ($J^{-}_{\mathcal{A}\varpi}, J^{-}_{\mathcal{A}z}$) – значения потоковых членов $J_{\mathcal{A}\varpi}$, $J_{\mathcal{A}z}$ на верхней, $+h(\varpi)$ (нижней, $-h(\varpi)$) границе диска. Поскольку для тонких дисков $J_{\mathcal{A}\varpi}\gg J_{\mathcal{A}z}$ и $\partial h(\varpi)/\partial\varpi=\mathcal{O}(h(\varpi)/\varpi)$, то первым поверхностным членом в выражении (69) можно пренебречь по сравнению со вторым. Таким образом, результат интегрирования общего балансового уравнения по z приводит к выражению

$$\frac{\partial\langle\mathcal{A}\rangle}{\partial t}+\frac{1}{\varpi}\frac{\partial}{\partial\varpi}\left(\varpi\langle J_{\mathcal{A}\varpi}\rangle\right)+\left(J^{+}_{\mathcal{A}z}-J^{-}_{\mathcal{A}z}\right)=\langle\mathcal{S}_{\mathcal{A}}\rangle\,. \tag{70}$$

Воспользуемся теперь этим выражением при осреднении по вертикали исходных МГД уравнений для турбулентного движения, заменяя при этом интегралы от произведений, зависящих от z величин, произведением осредненных величин.

Уравнение неразрывности для тонкого диска. Осреднение по z уравнения (47), с учетом свойств отражательной симметрии (65), приводит к следующему «одномерному» уравнению сохранения массы тонкого диска

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial t}+\frac{1}{\varpi}\frac{\partial}{\partial\varpi}\left(\varpi\Sigma\, V_{\varpi}\right)=-2\overline{\rho}^{+}\tilde{u}^{+}_{z}\equiv S^{+}\,, \tag{71}$$

где

$$\Sigma(\varpi,t)\equiv\langle\overline{\rho}\rangle=\int_{-h(\varpi)}^{+h(\varpi)}dz\,\overline{\rho}(t,\varpi,z) \tag{72}$$

– поверхностная плотность диска на расстоянии ϖ от центра протозвезды (масса, содержащаяся в столбе единичного сечения, ориентированном перпендикулярно экваториальной плоскости диска); $\overline{\rho}^{+}(\varpi)\equiv\overline{\rho}\left(\varpi,z=+h(\varpi)\right)$; $V^{+}_{z}(\varpi)\equiv V_{z}\left(\varpi,z=+h(\varpi)\right)$; $S^{+}(\varpi)$ – увеличение в единицу времени поверхностной плотности за счет выпадения вещества на диск из аккреционной оболочки. Заметим, что для получения полной картины эволюции протопланетного диска необходимо принимать во внимание внешние источники аккреции и оттоки вещества с его поверхности.

При осреднении по вертикали других гидродинамических уравнений, мы воспользуемся следующим операторным соотношением

$$\Sigma\frac{D\langle\mathcal{A}\rangle}{Dt}+S^{+}\langle\mathcal{A}\rangle=\frac{\partial}{\partial t}\left(\langle\mathcal{A}\rangle\Sigma\right)+\frac{1}{\varpi}\frac{\partial}{\partial\varpi}\left(\varpi\Sigma\, V_{\varpi}\langle\mathcal{A}\rangle\right), \tag{73}$$

которое можно получить, комбинируя (55) и (71). Здесь и ниже использовано следующее обозначение

$$\frac{D\langle\mathcal{A}\rangle}{Dt}\equiv\frac{\partial\langle\mathcal{A}\rangle}{\partial t}+V_{\varpi}\frac{\partial\langle\mathcal{A}\rangle}{\partial\varpi} \tag{74}$$

для субстанциональной производной осредненного по вертикали движения.

Радиальная компонента уравнения движения для тонкого диска. Осредненное по z уравнение (52^{*}), с учетом (73), а также свойств (66) отражательной симметрии магнитного поля, принимает вид

$$\Sigma\left(\frac{D\langle V_\varpi\rangle}{Dt}-\varpi\langle\Omega\rangle^2\right)+S^+\left(\langle V_\varpi\rangle-V_\varpi{}^+\right)=-\Sigma\frac{G\mathcal{M}_\odot}{\varpi^2}-\frac{\partial}{\partial\varpi}\left\langle P+\frac{\overline{B}_z{}^2}{8\pi\mu_0}\right\rangle+$$
$$-\frac{1}{8\pi\mu_0}\frac{1}{\varpi^2}\frac{\partial}{\partial\varpi}\left\{\varpi^2\left\langle\overline{B}_\varphi{}^2-\overline{B}_\varpi{}^2\right\rangle\right\}+\frac{\overline{B}_\varpi^+\overline{B}_z}{2\pi\mu_0},\tag{75}$$

где

$$\langle V_\varpi\rangle=\frac{1}{\Sigma}\int_{-h}^{+h}\overline{\rho}\,V_\varpi dz=V_\varpi(\varpi)\,;\qquad\left\langle\overline{B}_\varphi{}^2-\overline{B}_\varpi{}^2\right\rangle\cong2h(\varpi)\left(\overline{B}_\varphi{}^2-\overline{B}_\varpi{}^2\right)\Big|_{z=0};$$

$$\left\langle P+\overline{B}_z{}^2/8\pi\mu_0\right\rangle\cong2h(\varpi)\left(P+\overline{B}_z{}^2/8\pi\mu_0\right)\Big|_{z=0}.$$

Для очень тонких дисков, когда $h(\varpi)\to0$, уравнение (75) сводится к виду

$$\langle\Omega\rangle^2\cong\Omega^2_{K,mid}-\frac{1}{\varpi\Sigma}\frac{\overline{B}_\varpi^+\overline{B}_z}{2\pi\mu_0}.\tag{76}$$

Здесь $\langle\Omega\rangle=\Sigma^{-1}\int_{-h}^{+h}\overline{\rho}\Omega(\varpi,z)\,dz$ – осредненная по толщине диска угловая скорость вращения дискового вещества; $\Omega_{K,mid}(\varpi)\equiv\sqrt{G\mathcal{M}_\odot/\varpi^3}$ – кеплеровская угловая скорость вращения в центральной плоскости диска. Таким образом, в ионизованном диске гравитационная сила уравновешивается не только центростремительной силой, но также и силой тензора магнитных натяжений $\mathbf{T}^M_{av}\equiv\overline{\mathbf{B}}\,\overline{\mathbf{B}}/4\pi\mu_0$ для осредненной составляющей магнитного поля. В пределе нулевой толщины диска величины $\overline{B}_\varpi$ и $\overline{B}_\varphi$ имеют разрыв при пересечении диска, в результате чего возникает конечная сила магнитных натяжений (подобная силе, поддерживающей в равновесии солнечные протуберанцы), которая является новой особенностью взаимодействия диска и короны.

Важно отметить, что в рассматриваемом случае, появляющаяся в уравнении (76) (r,z)-компонента этой силы ($\overline{B}_\varpi^+\overline{B}_z/2\pi\mu_0$), приводит к отклонению скорости вращения дискового вещества от кеплеровского закона вращения. В пределе нулевого магнитного поля соотношение (76) дает для угловой скорости вращения $\langle\Omega\rangle$ кеплеровский закон.

Азимутальная компонента уравнения движения для тонкого диска. Осреднение по толщине диска уравнения (53*), с учетом формулы (73), приводит к следующему закону сохранения углового момента импульса дискового вещества

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\langle J\rangle\Sigma\right)+\frac{1}{\varpi}\frac{\partial}{\partial\varpi}\left(\varpi\Sigma V_\varpi\langle J\rangle-\varpi^3\Sigma\langle\nu_K^{turb}\rangle\frac{\partial\langle\Omega\rangle}{\partial\varpi}\right)-\frac{1}{\varpi}\frac{\partial}{\partial\varpi}\left(\varpi^2\frac{\langle\overline{B}_\varphi\overline{B}_\varpi\rangle}{4\pi\mu_0}\right)=\varpi\frac{\overline{B}_\varphi^+\overline{B}_z}{2\pi\mu_0}+S^+J^+.\tag{77}$$

Здесь $\langle\overline{B}_\varphi\overline{B}_\varpi\rangle=2\int_0^h\overline{B}_\varphi\overline{B}_\varpi dz$; $\varpi^3\Sigma\langle\nu_K^{turb}\rangle\partial\langle\Omega\rangle/\partial\varpi$ – осредненный момент вязкой силы на радиусе ϖ; $\langle J\rangle=\varpi^2\langle\Omega\rangle$ – осредненный удельный угловой момент импульса вещества, находящегося на расстоянии ϖ; J^+ – удельный угловой момент импульса вещества подающего на верхнюю границу диска; $S^{+}=-2\overline{\rho}^{+}V_z^{+}$; $S^{+}J^{+}-$ скорость изменения на расстоянии ϖ количества движения дискового вещества, связанного с притоком из аккреционной оболочки. Осредненный по z коэффициент турбулентной вязкости определяется формулой (см. (41))

$$\langle \nu_K^{turb}\rangle=\frac{4}{9}\alpha_s L^{*2}\varpi\left|\frac{\partial\langle\Omega\rangle}{\partial\varpi}\right|,\quad L^{*}(\varpi)\equiv h_{eff}(\varpi)\left\{1-(\mathbf{Ri}_K-\mathbf{Ri}_M)/\mathbf{Pr}_K^{turb}\right\}^{0.25},(0<\alpha_s<1). \quad (78)$$

Заметим, что в задачах, не рассматривающих взаимодействия диска и короны, в уравнении (77) можно опустить предпоследний член, полагая, что на границе диска $\overline{B}_\varphi^{+}=\overline{B}_\varphi(\varpi,z=\pm h)=0$. В случае квазикеплеровского вращения диска, когда $\langle\Omega\rangle\cong\Omega_K$ и $\partial\langle\Omega\rangle/\partial t=0$, из балансового уравнения для момента количества движения (77) следует выражение для потока массы

$$\varpi\Sigma V_\varpi=-3\sqrt{\varpi}\,\frac{\partial}{\partial\varpi}\left(\sqrt{\varpi}\Sigma\langle\nu_K^{turb}\rangle-\frac{\sqrt{\varpi}}{\Omega_K}\frac{\langle\overline{B}_\varphi\overline{B}_\varpi\rangle}{6\pi\mu_0}\right)+\frac{\varpi\overline{B}_\varphi^{+}\overline{B}_z}{\pi\mu_0\Omega_K}-2S^{+}\varpi^2\left(1-\frac{J^{+}}{\varpi^2\Omega_K}\right), \quad (79)$$

справедливое для проводящего аккреционного диска. Это выражение в пределе нулевого магнитного поля и в пренебрежении потоком вещества на диск ($S^{+}=0$) сводится к классическому результату для радиальной скорости V_ϖ кеплеровского диска

$$V_\varpi=-\frac{3}{\Sigma\sqrt{\varpi}}\frac{\partial}{\partial\varpi}\left(\sqrt{\varpi}\langle\nu_K^{turb}\rangle\Sigma\right). \quad (79^{*})$$

Подстановка (79) в (71) приводит к уравнению

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial t}=\frac{3}{\varpi}\frac{\partial}{\partial\varpi}\left\{\sqrt{\varpi}\frac{\partial}{\partial\varpi}\left(\sqrt{\varpi}\Sigma\langle\nu_K^{turb}\rangle-\frac{\sqrt{\varpi}}{\Omega_K}\frac{\langle\overline{B}_\varphi\overline{B}_\varpi\rangle}{6\pi\mu_0}\right)\right\}-\frac{1}{\varpi}\frac{\partial}{\partial\varpi}\left(\frac{\varpi}{\Omega_K}\frac{\overline{B}_\varphi^{+}\overline{B}_z}{\pi\mu_0}\right) \quad (80)$$

для определения поверхностной плотности $\Sigma(\varpi)$ в случае проводящего диска. Уравнение (80) в пределе нулевого магнитного поля сводится к классическому диффузионному уравнению

$$\frac{\partial\Sigma(\varpi)}{\partial t}-\frac{3}{\varpi}\frac{\partial}{\partial\varpi}\left[\sqrt{\varpi}\frac{\partial}{\partial\varpi}\left(\sqrt{\varpi}\langle\nu_K^{turb}\rangle\Sigma(\varpi)\right)\right]=0,$$

показывающему, что поверхностная плотность диска может изменяться по радиусу ϖ только в вязкостной шкале времени $t_\nu\propto\varpi^2/\langle\nu_K^{turb}\rangle$.

Вертикальная компонента уравнения движения для тонкого диска. Для получения осредненного по z уравнения движения, перепишем (54*), с учетом оценки (63), в виде

$$\overline{\rho}\frac{dV_z}{dt}=-\overline{\rho}\,z\Omega_{K,mid}^2-\frac{\partial}{\partial z}\left(P+\frac{\overline{B}_\varpi^2+\overline{B}_\varphi^2}{8\pi\mu_0}\right).$$

Для эффективной полутолщины диска и осредненной по z вертикальной скорости газа используем следующие определения

$$h_{\mathrm{eff}} \equiv \frac{2}{\Sigma}\int_0^{+h}\overline{\rho} z dz \quad \text{и} \quad V_{z,\mathrm{av}} \equiv \frac{2}{\Sigma}\int_0^{+h}\overline{\rho} V_z dz\ . \qquad (81)$$

Принимая теперь во внимание, что на границе поверхности диска $P\big|_{z=\pm h}=0$, а на центральной плоскости диска $V_z\big|_{z=0}=0$, $\overline{B}_\varpi\big|_{z=0}=0$, $\overline{B}_\varphi\big|_{z=0}=0$, в результате осреднения (80) (при учете (73)) получим

$$\Sigma\frac{D}{Dt}\left(\frac{V_{z,\mathrm{av}}}{2}\right)+\frac{S^+}{2}\left(V_{z,\mathrm{av}}-V_z^+\right)=-\Sigma\frac{G\mathcal{M}_\odot h_{\mathrm{eff}}}{2\varpi^3}+P\big|_{z=0}-\frac{(\overline{B}_\varpi^+)^2+(\overline{B}_\varphi^+)^2}{8\pi\mu_0}. \qquad (82)$$

Отсюда для медленного (по сравнению со временем установления равновесия в вертикальном z-направлении) течения газа в плоскости диска, когда справедливо неравенство $V_{z,\mathrm{av}}/V_z^+ \ll 1$, следует

$$\overline{\rho}^+(V_z^+)^2=P\big|_{z=0}-\Sigma\frac{G\mathcal{M}_\odot h_{\mathrm{eff}}}{2\varpi^3}-\frac{(\overline{B}_\varpi^+)^2+(\overline{B}_\varphi^+)^2}{8\pi\mu_0}. \qquad (83)$$

В предельном случае $h_{\mathrm{eff}}\to 0$ это соотношение сводится к

$$P\big|_{z=0}=\overline{\rho}^+(V_z^+)^2+\frac{(\overline{B}_\varpi^+)^2+(\overline{B}_\varphi^+)^2}{8\pi\mu_0}. \qquad (83^*)$$

Если принять, что в приближении тонкого диска справедлива оценка, $\Sigma(\varpi)\cong 2h_{\mathrm{eff}}(\varpi)\overline{\rho}_0(\varpi)$, где $\overline{\rho}_0(\varpi)\equiv\overline{\rho}(\varpi,z=0)$, то из (81) при $V_z^+=0$ следует соотношение для определения h_{eff} в случае проводящего диска

$$\frac{h_{\mathrm{eff}}^2 G\mathcal{M}_\odot}{\varpi^3}=\left.\left(\frac{p^{\mathrm{tot}}}{\overline{\rho}}\right)\right|_{z=0}-\frac{(\overline{B}_\varpi^+)^2+(\overline{B}_\varphi^+)^2}{8\pi\mu_0\overline{\rho}_0},\quad \text{или}\quad h_{\mathrm{eff}}^2=\frac{c_{s0}^2}{\gamma\Omega_{K,\mathrm{mid}}^2}\left(1-\frac{(\overline{B}_\varpi^+)^2+(\overline{B}_\varphi^+)^2}{8\pi\mu_0\overline{\rho}_0 c_s^2}\right). \qquad (84)$$

Здесь $c_{s0}\equiv\sqrt{\gamma\left(P/\overline{\rho}\right)\big|_{z=0}}$ – скорость звука соответствующая полному давлению в центральной плоскости диска. Заметим, что если $\left(\overline{B}_\varpi^{+2}+\overline{B}_\varphi^{+2}\right)/8\pi\mu_0\overline{\rho}_0 \ll c_s^2$, то эффективная полутолщина проводящего диска определяется точно такой же формулой, как и для неэлектропроводящего диска, т.е.

$$h_{\mathrm{eff}}(\varpi)=\frac{c_{s0}(\varpi)}{\sqrt{\gamma}\,\Omega_{K,\mathrm{mid}}(\varpi)}\cong\left(\frac{\mathcal{R}T\varpi^3}{G\mathcal{M}_\odot\mu}\right)^{1/2}. \qquad (84^*)$$

Уравнение баланса полной энергии для тонкого диска. Для тонкого аккреционного диска в выражении $\widetilde{U}_{\mathrm{tot}}(\mathbf{r},t)\equiv\widetilde{E}+\left|\overline{\mathbf{B}}\right|^2/8\pi\mu_0\overline{\rho}+\left|\mathbf{u}\right|^2/2+\Psi_G+\widetilde{b}_\Sigma$ для полной энергии системы можно оставить в рассмотрении только слагаемые, связанные с гравитационной $\Psi_G=-G\mathcal{M}_\odot/\varpi$ и центробежной $\varpi^2\Omega^2/2$ энергиями; можно также пренебречь потоком энтальпии[58]. Тогда осредненное по вертикали z энергетическое уравнение (57), при использовании соотношения (73), принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\Sigma\left(\tfrac{1}{2}\varpi^2\langle\Omega\rangle^2 - G\mathcal{M}_\odot/\varpi\right)\right\} = -\frac{1}{\varpi}\frac{\partial}{\partial\varpi}\left\{\varpi\Sigma V_\varpi\left(\tfrac{1}{2}\varpi^2\langle\Omega\rangle^2 - G\mathcal{M}_\odot/\varpi\right)\right\} +$$

$$+\frac{1}{\varpi}\frac{\partial}{\partial\varpi}\left\{\varpi^2\langle\Omega\rangle\left(\Sigma\langle\nu_K^{turb}\rangle\varpi\frac{\partial\langle\Omega\rangle}{\partial\varpi} + \frac{\langle\overline{B}_\varpi\overline{B}_\varphi\rangle}{4\pi\mu_0}\right)\right\} + 2\frac{\overline{B}_z\overline{B}_\varphi^+}{4\pi\mu_0}\varpi\langle\Omega\rangle + S^+\left(\tfrac{1}{2}\varpi^2\langle\Omega\rangle^2 - G\mathcal{M}_\odot/\varpi\right)^+ + \langle Q_{rad}\rangle, \tag{85}$$

В правой части этого уравнения находятся члены, равные дивергенции потока кинетической и гравитационной энергии (первый член), вязкому потоку энергии, возникающей за счет диссипации турбулентности (второй член), потоку вектора Пойнтинга (см. 19*), описывающего обмен электромеханической энергией с короной (третий член) притоку этих энергий в диск из аккреционной оболочки (предпоследний член). Величина

$$\langle Q_{rad}\rangle = \int_{-h(\varpi)}^{+h(\varpi)} Q_{rad}dz = -2q_{rad,z}^+(\varpi), \qquad q_{rad,z}^+(\varpi) \equiv q_{rad,z}\Big|_{z=h} \tag{86}$$

связана с теплом, которое излучается наружу (посредством излучения) с верхней и нижней поверхностей диска при радиусе ϖ. Здесь (см. (18*))

$$Q_{rad}(\varpi,z) = -\frac{\partial q_{rad,z}}{\partial z}, \quad q_{rad,z}(\varpi,z) = -\frac{4\sigma_B}{3\kappa(\varpi,z)\,\overline{\rho}(\varpi,z)}\frac{\partial}{\partial z}\left((\widetilde{T}(\varpi,z)\right)^4. \tag{87}$$

Заметим, что поскольку диск тонкий, то излучение направлено в основном в вертикальном, а не в радиальном направлении. Так как на поверхности диска $\overline{p}\big|_{z=\pm h} = \widetilde{T}\big|_{z=\pm h} = 0$, то из второй формулы (87) следует, что

$$\int_0^{+h(\varpi)} \kappa(\varpi,z)\,\overline{\rho}(\varpi,z)q_{rad,z}(\varpi,z)\,dz = \frac{4\sigma_B}{3}\widetilde{T}_0^4(\varpi), \tag{88}$$

где принято обозначение $\widetilde{T}_0(\varpi) \equiv \widetilde{T}(\varpi,0)$. Аппроксимируем теперь интеграл в выражении (88) следующим образом

$$\int_0^{+h(\varpi)} \kappa(\varpi,z)\,\overline{\rho}(\varpi,z)q_{rad,z}(\varpi,z)\,dz \cong q_{rad,z}^+(\varpi)\tau(\varpi), \tag{89}$$

где

$$\tau(\varpi) = \int_0^{+h(\varpi)} \kappa(\varpi,z)\,\overline{\rho}(\varpi,z)dz = \Sigma\langle\kappa\rangle/2, \qquad \langle\kappa\rangle = \frac{\mathcal{K}\Sigma}{2h_{eff}\widetilde{T}_0^{7/2}} \tag{90}$$

– соответственно оптическая толщина, вычисленная на основе полной усредненной по Росселанду непрозрачности κ и формула Крамерса для осредненного по вертикали коэффициента непрозрачность $\langle\kappa\rangle$; тогда (88) можно переписать так

$$q_{rad,z}^+(\varpi) = \frac{4\sigma_B}{3\tau(\varpi)}\widetilde{T}_0^4(\varpi) = \sigma_B T_{eff}^4(\varpi), \tag{91}$$

откуда следует важное для тонких излучающих радиацию дисков соотношение

$$\langle Q_{rad}\rangle = -2q^{+}_{rad,z}(\varpi) = -2\sigma_B T^4_{eff}(\varpi), \qquad (92)$$

где $T_{eff}(\varpi)$ – некоторая эффективная температура верхней (нижней) границы диска.

Итак, приведенных гидродинамических уравнений вполне достаточно для полного решения эволюционной задачи для диска[11,12] в том случае, когда задано магнитное поле, как функция расстояния от центра ϖ. Действительно, после решения уравнений (76) и (77) относительно переменных $\Sigma(\varpi)$ и $\langle\Omega\rangle(\varpi)$, закон сохранения массы (71) позволяет найти в этом случае радиальную скорость $V_\varpi(\varpi)$, а уравнение энергии (85) позволяет определить потерю диска на излучение; наконец, интегрирование по диску потока вектора Пойнтинга $\varepsilon_B \equiv -2\varpi\langle\Omega\rangle\left(\overline{B}_z\overline{B}^{+}_{\varphi}/4\pi\mu_0\right)$, направленного в корону, дает скорость нагрева короны.

В общем же случае необходимо знание пространственного распределения среднего магнитного поля в диске, которое складывается из затравочного начального поля протозвезды $\mathbf{B}_\odot$ и существенной части, сгенерированной в дифференциально вращающемся диске механизмом $\alpha\omega$-динамо. Магнитное поле может быть рассчитано путем самосогласованного решения приведенных выше гидродинамических уравнений и задачи динамо (уравнения (63 и (64)). Решения такого рода задач приведены в работах Пудрица[57,59], в которых, в частности, доказано, что действие динамо в аккреционных дисках вполне вероятно. В частности, им найдено распределение поля $\overline{\mathbf{B}}$ в собственных функциях задачи динамо, когда его компоненты выражаются через функции Бесселя с радиальным масштабом, заключенным между толщиной диска и некоторыми большими значениями, особенно вблизи порога генерации.

Вместе с тем, как уже отмечалось выше, в реальных условиях эволюции протопланетного диска, количественные результаты, полученные с учетом механизма «$\alpha\omega$-динамо» (эффективно действующего лишь в том случае, когда турбулентность в диске достаточно дозвуковая), могут носить лишь приближенный характер, поскольку в настоящее время в астрофизической литературе отсутствуют надежные оценки турбулентной скорости в протопланетном диске на самых ранних этапах его существования.

В связи с этим нам представляется целесообразным анализ относительно простых моделей распределения осредненного магнитного поля $\overline{\mathbf{B}}$ в диске, когда его полоидальная компонента $\overline{\mathbf{B}}_p$ в точности совпадает с внешним магнитным полем прото-Солнца. Для моделирования $\overline{\mathbf{B}}_p$ используем дипольное поле[60]. Тогда

$$A = \frac{\Psi(\varpi,z)}{\varpi}, \qquad \Psi(\varpi,z) = \frac{B_\odot R^3_\odot}{2}\frac{\varpi^2}{(\varpi^2+z^2)^{3/2}}, \qquad (93)$$

где Ψ – полоидальный магнитный поток, постоянный в осесимметричном случае на магнитной поверхности; $R_\odot$ – солнечный радиус, $B_\odot$ –средняя напряженность магнитного поля на поверхности прото-Солнца) и полоидальный вектор $\overline{\mathbf{B}}_p$ принимает вид

$$\overline{\mathbf{B}}_p(\varpi,z) = \nabla\times\left(A(\varpi,z)\mathbf{e}_\varphi\right) \cong \frac{3B_\odot R^3_\odot}{2}\frac{z\varpi}{(\varpi^2+z^2)^{5/2}}\mathbf{e}_\varpi - \frac{B_\odot R^3_\odot}{2}\frac{\varpi^2-2z^2}{(\varpi^2+z^2)^{5/2}}\mathbf{e}_z\,. \qquad (94)$$

В этом случае для определения тороидальной и полоидальной компонент магнитного поля в диске (когда $|z|/\omega << 1$) могут быть использованы следующие уравнения:

$$\overline{B}_z = -\frac{B_\odot}{2}\left(\frac{R_\odot}{\varpi}\right)^3, \quad \overline{B}_\varpi = \frac{3B_\odot}{2}\left(\frac{R_\odot}{\varpi}\right)^3 \frac{z}{\varpi}, \quad (\overline{B}_z >> \overline{B}_\varpi), \tag{95}$$

$$\nu_M^{turb} \frac{\partial^2 \overline{B}_\varphi}{\partial z^2} = -\varpi \overline{B}_z \frac{\partial \Omega}{\partial z}, \qquad \nu_M^{turb} = \frac{\nu_K^{turb}}{\mathbf{Pr}_M^{turb}}. \tag{96}$$

Заметим, что если дважды проинтегрировать уравнение индукции (96) по вертикали от z до ∞ и учесть, что

$$\Omega = \begin{cases} \Omega, & |z| < h, \\ \Omega_\odot, & |z| > h, \end{cases} \qquad \overline{B}_\varphi(\varpi, 0) = 0 \ \text{ и } \ \partial \overline{B}_\varphi / \partial z = 0, \text{ когда } \ \varpi >> |z| > h \tag{97}$$

– условие, определяющее дисковую поверхность, то в результате получим алгебраическое соотношение для определения тороидальной компоненты магнитного поля

$$\overline{B}_\varphi(\varpi, z) = \frac{\varpi \overline{B}_z}{\nu_M^{turb}}\left(\Omega_\odot - \Omega\right) z, \qquad |z| < h \tag{98}$$

где $\Omega_\odot$ – угловая скорость Солнца. Результат осреднения (98) по вертикали, с использованием (81), дает

$$\langle \overline{B}_\varphi \rangle = \frac{\varpi \overline{B}_z}{\langle \nu_M^{turb} \rangle}\left(\Omega_\odot - \langle \Omega \rangle\right) h_{eff}, \quad \langle \nu_M^{turb} \rangle = \frac{\langle \nu_K^{turb} \rangle}{\mathbf{Pr}_M^{turb}}. \tag{99}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучение проблемы происхождения и эволюции Солнечной системы, возникновения разнообразных природных условий на Земле и других планетах представляет одно из важнейших направлений современного естествознания. Ее решение связано с проведением комплекса исследований по самым актуальным вопросам астрофизики, геофизики и космохимии, на основе развития теории, обобщения и анализа экспериментальных данных и разработки математических моделей. За последние годы, благодаря впечатляющим успехам астрофизики, открытиям протопланетных дисков и внесолнечных планетных систем, бурному развитию вычислительной математики, расширились возможности комплексных исследований физической структуры и эволюции протопланетного газопылевого диска вокруг молодых звезд солнечного типа, из которых, по современным представлениям, формируются планеты. Математическое моделирование является, по существу, единственным методом, позволяющим реконструировать соответствующие процессы с учетом ограничений, накладываемых доступными наблюдательными данными эволюции околозвездных дисков на разных стадиях. Сценарий такой эволюции в общем случае включает в себя аккрецию на диск протозвездного вещества и его температурное фракционирование, последовательное образование фаз в гетерогенной системе солнечного состава при ее охлаждении, сжатие и уплотнение диска вплоть до возникновения гравитационной неустойчивости пылевого субдиска, образующегося в экваториальной плоскости, образование первичных пылевых кластеров, служащих основой зародышей планет. Очевидно, столь сложный характер процессов требует, прежде всего, разработки адекватной теоретической основы, на базе которой строятся упомянутые модели. Автором в цитируемых выше статьях был разработан оригинальный подход с использованием методов стохастической термодинамики, многокомпонентной гидродинамики и механики гетерогенных сред, позволяющий учесть динамические процессы взаимодействия турбулизованного газа и пыли, процессы коагуляции частиц, возникновение когерентных упорядоченностей на фоне хаотических движений в крупномасштабных турбулентных струях, а также влияния гидродинамической спиральности на эволюцию турбулентности в аккреционном диске. Этот подход дает возможность проследить несколько важных этапов образования газопылевого диска вокруг молодого Солнца, проходящего стадию Т Тельца, его дальнейшую динамическую, термическую и космохимическую эволюцию, включающую этапы конденсации и уплотнения вещества, вплоть до образования пылевых кластеров, служащих зародышами при формировании планетезималей, и в дальнейшем планетных тел. К сожалению, современная вычислительная математика все еще не позволяет провести в полном объеме комплексный анализ крупномасштабных процессов в протопланетном диске, отвечающем этим теоретическим разработкам, поэтому численные модели нескольких последовательных этапов эволюции протопланетного диска строятся с использованием целого ряда упрощений[61]. Настоящее исследование является необходимым звеном для адекватного моделирования эволюции проводящего турбулизованного диска, когда для получения достоверных результатов особенно необходимы рациональные схематизации, приводящие к обозримым и решаемым численно уравнениям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А.В. Колесниченко, “Моделирование коэффициентов турбулентного переноса в газопылевом аккреционном диске”, *Астрон. Вестник*, **34**, 516-528 (2000).

[2] А.В. Колесниченко, “Гидродинамические аспекты моделирования процессов массопереноса и коагуляции в турбулентном аккреционном диске”, *Астрон. Вестник*, **35**, 139-155 (2001).

[3] А.В. Колесниченко, “Синергетический подход к описанию стационарно-неравновесной турбулентности астрофизических систем”, *В сб. “Современные проблемы механики и физики космоса”*, *М.: Физматлит*, 123-162 (2003).

[4] А.В. Колесниченко, “Термодинамическое моделирование развитой структурной турбулентности при учете флуктуаций диссипации энергии”, *Астрон. Вестник*. **38,** 144-170 (2004).

[5] А.В. Колесниченко, “О возможности синергетического рождения мезомасштабных когерентных структур в макроскопической теории развитой турбулентности”, *Мат. мод*.,**17**, № 10, 47-79 (2005).

[6] А.В. Колесниченко, М.Я. Маров, “Основы механики гетерогенных сред в околосолнечном допланетном облаке: влияние твердых частиц на турбулентность в диске”, *Астрон. Вестник*, **40,** 1-62 (2006).

[7] А.В. Колесниченко, М.Я. Маров, “О влиянии спиральности на эволюцию турбулентности в солнечном протопланетном облаке”, *Астрон. Вестник*, **41,** 3-23 (2007).

[8] А.В. Колесниченко, М.Я. Маров, “Термодинамическая модель МГД-турбулентности и некоторые ее приложения к аккреционным дискам”, *Астрон. Вестник*, **42,** 1- 50 (2008).

[9] M.Ya. Marov and A.V. Kolesnichenko, *Mechanics of turbulence of multicomponent gases. Dordrecht, Boston, London.: Kluwer Academic Publishers*, (2002).

[10] M.Ya. Marov and A.V. Kolesnichenko, “Chaotic and ordered structures in the developed turbulence”*. In: “Astrophysical disks: Collective and stochastic phenomena” (eds.: A.M. Fridman and M.Ya. Marov),* Springer, 23-54 (2006).

[11] T. Sano and S.M. Miyama, “Magnetorotational instability in Protoplanetary disks. I. On the global stability of weakly ionized disks with ohmic dissipation”, *Astrophys. J.* **515**, 776-786 (1999).

[12] T.Sano, S.M. Miyama, T. Umebayashi and T. Nakano, “Magnetorotational instability in Proto planetary disks. II. Ionization state and unstable regions”, *Astrophys. J.* **543,** 486-501 (2000).

[13] E.P. Velikhov, “Stability of an ideally conducting liquid flowing between cylinders rotating in a magnetic fluid”, *Sov. Phys. JETP*. **9**, 995-998 (1959).

[14] J.F. Hawley and S.A. Balbus, “A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. II. Nonlinear evolution”, *Astrophys. J.*, **376**, 223-233 (1991).

[15] D.M. Eardley and A.P. Lightman, “Magnetic viscosity in relativistic accretion disks”, *Astrophys. J.*, **200,** 187-203 (1975).

[16] Х. Альвен, Г. Аррениус, *Эволюция солнечной системы*. М.: Мир, (1979).

[17] A.A. Galeev, R. Rosner and G.S. Viana, “Structured coronae of accretion disks”, *Astrophys. J.*, **229**, 318-326 (1979).

[18] F.V. Coroniti, “On the magnetic viscosity in Keplerian accretion disks”, *Astrophys. J.*, **244,** 587-599 (1981).

[19] C.Tout and J.E. Pringle, “Accretion disk viscosity-a simple model for a magnetic dynamo”, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc*., **259,** 604-612 (1992).

[20] A. Brandenburg, A. Nordlund, R.F. Stein and U. Torkelsson, “The disk accretion rate for dynamo-generated turbulence”, *Astrophys. J*., **458**, 145-148 (1996).

[21] H. Lesch, “Magnetic reconnection in accretion disc coronae”, *Solar and Asrophysical Magnetohydrodynamic Flows/Ed. By K.C. Tsinganos*, Dordrecht Kluwer, 673-682 (1996).

[22] G.S. Bisnovaty-Kogan and R.V.E. Lovelace, “Advective accretion disks and related problems including magnetic fields”, *New astron. Rev*., **45**, 663-742 (2001).

[23] P.J. Armitage, M. Livio and J.E. Pringle, “Episodic accretion inmagnetically layered protoplanetary disks*”, Mon. Notic. Roy. Fstron. SOC*, **324,** 705-711 (2001).

[24] Б.Б. Кадомцев, “Перезамыкание магнитных силовых линий”, *УФН*, **151,** 3-29 (1987).

[25] Я.Б. Зельдович, А.А. Рузмайкин, Д.Д. Соколов, *Магнитные поля в астрофизике,* Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», (2006).

[26] Г. Моффат, *Возбуждение магнитного поля в проводящей среде,* М.: Мир. (1980).

[27] С.И. Вайнштейн, Я.Б. Зельдович, А.А. Рузмайкин, *Турбулентное динамо в астрофизике,* М.: Наука, (1980).

[28] E.N. Parker, “Hydromagnetic dynamo model”, *Astrophys. J.*, **122,** 293-314 (1955).

[29] J. Heyvaerts and E.R. Priest, “A self-consistent turbulent model for solar coronal heating*”, Astrophys. J.,* **390**, 297-308 (1992).

[30] G.W. Inverauity, E.R. Priest and J. Heyvaerts, “Turbulent coronal heating. I. Sheared arcade”, *Astron. Astrophys*., **293**, 913-926 (1995).

[31] R.E. Pudritz and C. A Norman, “Bipolar hydromagnetic winds from disks around protostellar objects”, *Astrophys. J.* **301**, 571-586 (1986).

[32] C.G. Campbell, “Disc –wind field matching in accretion discs with magnetically influenced wind”, *Mon .Not. R. Astron. Soc*., **361**, 396-404 (2005).

[33] A. Konigl and R.E. Pudritz, *Disk winds and the accretion –outflow connection. Protostars and Planets IV/Eds V. Mannings, A.P. Boss and S.S. Rassell*, Tucson: Univ. Arizona Press. 759-788 (2000).

[34] J.C.L. Wang, M.E. Sulkanen and R.V.E. Lovelace, “Self-collimated electromagnetic jets from magnetized accretion disks:The even-symmetry case”, Astrophys. J., **355**, 38-43 (1990).

[35] A. Favre, “Statistical Equations of Turbulents Gases”, *In: Problems of Hydrodynamics and Continum Mechanics, SIAM*, Philadelphia, 231–267. (1969).

[36] А.В. Колесниченко, М.Я. Маров, *Турбулентность и самоорганизация. Проблемы моделирования космических и природных сред*. М.: “БИНОМ. Лаборатория знаний”, (2009).

[37] A.Lazarian and E.T. Vishniac, "Reconnection in a Weakly Stochastic Field", *The Astrophysical Journal*, **517**, 700-718 (1999).
[38] R.E. Pudritz, "Dynamo action in turbulent accretion discs around black holes-I. The fluctuations", *Mon. Not. R. Astr. Soc.*. **195**, 881-896 (1981).
[39] A.K. Blackadar, "Extension of the laws of thermodynamics to turbulent system", *J. Meteorology*, **12,** (1955).
[40] Д. Жоу, Х. Касас-Баскес, Дж. Лебон, *Расширенная необратимая термодинамика*. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», (2006).
[41] В.М. Иевлев, *Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред,* М.: Наука, (1975).
[42] А.М. Фридман, Д.В. Бисикало, "Природа аккреционных дисков тесных двойных звезд: неустойчивость сверхотражения и развитая турбулентность", *УФН*, **178**, 577-604 (2010).
[43] Д.А. Франк-Каменецкий, *Физические процессы внутри звезд,* М.: Физматлит, (1959)
[44] Ф. Краузе, К.-Х. Рэдлер, *Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо,*. М.: Мир. (1984).
[45] M. Steenbeck, F. Krause and K.-H. Rädler, "Berechnung der mittleren Lorentz-Feldstärke $\overline{\mathbf{V}\times\mathbf{B}}$ für ein elektrisch leitendes Medium in turbulenter, durch Coriolis- Kräfte beeinflußter Bewegung", *Z. Naturforsch,* **21a**. 369-376 (1966).
[46] N.I. Shakura and R.A. Sunyaev, "Black holes in binary systems. Observational appearance", *Astron. Astrophys*, **24**, 337-355 (1973).
[47] J.E. Pringle and A.R. King, *Astrophysical flow,* Cambridge, (2007).
[48] Ж.-Л. Тассуль, *Теория вращающихся звезд,* М.: Мир, (1982).
[49] Н.И. Шакура, "Дисковая модель аккреции газа релятивистской звездой в тесной двойной системе", *Астрон. журн.*, **49**, 921-929 (1972).
[50] D. Lynden-Bell and J.E. Pringle, "The Evolution of Viscous Discs and the Origin of the Nebular Variables", *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.,* **168,** 603 (1974).
[51] G.T. Bath and J.E. Pringle, "The Evolution of Viscous Discs,-I. Mass Transfer Variations", *Mon. Not. Roy. Astron. Soc*., **194,** 967 (1981).
[53] D.M. Eardley, A.P. Lightman, D.G. Payne and S.L. Shapiro, "Accretion discs around massive Black Holes; Persistent Emission Spectra", *Astrophys. J*., **234**, 53 (1978).
[54] J. Heyvaerts, E.R. Priest and A. Bardou, "Magnetic field diffusion in self-consistently turbulent accretion disks", *Astrophys. J.,* **473**, 403-421 (1996).
[55] Э. Прист, Т. Форбс, *Магнитное пересоединение. Магнитогидродинамическая теория и приложения,* М.: Физматлит, (2005).
[56] С. Шапиро, С. Тьюколски, *Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды*. Ч. II. М.: Мир, (1985).
[57] R.E. Pudritz, "Dynamo action in turbulent accretion discs around black holes-II. The mean magnetic field", *Mon. Not. R. Astr. Soc.,* **195,** 897-914 (1981).
[58] R.V.E. Lovelace, J.C.L. Wang and M.E. Sulkanen, "Self-collimated electromagnetic jets from magnetized accretion disks", *Astr. J.,* **515**, 504-535 (1987).
[59] R.E. Pudritz and G.G. Fahlman, "The structure and variability of dynamo driven accretion discs", Mon. Not. R. Astr. Soc., **198**, 689-706 (1982).
[60] C.G. Campbell and S.E. Caunt, "An analytic model for magneto-viscous accretion discs", *Mon. Not. R. Astron. Soc.,* **306**, 122-136 (1999).
[61] М.Я. Маров, А.В. Колесниченко, А.Б. Макалкин, В.А. Дорофеева, И.Н. Зиглина, А.В Чернов, "От протосолнечного облака к планетной системе: Модель эволюции газопылевого диска", *В сб. «Проблемы зарождения и эволюции биосферы/Под ред. Э.М. Галимова,* М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», (2008).