MATHEMATICA MONTISNIGR
Vol XXIV (2012)

X International Seminar
"Mathematical Models & Modeling in
Laser-Plasma Processes &
Advanced Science Technologies"
LPpM3-2012

О ТЕОРЕМЕ ПЛЕСНЕРА ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

БЕРБЕРЯН С. Л.

Российско-Армянский(Славянский) университет, Ереван, Армения
E-mail: samvel357@mail.ru

Ключевые слова: гармонические функции, точки Плеснера, Фату, Жюлиа.

Аннотация. В статье уточняется известная теорема Плеснера для гармонических функций,определенных в единичном круге и переносится утверждение теоремы также на орициклические пути.

Профессором А И Плеснером[1] была доказана теорема о граничных особенностях мероморфных функций, определенных в единичном круге.В работе[2] японский математик Ямасита утверждение теоремы Плеснера доказал для гармонических функций.В настоящей работе автор рассматривает как некасательные, так и орициклические пути и уточняет утверждение этой теоремы для этого же класса функций .
В дальнейшем будем придерживаться общепринятых обозначений[3,4]. Обозначим через D , Γ и $h(\xi,\varphi)$ соответственно единичный круг $|z|<1$, единичную окружность $|z|=1$ и хорду единичного круга D, оканчивающуюся в точке $\xi=e^{i\theta}\in\Gamma$ и образующую с радиусом в этой точке угол $\varphi; -\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$. Пусть $\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$ обозначает подобласть круга D, ограниченную хордами $h(\xi,\varphi_1)$ и $h(\xi,\varphi_2)$. Область $\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$ называют обычно углом Штольца с вершиной в точке $\xi=e^{i\theta}\in\Gamma$ и если нас не интересует размер угла Штольца, мы будем обозначать его кратко $\Delta(\xi)$. Рассмотрим действительнозначную функцию $f(z)$. Для произвольного подмножества S круга D, для которого точка $\xi\in\Gamma$ является предельной точкой, обозначим через $C(f,\xi,S)$ предельное множество функции $f(z)$ в точке ξ относительно множества S, т.е. $C(f,\xi,S)=\bigcap\overline{f(S\bigcap U(\xi))}$, где пересечение берётся по всем окрестностям $U(\xi)$ точки ξ, а черта означает замыкание множества относительно двухточечной компактификации $\overline{R}$ множества $R=(-\infty,+\infty)$ в виде отрезка посредством добавления к точкам множества R символов $-\infty$ и $+\infty$. Точку $\xi\in\Gamma$ отнесём к множеству $F(f)$, если $C(f,\xi,\Delta(\xi))$ состоит из единственного значения α. В этом случае говорят, что функция $f(z)$ имеет в точке $\xi\in\Gamma$ угловой предел α. Множество $F(f)$ называется множеством точек Фату для функции $f(z)$. Введем дополнительные обозначения и

определения. Пусть $\Lambda(\xi)$- орицикл круга D в точке ξ, т. е. окружность радиуса меньше единицы, касающаяся изнутри окружности Γ в точке ξ. Два орицикла, $\Lambda^1(\xi)$, $\Lambda^2(\xi)$ круга D в точке ξ ограничивают некоторую односвязную область $O\Delta(\xi)$, которую диаметр круга D, проведенный в точку $\xi \in \Gamma$, делит на две равные части, называемые левым орициклическим углом $O^-\Delta(\xi)$ и правым орициклическим углом $O^+\Delta(\xi)$ в точке $\xi \in \Gamma$. Для гармонической в D функции $u(z)$ рассмотрим предельные множества $C(u,\xi,O^+\Delta(\xi))$ и $C(u,\xi,O^-\Delta(\xi))$ в точке $\xi \in \Gamma$ по правому и левому орициклическим углам $O^+\Delta(\xi))$ и $O^-\Delta(\xi))$.Если же $\cap C(u,\xi,O\Delta(\xi))=\overline{R}$, где пересечение также берется по всем орициклическим углам с вершиной в точке $\xi \in \Gamma$, то точку ξ называют орициклической точкой Плеснера функции $u(z)$. Если граничная точка ξ является в одно и то же время обыкновенной точкой Плеснера и орициклической точкой Плеснера для функции $f(z)$, то точку ξ назовем, как и в случае мероморфных функций, обобщенной точкой Плеснера для гармонической функции $f(z)$. Через $R(f,\xi,S)$ обозначают множество повторяющихся значений функций $f(z)$ на множестве S, $a=f(z_n^a)$, $n\in N$, для которой последовательность $\{z_n^a\}$ точек множества S, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n^a=\xi$, удовлетворяет условию $\xi\in\Gamma$. Хорду $h(\xi,\varphi)$ называют направлением Жюлиа для функции $f(z)$, если для любого угла $\Delta(\xi)$, содержащего хорду $h(\xi,\varphi)$, множество $R(f,\xi,S)$ покрывает все множество R, за возможным исключением не более двух значений. Точка $\xi\in\Gamma$ называется точкой Жюлиа для функции $f(z)$, если каждая хорда $h(\xi,\varphi)$ является направлением Жюлиа функции $f(z)$.Обозначим через $J(f)$ множество всех точек Жюлиа.Орицикл $\Lambda(\xi)$ - называют орициклическим направлением Жюлиа для функции $f(z)$, если для любых орициклических углов $O\Delta(\xi)$, произвольных орициклических углов $O\Delta(\xi)$, содержащих орицикл $\Lambda(\xi)$, множество $R(f,\xi,O\Delta(\xi))$ покрывает все множество R, за возможным исключением не более двух значений. Если граничная точка ξ является в одно и то же время обыкновенной точкой Жюлиа и орициклической точкой Жюлиа для функции $f(z)$, то точку ξ назовем обобщенной точкой Жюлиа для гармонической функции $f(z)$.В статье также рассматриваются интегральные операторы произвольного порядка в смысле Римана-Лиувилля при $0<\alpha<+\infty$.Систематическое изложение основных свойств этих операторов дано в монографиях[6,7]. Пусть $f(x)$-произвольная функция из класса $L(0,l)$, где $0<l<+\infty$. Интегралом от $f(x)$ порядка α ($0<\alpha<+\infty$) с началом в точке $x=0$ принято называть функцию $D^{-\alpha}f(x)\equiv\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt$, $x\in(0,l)$. Известно,что если $f(x)\in L(0,l)$, то при любом α ($0<\alpha<+\infty$) функция $D^{-\alpha}f(x)$ определена почти всюду на $(0,l)$ и принадлежит классу $L(0,l)$. При $\alpha=0$ принимают $D^0 f(x)=f(x)$.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Для произвольной гармонической функции $u(z)$, определенной в D, справедливо разложение $\Gamma=F(u)\cup I_*(u)\cup E$, в котором *F(u)*-множество точек Фату функции $u(z)$, $I_*(u)$ – множество обобщенных точек Плеснера функции $u(z)$, а E – некоторое множество меры нуль.

Предварительно докажем лемму.

ЛЕММА1. Пусть $f(z)$ -голоморфная в D функция, причем $f(z)=u(z)+iV(z)$, Тогда справедливы соотношения:

1) $F(f)\subseteq F(u)$ кроме, быть может, некоторого множества *E*, линейная мера которого равна нулю;

2) $I_*(f)\subseteq I_*(u)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем соотношение 1). Рассмотрим те точки из множества $F_*(f)$, в которых угловые граничные пределы функций $f(z)$ бесконечны. Обозначим множество таких точек через *E*. В силу теоремы единственности Н.Н. Лузина и И.И. Привалова для голоморфных функций $mesE=0$. Если же исследовать такие точки множества *F(f)*, в которых существуют конечные угловые граничные пределы функции $f(z)$, то, очевидно, что у функции $u(z)$ также существуют конечные угловые пределы и, значит, $F(f)\big|E\subset F(u)$. Отсюда следует утверждение 1).

Докажем утверждение 2). Возьмем произвольную точку $\xi\in I_*(f)$. Так как любое конечное комплексное число $\gamma=\alpha+i\beta$ принадлежит предельным множествам $C(f,\xi,\Delta(\xi))$ и $C(f,\xi,O\Delta(\xi))$ для произвольных углов Штольца $\Delta(\xi)$ и произвольных орициклических углов $O\Delta(\xi)$, то и любое конечное действительное число α принадлежит предельным множествам $C(u,\xi,\Delta(\xi))$ и $C(u,\xi,O\Delta(\xi))$ для любых углов $\Delta(\xi)$ и $O\Delta(\xi)$. В силу связности этих углов и принимая во внимание непрерывность функции $u(z)$ имеем, что предельные множества $C(u,\xi,\Delta(\xi))$ и $C(u,\xi,O\Delta(\xi))$- связные замкнутые множества. Так как они содержат любое конечное действительное число, то отсюда следует, что $C(u,\xi,\Delta(\xi))=C(u,\xi,O\Delta(\xi))=\overline{R}$ для любых углов $\Delta(\xi)$ и $O\Delta(\xi)$. Следовательно, $\xi\in I_*(u)$, что и требовалось доказать.

Перейдем к доказательству теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, согласно одной теореме Багемила[5], справедливой для произвольной голоморфной функции, определенной в D, каждая точка $\xi\in D$, за возможным исключением множества линейной меры нуль, является либо точкой Фату, либо обобщенной точкой Плеснера для этой функции. Рассмотрим в качестве голоморфной функции $f(z)=u(z)+iV(z)$, где $V(z)$ –некоторая гармонически сопряженная к $u(z)$ функция. Принимая во внимание утверждения 1) и 2) нашей леммы 1, завершим доказательство теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ1. Пусть гармоническая в D функция $u(z)$ почти в каждой точке ξ некоторого множества $E\subset\Gamma,\ mesE>0$, удовлетворяет одному из следующих условий: предельные множества $C(u,\xi,\Delta(\xi,\varphi_1^{\xi},\varphi_2^{\xi}))$ и $C(u,\xi,O\Delta(\xi))$ ограничены сверху или снизу в некоторых фиксированных углах $\Delta(\xi,\varphi_1^{\xi},\varphi_2^{\xi})$ (или $O\Delta(\xi)$), где величины этих углов могут быть разными в зависимости от выбора точек ξ. Тогда почти в каждой точке $\xi\in E$ функция $u(z)$ имеет конечные граничные пределы по всем углам Штольца $\Delta(\xi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без нарушения общности допустим,что предельные множества $C(u,\xi,\Delta(\xi,\varphi_1^{\xi},\varphi_2^{\xi}))$ и $C(u,\xi,O\Delta(\xi))$ ограничены сверху.Из нашей теоремы 1 непосредственно следует, что каждая точка $\xi\in E\ |E_1$, где $mesE_1=0$ является точкой Фату для гармонической функции $u(z)$. Обозначим $E_2=E\ |E_1$. Покажем, что функция $u(z)$ имеет почти всюду на E_2, кроме, быть может, множества $E_3,\ mesE_3=0$, конечные угловые граничные значения. Допуская, что $mesE_3>0$ и $u(z)$ имеет на этом множестве бесконечные угловые пределы, равные $-\infty$, имеем голоморфную функцию $f(z)=\exp\{u(z)+iV(z)\}$ (или $f(z)=\exp\{-u(z)-iV(z)\}$), которая будет иметь на множестве E_3 угловые граничные пределы, равные 0. Согласно теореме единственности $f(z)\equiv 0$, а, значит, $u(z)\equiv-\infty$, что невозможно. Рассматривая множество $E_4=E_2\ |E_3$ получим утверждение следствия 1.

Придерживаясь тех рассуждений ,что и при доказательстве леммы 1 и следствия 1 работы[8], получим следующее утверждение

ЛЕММА 2. Для произвольной непрерывной действительнозначной функции $f(z)$ справедливо свойство $I_*(f)=J_*(f)$, причём в каждой точке $\xi\in J_*(f)$ выполняются соотношения $R(f,\xi,\Delta(\xi))=R$ для всех углов $\Delta(\xi)$ и $R(f,\xi,O\Delta(\xi))=R$ для всех орициклических углов $O\Delta(\xi)$.

Воспользовавшись утверждениями теоремы 1 и леммы 2, получим теорему.

ТЕОРЕМА2. Для произвольной гармонической функции $u(z)$, определенной в D, справедливо разложение $\Gamma=F(u)\cup J_*(u)\cup E$, в котором *F(u)*-множество точек Фату функции $u(z)$, $J_*(u)$ – множество обобщенных точек Жюлиа функции $u(z)$, а E – некоторое множество меры нуль.

Пусть $f(z)-$ *гармоническая функция, определенная в* D. Тогда гармоничность функции $v(z) = r^{-\alpha}D^{-\alpha}\{f(z)\}$ всюду в круге D при $0 \le \alpha < +\infty$ следует из утверждения следствия к теореме 9.1 монографии[6]. Поэтому для этих функций справедливы утверждения теорем 1 и 2.А именно:

СЛЕДСТВИЕ 2.Пусть $f(z)-$ *гармоническая* функция, определенная в единичном круге D. Тогда для функции $v(z) = r^{-\alpha}D^{-\alpha}\{f(z)\}$ справедливы разложения :

$$\Gamma = F(v) \cup J_*(v) \cup E\,,$$

$$\Gamma = F(v) \cup I_*(v) \cup E\,.$$

Граничному поведению субгармонических и гармонических функций,определенных в единичном круге, посвящены многочисленные работы.Отметим, в частности, работы[9,10,11,12].

Литература

[1] И.И.Привалов,Граничные свойства аналитических функций. М.Л., ГИТТЛ, с. 336(1950).

[2] S.Yamashita ,"On Fatou-and Plessner type theorems", Proc. Japan. Acad., vol. 46, №6, 494-495 (1970).

[3] В. И. Гаврилов," Об одной теореме единственности для голоморфных функций", Изв. АН Арм. ССР. Математика, т. 10, № 3, 264-271 (1975).

[4] В. И. Гаврилов, "Нормальные функции и почти периодические функции", ДАН СССР, т.240, №4, 768-770 (1978).

[5] F.Bagemihl," Horocyclic boundary properties of meromorphic functions", Annal. Acad. Scien. Fennicae, Ser. AI, № 385,1-18 (1966)

[6] М.М.Джрбашян, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., «Наука», с.671 (1966).

[7] А. А. Килбас, Самко, Маричев, Дробные интегралы, производные и некоторые их приложения, изд-во «Наука и техника», с. 688 (1987).

[8] С.Л.Берберян и В.И.Гаврилов,"Предельные множества непрерывных и гармонических функций по некасательным граничным путям", Mathematica Montisnigri, Vol.1, 17-25 (1993).

[9] Е.Д. Соломенцев,"Гармонические и субгармонические функции и их обобщения", В сборн. Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование. Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР, М., 83-100 (1964).

[10] А.Ловатер ," Граничное поведение аналитических функций", В сборн. «Итоги науки и техники». Математический анализ, т. 10, 99-260 (1973).

[11] Z.Pavicevic and I.Susic," Boundary behavior of subharmonic functions", Matematiqki vesnik, №50, 83-87 (1998).

[12] В.И. Гаврилов, В.С. Захарян и А.В.Субботин,"Линейно-топологические свойства максимальных пространств Харди гармонических функций в круге", ДНАН Армении, т.102, №3, 203-209 (2002).