

Посвящаем 80-летию нашего учителя профессора В. И. Гаврилова

ХАРАКТЕРИСТИКА МНОЖЕСТВА ТОЧЕК ПЛЕСНЕРА ПРОИЗВОЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ПО КАСАТЕЛЬНЫМ НАПРАВЛЕНИЯМ

М. М. МИРЗОЯН*, А. Н. АЙРАПЕТЯН†

*Армянский государственный экономический университет
Ереван, Армения
e-mail: an_mirzoyan@mail.ru

†Армянский государственный экономический университет
Ереван, Армения
e-mail: arkady.hayrapetyan@mail.ru

Ключевые слова: Предельные множества, множества точек Плеснера, эквиморфные функции.

Анотация. В статье даются характеристики множества точек Плеснера $I_A(f)$ [1], и множества $I_A^*(f)$ [2], порожденных предельными множествами произвольных и эквиморфных [3] в единичном круге функций по путям, имеющим произвольный порядок касания с единичной окружностью.

CHARACTERISTICS OF THE SET OF PLESNER'S POINTS OF ARBITRARY FUNCTIONS DEFINED IN THE UNIT CIRCLE ALONG TANGENTIAL DIRECTIONS

M. M. MIRZOYAN*, A. N. HAYRAPETYAN†

*Armenian State University of Economics, Yerevan, Armenia
e-mail: an_mirzoyan@mail.ru

†Armenian State University of Economics, Yerevan, Armenia
e-mail: arkady.hayrapetyan@mail.ru

Summary. The characteristics of the set of Plesner's points $I_A(f)$ [1] and $I_A^*(f)$ [2] derived from cluster sets arbitrary equimorphic functions [3] in the unit disc along directions with arbitrary tangential order with the unit circumference are given.

2010 Mathematics Subject Classification: 30D35, 31A05.

Key words and Phrases: cluster sets, set of Plesner's points, equimorphic functions.

1 ВВЕДЕНИЕ

Пусть $D:|z|<1$ единичный круг, $\Gamma:|z|=1$ - единичная окружность, Ω -сфера Римана (на протяжении всей работы D , Γ и Ω остаются те же). В работе Мехия Х. Э. [3] функция $f:D \rightarrow \Omega$ названа эквиморфной функцией, если f есть композиция $f(z)=g(h(z))$ некоторой мероморфной функции $g(z)$ в круге D и эквиморфизма $h: D \rightarrow D$, т.е. такого гомеоморфизма круга D на себя, что h, h^{-1} равномерно непрерывны относительно гиперболической метрики единичного круга [4].

Пусть $\xi = e^{i\varphi} \in \Gamma$. Для произвольных действительных чисел α и $q, 0 < \alpha < \infty, q \geq 0$ назовем правым q -путем $L^+(\xi, q, \alpha)$ всякую кривую, которая задается непрерывной на $[0;1)$ функцией $z = z(t)$ со свойствами:

$$\lim_{t \rightarrow 1} z(t) = \xi; \quad |z(t) - \xi| < \frac{1}{2}; \quad \theta < \arg z(t) < \theta + \frac{\pi}{6}, \quad \arg z(t) \rightarrow \theta \text{ (монотонно), при } t \rightarrow 1 \text{ и}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} (1 - |z(t)|) |\arg z(t) - \theta|^{q-1} = \alpha.$$

Назовем правым q^* -путем $L^+(\xi, q^*, \alpha)$ правый q -путь задающийся уравнением

$$z = \left[1 - \alpha(\varphi - \theta)^{q+1} \right] e^{i\varphi}, \quad \varphi \in \left[\theta; \theta + \alpha^{\frac{1}{1+q}} \right].$$

Обозначим через $L^-(\xi, q, \alpha)$ ($L^-(\xi, q^*, \alpha)$), $0 < \alpha < \infty, q \geq 0$ и назовем левым q -путем (q^* -путем) образ правого q -пути $L^+(\xi, q, \alpha)$ ($L^+(\xi, q^*, \alpha)$) при симметрии относительно радиуса $h(\xi, 0)$ круга D в точке $\xi = e^{i\varphi} \in \Gamma$. Правые и левые q -пути (q^* -пути) назовем q -путями (q^* -путями) $L(\xi, q, \alpha)$ ($L(\xi, q^*, \alpha)$) или просто $L(\xi, q)$ ($L(\xi, q^*)$).

Для произвольных $\alpha > 0, \beta > 0, q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, 0 < \delta < \frac{1}{2}$ назовем (q_1, q_2) -углом $((q_1, q_2)^*)$ в точке $\xi \in \Gamma$ и обозначим через $\Delta(\xi, \alpha, \beta, q_1, q_2, \delta)$ ($\Delta^*(\xi, \alpha, \beta, q_1, q_2, \delta)$) или просто $\Delta(\xi, q_1, q_2)$ ($\Delta^*(\xi, q_1, q_2)$), если нас не интересуют размеры этого угла, подобласть круга D , ограниченную двумя разными $L(\xi, q_1, \alpha)$ ($L(\xi, q_1^*, \alpha)$) и $L(\xi, q_2, \beta)$ ($L(\xi, q_2^*, \beta)$) путями (возможен случай $q_1 = q_2$) и окружностью $|z - \xi| = \delta$, где δ достаточно малое положительное число.

Пусть Z - произвольное топологическое пространство. Для произвольного отображения f круга D в $Z, f:D \rightarrow Z$ произвольной точки $\xi \in \Gamma$ и произвольного множества $S \subset D$, для которого ξ является предельной точкой, предельное множество $C(f, \xi, S)$ определяется как пересечение

$$C(f, \xi, S) = \bigcap_{r>0} \overline{f(V_r(\xi) \cap S)}, \text{ где } V_r(\xi) = \{z \in D; |z - \xi| < r\}, r > 0$$

и черта замыкание множества.

При доказательстве формулируемых результатов понадобится следующее утверждение, доказанное в работе Уэстона [5].

(А) Если K - компактное подмножество из Z , $K \subset Z$ и S произвольное подмножество из D , для которого $\xi \in \Gamma$ является предельной точкой и $K \cap C(f, \xi, S) = \emptyset$, то существует такая окрестность:

$$U = \{z \in D; |z - \xi| < \delta\}, 0 < \delta < \frac{1}{2}, \text{ что } \overline{f(U \cap S)} \cap K = \emptyset.$$

Следуя В. И. Гаврилову [6], последовательность точек $\{z_n\}, z_n \in D, n=1, 2, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 1$ называют P -последовательностью для произвольной функции $f: D \rightarrow \Omega$, если для любой бесконечной подпоследовательности $\{z_{n_k}\}$ и любого $\varepsilon > 0$ функция $f(z)$ принимает в объединении неевклидовых кругов $D(z_{n_k}, \varepsilon) = \{z \in D; \sigma(z, z_{n_k}) < \varepsilon\}$ бесконечно часто каждое значение $\omega \in \Omega$, кроме быть может, двух значений.

Пусть f произвольная функция $f: D \rightarrow \Omega$ и A произвольное конечное множество неотрицательных чисел. Жорданову кривую K_ξ , лежащую в круге D и оканчивающуюся в точке $\xi \in \Gamma$, назовем линией Жюлия для функции $f(z)$, если при любом $\varepsilon > 0$ на множестве

$$D(K_\xi, \varepsilon) = \bigcup_{\alpha \in K_\xi} D(\alpha, \varepsilon)$$

функция $f(z)$ принимает бесконечно часто каждое значение $\omega \in \Omega$, кроме, быть может, двух значений. Точку $\xi \in \Gamma$ отнесем к множеству $J_A(f)$ и назовем точкой Жюлия [7], если любой q -путь $L(\xi, q), q \in A$ является линией Жюлия для $f(z)$. Точку $\xi \in \Gamma$ отнесем к множеству точек Плеснера $I_A(f)$, если для любого (q_1, q_2) - угла $\Delta(\xi, q_1, q_2), q_1, q_2 \in A$, имеем

$$C(f, \xi, \Delta(\xi, q_1, q_2)) = \Omega.$$

Точку $\xi \in \Gamma$ отнесем к множеству $I_A^*(f)$, если каждый q -путь $L(\xi, q), q \in A$ не содержит на одной P -последовательности функции $f(z)$, и для любого q -пути $L(\xi, q), q \in A$ имеем $C(f, \xi, L(\xi, q)) = \Omega$. Ясно, что для произвольной функции $f(z): D \rightarrow \Omega$ множества $J_A(f)$ и $I_A^*(f)$ являются подмножествами множества $I_A(f)$.

2 ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Для произвольного отображения $f : D \rightarrow Z$ круга D в локально компактное метризуемое линделефо пространство Z и для произвольного конечного множества A неотрицательных чисел множество $I_A(f)$ имеет тип G_δ на Γ .

Доказательство. Пусть $M = \{S_n\}$ счетная база открытых сфер, имеющих компактные замыкания в пространстве Z . Пусть $B = \{(\alpha_j, \beta_k)\}, \alpha_j > 0, \beta_k > 0$ совокупность всех положительных рациональных пар $\alpha_j > 0, \beta_k > 0$ и $A = \{q_i\}, q_i \geq 0$. Для произвольных фиксированных чисел $(\alpha_j, \beta_k) \in B, q_i \in A, q_r \in A$ и n и $m, n = 1, 2, \dots, m = 2, 3, \dots$ обозначим через $H_{n,m,j,k,i,r}$ множество таких точек $\xi \in \Gamma$, для которых

$$f\left(\Delta^*\left(\xi, \alpha_j, \beta_k, q_i, q_r, \frac{1}{m}\right)\right) \subset Z \setminus S_n.$$

Покажем, что справедливо следующее разложение:

$$\Gamma \setminus I_A(f) = \cup H_{n,m,j,k,i,r} \quad (1)$$

Поскольку вложение $\cup H_{n,m,j,k,i,r} \subset \Gamma \setminus I_A(f)$ очевидно, то для доказательства обратного вложения допустим, что ξ произвольная точка из множества $\Gamma \setminus I_A(f)$, т.е. существует некоторый (q_i, q_r) - угол $\Delta(\xi, q_i, q_r), q_i, q_r \in A$, для которого $C(f, \xi, \Delta(\xi, q_i, q_r)) \neq Z$. Согласно лемме 3 из [8] найдется $(\alpha_j, \beta_k) \in B$ и такое натуральное число $m_1 \in N, m_1 > 2$, что

$$\Delta^*\left(\xi, \alpha_j, \beta_k, q_i, q_r, \frac{1}{m_1}\right) \subset \Delta(\xi, q_i, q_r)$$

и, значит

$$C\left(f, \xi, \Delta^*\left(\xi, \alpha_j, \beta_k, q_i, q_r, \frac{1}{m_1}\right)\right) \neq Z.$$

Из последнего следует, что существует такая сфера $S_n \in M$, для которой

$$C\left(f, \xi, \Delta^*\left(\xi, \alpha_j, \beta_k, q_i, q_r, \frac{1}{m_1}\right)\right) \cap \overline{S_n} = \emptyset.$$

Поэтому, согласно предложению (A) найдется такая окрестность

$$U = \left\{z \in D; |z - \xi| < \frac{1}{m_2}\right\}, m_2 > 2, m_2 \in N,$$

что

$$f\left(U \cap \Delta^*\left(\xi, \alpha_j, \beta_k, q_i, q_r, \frac{1}{m_1}\right)\right) \cap \overline{S_n} = \emptyset,$$

т.е $\xi \in H_{n,m,j,k,i,r}$, где $m = \max(m_1, m_2)$.

Итак, разложение (1) доказано. Чтобы доказать, что каждое множество $H_{n,m,j,k,i,r}$ из объединения (1) замкнуто, допустим, что $\xi_0 \in \overline{H_{n,m,j,k,i,r}}$.

Поскольку

$$\Delta^*\left(\xi_0, \alpha_j, \beta_k, q_i, q_r, \frac{1}{m}\right) \subset \bigcup_{\xi \in H_{n,m,j,k,i,r}} \Delta^*\left(\xi, \alpha_j, \beta_k, q_i, q_r, \frac{1}{m}\right),$$

то

$$f\left(\Delta^*\left(\xi_0, \alpha_j, \beta_k, q_i, q_r, \frac{1}{m}\right)\right) \subset Z \setminus S_n,$$

т.е $\xi_0 \in H_{n,m,j,k,i,r}$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Для любой функции f эквиморфной в D , $f: D \rightarrow \Omega$ и для любого конечного множества A неотрицательных чисел множество $I_A^*(f)$ имеет тип $F_{\sigma\delta}$ на Γ .

Доказательство. Пусть функция f эквиморфная в D имеет каноническое представление $f(z) = g(h(z))$, где $g(z)$ - мероморфная функция в D , $g: D \rightarrow \Omega$, а $h(z)$ эквиморфизм $h: D \rightarrow \Omega$. Пусть $B = (\alpha_j, \beta_k)$ - множество всех положительных рациональных пар $\alpha_j > 0, \beta_k > 0$ и $A = \{q_i\}, q_i \geq 0$.

Для произвольных фиксированных чисел $(\alpha_j, \beta_k) \in B$, $q_i \in A, q_r \in A$ и n и m , $n = 1, 2, \dots$ и $m = 2, 3, \dots$, обозначим через $E_{n,m,j,k,i,r}$ множество точек $\xi \in \Gamma$, для которых

$$\begin{aligned} \text{Sup}[Q_f(z)] &\leq n, \\ z &\in \Delta^*\left(\xi, \alpha_j, \beta_k, q_i, q_r, \frac{1}{m}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$Q_f(z) = (1 - |h(z)|^2) |g'(h(z))| (1 + |g(h(z))|)^{-1}.$$

Обозначим через $K(f)$ множество таких точек $\xi \in \Gamma$, где в любом (q_1, q_2) угле $\Delta(\xi, q_1, q_2), q_1, q_2 \in A$ функция $Q_f(z)$ ограничена. Нетрудно проверить равенство

$$I_A^*(f) = I_A(f) \cap K(f). \quad (3)$$

Согласно теореме 1, для произвольной функции $f : D \rightarrow \Omega$, множество $I_A(f)$ имеет тип G_δ на Γ . Кроме того, имеем разложение

$$K(f) = \bigcap_{m,j,k,i,r} \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{n,m,j,k,i,r}$$

где множества $E_{n,m,j,k,i,r}$ замкнуты. Следовательно, $K(f)$ множество типа $F_{\sigma\delta}$ на Γ .

Из условия (3) следует, что множество $I_A^*(f)$ имеет тип $F_{\sigma\delta}$ на Γ . Теорема 2 доказана.

Отметим, что в случае, когда f - мероморфная функция в D теорема 1 усиливает теорему 3 из [9], в случае, когда $A = \{0\}$ и f эквиморфная функция в D , теорема 2 установлена в [3], а в случае $A = \{0\}$ и f - мероморфная в D в [10].

3 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в статье доказывается, что для произвольного отображения $f : D \rightarrow Z$ (где Z локально компактное метризуемое линделево пространство), множество точек Плеснера $I_A(f)$ имеет тип G_δ на Γ . А также доказывается, что для эквиморфной функции $f : D \rightarrow \Omega$ множество $I_A^*(f)$ имеет тип $F_{\sigma\delta}$ на Γ по путям имеющим произвольный порядок касания с единичной окружностью.

REFERENCES

- [1] E. Kollingtvd, A. Lovater. *Teoriia predel'ny'kh mnozhestv*. M. Mir, (1971).
- [2] V. I. Gavrilov. "Povedenie vdol' hord meromorfny'kh funktsii' v edinichnom kruge", *DAN SSSR*, **216**, 1, str. 21-23, (1974).
- [3] КН. Е. Мехиа. "Granichny'e svoi'stva e'kvimorfny'kh funktsii'", *DAN SSSR*, **265**, 1, s. 35-38, (1982).
- [4] V.A. Efremovich. "Geometriia blizosti". *Matem. Sb.* **31 (73)**, 1. s. 189-200, (1952).
- [5] J. D. Weston "Some Theorems on Cluster Sets", *J. London Math. Soc.* **33**, 4. p. 435-441, (1958).
- [6] V.I. Gavrilov. "O raspredelenii znachenii' meromorfny'kh v edinichnom kruge funktsii', ne iavliaiushchiksia normal'ny'mi". *Matem. Sb.*, **67(109)**, 3, 408-427, (1965).
- [7] V.I. Gavrilov. "Ob odnoi' teoreme Kartrait' i Kollingvuda, kasaiushchei'sia klassifikatsii i raspredeleniia osobennosti' meromorfny'kh funktsii' na granitse". *Vestneyk MGU*, **4**. s. 36-43, (1976).
- [8] M.M. Mirzoian. "O teoremax maksimal'nosti dlia proizvol'ny'kh i meromorfny'kh funktsii' po kasatel'ny'm napravleniiam". *DAN Arm SSR*, **66**, 4, s. 200-204, (1978).
- [9] M.M. Mirzoian. "Harakteristika granichny'kh osobennosti' meromorfny'kh funktsii' i funktsii', porazhdaemy'kh predel'ny'mi mnozhestvami vdol' kasatel'ny'kh napravlenii'". *DAN Arm. SSR*, **66**, 5, s. 263-266, (1978).
- [10] A.N. Kanatnykov. "Obrashchenie teoremy' Mei'era dlia meromorfny'kh funktsii'". *DAN SSSR*, **238**, 5, s. 1043-1046, (1978).

Поступила в редакцию 10.11.2014.