MATHEMATICA MONTISNIGRI
Vol XLVII (2020)

ВЫВОД В РАМКАХ НЕЭКСТЕНСИВНОЙ КИНЕТИКИ КРИТЕРИЯ ГРАВИТАЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДЖИНСА ДЛЯ ДОПЛАНЕТНОГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ОБЛАКА С УЧЕТОМ РАДИАЦИИ И МАГНИТНОГО ПОЛЯ

А.В. КОЛЕСНИЧЕНКО

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Москва, Россия
*Ответственный автор. E-mail: kolesn@keldysh.ru,
web page: http: keldysh.ru/kolesnichenko/person.htm

DOI: 10.20948/mathmontis-2020-47-14

Ключевые слова: Неэкстенсивная кинетика Тсаллиса, гравитационный критерий Джинса, допланетное газовое облако, чернотельное излучение.

Аннотация. В настоящее время неэкстенсивная статистическая механика Тсаллиса успешно применяется к космическим системам с дальним силовым взаимодействием, которое и является причиной их аномальности (стататистической и термодинамической неаддитивности). Известно, что гравитационная неустойчивость является фундаментальным процессом фрагментации гравитирующего допланетного облака. В конечном счете, именно она вызывает формирование устойчивых астрофизических объектов, таких как звезды, туманности, допланетные пылевые сгущения, аккреционные диски и т. д. При этом в случае нормальных звезд большую роль играет давление излучения как фактор их гидростатического равновесия.

В данной работе на основе кинетики Тсаллиса рассмотрена проблема гравитационной неустойчивости Джинса для протяженного самогравитирующего плазменного облака, заполнявшего все пространство прото-солнечной системы, с учетом влияния неэкстенсивности среды, вращения и магнитного поля на критическую длину волны возмущения, ведущей к неустойчивости. Обобщённые критерии гравитационной неустойчивости Джинса найдены из соответствующих дисперсионных соотношений, полученных как для нейтрального вещества, состоящего из смеси совершенного q-газа и чернотельного излучения, так и для плазмы. Определены функциональные зависимости критического значения длины возмущающей волны от энтропийного индекса деформации q, размерности пространства скоростей D и коэффициента β, характеризующего долю излучения в полном давлении системы. Эти свободные параметры должны задаваться в каждом конкретном случае из статистических или экспериментальных данных. Показано, что и радиационное давление стабилизирует вещество неэкстенсивных допланетных облаков. Для вращающейся намагниченной плазмы критерии неустойчивости Джинса модифицируются силой Кориолиса и магнитным полем только в поперечном режиме распространения волн возмущения. Полученные здесь результаты помогут, по мнению автора, лучше понять некоторые астрофизические проблемы, связанные, в частности, с моделированием процессов образования звезд и экзопланет из звездных туманностей.

2010 Mathematics Subject Classification: 85A35, 91B50, 82C40.
Key words and Phrases: Non-extensive Kinetics of Tsallis, Gravitational Criterion of Jeans, Pre-planet Gas Cloud, Blackbody Radiation.

CONCLUSION IN THE FRAMEWORK OF THE NON-EXTENSIVE KINETICS OF JEANS` GRAVITATIONAL INSTABILITY CRITERION FOR A PREPLANETARY ROTATING CLOUD WITH ACCOUNT OF RADIATIONS AND MAGNETIC FIELD

A.V. KOLESNICHENKO

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Science
*Corresponding author. E-mail: kolesn@keldysh.ru,
web page: http: keldysh.ru/kolesnichenko/person.htm

DOI: 10.20948/mathmontis-2020-47-14

Summary. At the present time, non-extensive statistical mechanics of Tsallis is successfully applied to space systems with long-range force interaction, which is the reason for their anomaly (statistical and thermodynamic non-extensity). It is known that gravitational instability is a fundamental process of fragmentation of gravitating cosmic matter. It causes the formation of stable astrophysical objects, such as stars, nebulae, pre-planetary dust condensations, accretion disks, etc. Wherein, in the case of normal stars, the radiation pressure as a factor in their hydrostatic equilibrium plays an important role.

It is on the basis of statistical mechanics of Tsallis that the paper considers the problem of Jeans gravitational instability for an extended self-gravitating plasma cloud that fills the entire space of the proto-solar system, taking into account the influence of medium nonextension, rotation, and magnetic field on the critical wavelength of the perturbation leading to instability. The generalized criteria for Jeans' gravitational instability are found from the corresponding dispersion relations obtained both for a neutral substance consisting of a mixture of perfect q-gas and blackbody radiation, and for plasma. The functional dependences of the critical value of length of the perturbing wave on the entropy strain index q, the dimension of the velocity space D, and the coefficient β, characterizing the fraction of radiation in the total pressure of the system are determined. These free parameters should be specified in each case from statistical or experimental data. It was shown that radiation pressure stabilizes the matter of non-extensive pre-planet clouds. For a rotating magnetized plasma, the Jeans instability criteria are modified by the Coriolis force and magnetic field only in the transverse mode of propagation of perturbation waves. The results obtained here will help, according to the author, a better understanding of some astrophysical problems related, in particular, to modeling the processes of formation of stars and exoplanets from stellar nebulae.

ВВЕДЕНИЕ

Как теперь стало понятно, статистическая механика Больцмана−Гиббса и классическая статистическая термодинамика не являются вполне универсальными теориями, поскольку они имеют ограниченные области применимости. Это связано, в частности, с тем, что в основе этой статистики лежит гипотеза молекулярного хаоса. А это, в свою очередь, означает, что любой выделенный объем приобретает по истечении времени настолько хорошо развитую хаотическую структуру, что при $t \to \infty$ его точки могут располагаться в произвольной части фазового пространства. Таким образом, фазовое пространство в классической статистике не содержит запрещенных состояний и обладает обычными свойствами непрерывности, гладкости, евклидовости. При этом стохастический процесс имеет марковский характер, а гипотеза перемешивания, дополненная предположением о бесконечном числе степеней свободы, приводит, в конечном счете, к каноническому (экспоненциальному) распределению вероятности состояний Больцмана−Гиббса, из которого следует свойство аддитивности экстенсивных термодинамических переменных, таких как внутренняя энергия, энтропия и т.п., а в случае кинетической теории - к максвелловскому распределению скоростей.

Вместе с тем, в физике и в других естественных науках, использующих методы статистической механики, известны многочисленные примеры аномальных систем с дальним силовым взаимодействием, фрактальным характером фазового пространства и значительными корреляциями между отдельными их частями. Сложная пространственно-временная структура подобных систем приводит к нарушению принципа аддитивности для таких важнейших термодинамических величин, как энтропия или внутренняя энергия. Моделирование эволюции подобных систем, обладающих произвольным фазовым пространством, возможно, в частности, в рамках так называемой неэкстенсивной статистической механики Тсаллиса, важным преимуществом которой является асимптотический степенной закон распределения вероятностей.

В настоящее время теории разнообразных неэкстенсивных систем развиваются в ускоренном темпе, при котором появляются новые идеи, позволяющие глубже понять их природу, возможности и ограничения. Каждая такая теория имеет широкий спектр важных приложений, связанных с физикой статистических систем, вероятностные свойства которых описываются не гиббсовыми (и не гауссовыми), а степенными распределениями. В частности, неэкстенсивная статистическая механика успешно применяется к космическим системам с дальним силовым взаимодействием, которое и является причиной их аномальности (стататистической и термодинамической неэкстенсивности).

Как известно, при неустойчивости неравновесных систем (в частности, различных астрофизических газопылевых объектов) возникает динамический хаос, что делает возможным образование более сложных упорядоченных (в общем случае фрактальных) структур. Возникновение фрактальных структур подтверждается для многих астрофизических систем, в частности, у звезд, межзвездных молекулярных облаков, аккреционных допланетных дисков и т.д. При учете сильного гравитационного поля в моделях эволюции подобных аномальных структур возникают принципиальные трудности, поскольку для них традиционные газодинамические и термодинамические методы описания часто неприемлемы. Преодоление этих трудностей требует нового подхода к решению эволюционных задач в космогонии. Один из возможных подходов к моделированию эволюции космогонических систем может быть основан на методах неэкстенсивной статистической механики

Тсаллиса[i], как раз и предназначенной для описания эволюции газопылевых сред с дальним (сильным) гравитационным воздействием, которое и является причиной их аномальности (см., например, [1-16]). Важным отличием неэкстенсивной статистики Тсаллиса от классической статистики Больцмана−Гиббса является наличие асимптотического степенного закона распределения вероятностей (появляющегося при максимизации параметрической энтропии Тсаллиса), который не зависит от экспоненциального поведения, обусловленного распределением Гиббса. Тем не менее, основанная на параметрической энтропии неэкстенсивная статистика Тсаллиса представляет собой всё же обобщение, а не альтернативу статистике Больцмана−Гиббса, поскольку она распространяет область применимости классической статистической теории на неэкстенсивные системы только путём расширения математической формы их энтропийного функционала.

Самогравитирующая среда становится гравитационно-неустойчивой, если возникшие в ней сколь угодно малые возмущения плотности неограниченно растут со временем вследствие тяготения и равновесие нарушается, если соответствующие длины волн превышают определенное значение. В частности, с джинсовской гравитационной неустойчивостью связан процесс фрагментации самогравитирующего околозвёздного облака. Именно она вызывает, в конечном счете, образование и эволюцию астрофизических объектов, таких как аккреционные диски, допланетные пылевые сгущения, планетезимали и т. д. (см., [18-24]). Проблеме гравитационной неустойчивости космических объектов в последнее время посвящено большое число публикаций, среди которых можно выделить следующие публикации [25-50]. Во всех этих работах рассмотрены различные аспекты джинсовской неустойчивости самогравитирующих газовых сред как в рамках классических уравнений Навье−Стокса и МГД-уравнений, так и на основе бесстолкновительного уравнения Больцмана при наличии гравитационных полей и уравнения Пуассона.

Вместе с тем в работах [6,7,9,10,12,14-16] были развиты термодинамический и газодинамический (на основе модифицированного кинетического уравнения с интегралом столкновений в форме Бхатнагара−Гросса−Крука) подходы, позволяющие моделировать эволюцию космогонических систем в рамках формализма деформированной статистической механики Тсаллиса. С учетом полученных в них результатов в представленной работе выполнено в рамках неэкстенсивной кинетики Тсаллиса рассмотрение влияния радиации на гравитационную неустойчивость Джинса для допланетного вращающегося плазменного облака (точнее его экваториальной части, в которой практически все излучение является длинноволновым, поскольку оно уже успело пройти через многократное поглощение и переизлучение частицами среды). Именно в этой области возможно существование локального термодинамического равновесия, при котором температура частиц практически совпадает с температурой черного тела.

---

[i] Обзорам исследований в рамках неэкстенсивной статистики Тсаллиса посвящены многочисленные журнальные статьи, сборники и монографии. Кроме этого, имеется постоянно обновляющаяся полная библиография (Nonextensive statistical mechanics and thermodynamics: Bibliography/ http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm), которая на сегодняшний день состоит из более 5600 ссылок [17].

1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ q - ГИДРОДИНАМИКИ

Рассмотрим далее газообразную динамическую неэкстенсивную систему с нормированным распределением частиц $f(\mathbf{r},\mathbf{c},t)$ в геометрическом пространстве $\mathbf{r}$ и в пространстве скоростей $\mathbf{c}$ с размерностью D. Предлагаемое Тсаллисом обобщение статистической механики (в случае статистики Курадо−Тсаллиса) лучше всего описывается следующими двумя аксиомами [4,6,]:

Аксиома 1. Функционал энтропии, связанный с нормированным распределением функции вероятностей $f(\mathbf{z},t)$ равен

$$\mathcal{S}_q[f] = \frac{k_{\mathcal{B}}}{q-1}\int d\mathbf{z}\left\{f(\mathbf{z}) - [f(\mathbf{z})]^q\right\}, \tag{1}$$

где q − параметр деформации – число, связанное с фрактальной размерностью, а для неэкстенсивных систем, являющееся мерой их неаддитивности [3]; $\mathbf{z} = (\mathbf{r},\mathbf{c})$ − элемент объёма фазового пространства; $d\mathbf{z} \equiv d\mathbf{r}d^D\mathbf{c}$, где D − размерность пространства скоростей; $k_{\mathcal{B}}$ − постоянная Больцмана.

Аксиома 2. Экспериментально измеряемое значение любой макроскопической величины $\langle\mathcal{A}\rangle_q$ (термодинамической характеристики q-системы) задаётся соотношением

$$\langle\mathcal{A}\rangle_q \equiv \int d\mathbf{z}\mathcal{A}(\mathbf{r},t)[f(\mathbf{z})]^q, \tag{2}$$

где $\mathcal{A}(\mathbf{r},t)$ − соответствующая микроскопическая величина.

Важно подчеркнуть, что энтропия $\mathcal{S}_q(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})$ двух независимых систем не является аддитивной термодинамической переменной при $q \neq 1$, поскольку [3]

$$\mathcal{S}_q(\mathcal{A}\cup\mathcal{B}) = \mathcal{S}_q(\mathcal{A}) + \mathcal{S}_q(\mathcal{B}) + k^{-1}(1-q)\mathcal{S}_q(\mathcal{A})\mathcal{S}_q(\mathcal{A}).$$

Несмотря на это обстоятельство, в литературе было показано, что существует значительное количество обычных статистических и термодинамических свойств, которые q-инвариантны, т. е. справедливы для любого q. К ним, в частности, относятся свойство выпуклости энтропии, структура равновесных канонических ансамблей, неаддитивная термодинамика, структура преобразования Лежандра и многое другое (см. [17].

Основные определения. Энтропия Тсаллиса влечёт за собой не только обобщение статистической физики и термодинамики, но и обобщение физической кинетики и гидродинамики [12,51,52]. Простейшей макроскопической величиной является q-плотность числа частиц, которая определяется соотношением

$$n_q(\mathbf{r},t) \equiv \int [f(\mathbf{z})]^q d^D\mathbf{c}. \tag{3}$$

Тогда массовая q-плотность равна $\rho_q(\mathbf{r},t) \equiv m n_q(\mathbf{r},t)$. Поскольку частица, движущаяся со скоростью $\mathbf{c}$, обладает импульсом $m\mathbf{c}$, то выражение

$$\mathbf{u}_q(\mathbf{r},t) \equiv \int m\mathbf{c}\left[f(\mathbf{z})\right]^q d^D\mathbf{c} / \rho_q(\mathbf{r},t) \tag{4}$$

определяет гидродинамическую скорость элемента объёма. Величина

$$\varepsilon_q(\mathbf{r},t) = \rho_q^{-1}\int \tfrac{m}{2}\left|\mathbf{c}-\mathbf{u}_q\right|^2 \left[f(\mathbf{z})\right]^q d^D\mathbf{c} \tag{5}$$

является удельной внутренней q-энергией (на единицу массы) неэкстенсивной системы. Потоки

$$\mathcal{P}_q(\mathbf{r},t) = m\int (\mathbf{c}-\mathbf{u}_q)(\mathbf{c}-\mathbf{u}_q)\left[f(\mathbf{z})\right]^q d^D\mathbf{c}, \tag{6}$$

$$\mathcal{J}_q(\mathbf{r},t) \equiv \tfrac{1}{2}m\int \left|\mathbf{c}-\mathbf{u}_q\right|^2 (\mathbf{c}-\mathbf{u}_q)\left[f(\mathbf{z})\right]^q d^D\mathbf{c} \tag{7}$$

представляют собой соответственно тензор давлений и поток тепла. Гидростатическое q-давление определяется как

$$p_q(\mathbf{r},t) = \tfrac{1}{3}\mathcal{P} : \mathcal{I} = \tfrac{1}{3}m\int \left|\mathbf{c}-\mathbf{u}_q\right|^2 \left[f(\mathbf{z})\right]^q d^D\mathbf{c}, \tag{8}$$

где $\mathcal{I}$ − единичный тензор второго ранга. В частности, если сдвиговые напряжения равны нулю, а нормальные напряжения равны между собой, то $\mathcal{P}_q = p_q\mathcal{I}$.

Система уравнений q гидромеханики. В рамках неэкстенсивной статистической механики Тсаллиса в работах [12,51] было проведено методом моментов конструирование гидродинамических и квазигидродинамических уравнений на основе модифицированного кинетического уравнения Больцмана[ii)] с интегралом столкновений в форме Бхатнагара−Гросса− Крука):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{c}\cdot\nabla + \mathcal{F}_q\cdot\nabla_{\mathbf{c}}\right)\left[f(\mathbf{r},\mathbf{c},t)\right]^q = -\frac{\left[f(\mathbf{r},\mathbf{c},t)\right]^q - \left[f^{(0)}(\mathbf{r},\mathbf{c},t)\right]^q}{\tau}. \tag{9}$$

Здесь $\nabla_{\mathbf{c}} \equiv \mathbf{i}_x\partial/\partial c_x + \mathbf{i}_y\partial/\partial c_y + \mathbf{i}_z\partial/\partial c_z$; $\mathcal{F}_q(\mathbf{r},t) = \mathbf{f}/m - grad\,\Psi_q(\mathbf{r},t)$ − не зависящая от скорости внешняя сила (сила тяжести) отнесённая к единице массы; $\mathbf{f}$ − сила негравитационного происхождения (например, электромагнитная сила Лоренца); $\Psi_q(\mathbf{r},t) \equiv -G\int \dfrac{m}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\left[f(\mathbf{z}',t)\right]^q \mathrm{d}\mathbf{z}'$ − гравитационный потенциал, удовлетворяющий уравнению Пуассона $\Delta\Psi_q(\mathbf{r}) = 4\pi G\int mf^q d^D\mathbf{c}$; G − гравитационная постоянная; τ − положительный параметр, который интерпретируется как характерное время релаксации произвольной функции распределения f к обобщённому локально- максвелловскому распределению (величина τ совпадает по порядку величины со средним временем свободного

ii) В цитируемой работе кинетическая теория была основана на операторе столкновений Бхатнагера−Гросса−Крука (BGK), который был обобщён для произвольного значения параметра q.

пробега частиц в системе). Равновесное распределение $f^{(0)}(\mathbf{r},\mathbf{c})$, в случае когда $q>1$, определяется следующей формулой (см., например, [10])

$$f^{(0)}(\mathbf{r},\mathbf{c})=\left\{c_{q,D}\frac{\rho_q}{m}\left(\frac{m}{2\pi k_{\mathcal{B}}T_q}\right)^{D/2}\right\}^{1/q}\left\{1-(1-q)\frac{m(\mathbf{c}-\mathbf{u}_q)^2}{2k_{\mathcal{B}}T_q}\right\}^{1/(1-q)}, \qquad (10)$$

где $c_{q,D}=\dfrac{(1-q)^{D/2}\Gamma(\frac{q}{1-q})}{\Gamma(\frac{q}{1-q}-\frac{D}{2})}$; $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$ − Гамма-функция.

В результате были получены следующие моментные уравнения q- гидродинамики, которые являются обобщением на произвольное значение параметра q обычных гидродинамических уравнений Навье−Стокса:

$$\frac{\partial\rho_q}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_q\mathbf{u}_q)=0, \qquad (11)$$

$$\frac{\partial(\rho_q\mathbf{u}_q)}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\mathcal{P}_q+\rho_q\mathbf{u}_q\mathbf{u}_q\right)=n_q\mathbf{f}-\rho_q\nabla\psi_q, \qquad (12)$$

$$\frac{\partial(\rho_q\varepsilon_q)}{\partial t}+\nabla\cdot\left\{\mathcal{J}_q+\rho_q\varepsilon_q\mathbf{u}_q\right\}+\mathcal{P}_q:\nabla\mathbf{u}_q=0. \qquad (13)$$

Уравнения (11)-(13) не является в общем случае замкнутыми, поскольку отсутствует необходимая связь (определяющие соотношения) потоковых величин ($\mathcal{P}_q$ и $\mathcal{J}_q$) и скалярных характеристик течения (ρ_q, $\mathbf{u}_q$ и T_q). Эта связь может быть найдена с помощью решения модельного кинетического уравнения (9) методом Чепмена−Энскога при использовании общего асимптотического разложения функции распределения по числу Кнудсена. Этот метод был использован, в частности, в работе [51]; в результате были найдены определяющие соотношения, замыкающие систему (11)-(13). В случае приближения нулевого порядка, когда распределение $f\equiv f^{(0)}$ (т.е. является обобщённым локально-максвелловским распределением (10)), было показано, что тензор напряжения $\mathcal{P}_q$ сводится к шаровому тензору $\mathcal{P}_q^{(0)}\equiv p_q\mathcal{I}$, а поток тепла $\mathcal{J}_q=0$. При этом внутренняя энергия ε_q и гидростатическое давление p_q определяются соотношениями

$$\varepsilon_q=\frac{Dk_{\mathcal{B}}T_q}{2m}\left[1+(1-q\tfrac{D}{2})\right]^{-1}, \qquad (14)$$

$$p_q=\frac{\rho_q k_{\mathcal{B}}T_q}{m[1+(1-q)\frac{D}{2}]}=\frac{2}{D}\rho_q\varepsilon_q. \qquad (15)$$

Заметим, что поскольку определение температуры в q-кинетике Тсаллиса достаточно произвольно (оно зависит от довольно произвольного определения температуры с точки зрения множителей Лагранжа (см., например, [10]), то далее величина T_q интерпретируется как обобщённая температура сложной неаддитивной системы. Естественно, что эта температура, в корне отличается от абсолютной термодинамической температуры T, характеризующей интенсивность хаотизации (т.е. беспорядочного движения) частиц системы. Заметим, что если определить формулой $T_{eff} \equiv T / \left[1+(q-1)\frac{D}{2}\right]$ эффективную температуру q-системы, то для величины ε_q получим соотношение $\varepsilon_q = DkT_{eff} / 2m > 0$ (совпадающее при $q \to 1$ и $D = 3$ с определением внутренней энергии в статистике Больцмана–Гиббса), которое соответствует равному распределению энергии идеального газа по степеням свободы для всех q. Если сохранить обычные представления температуры и для обобщённой температуры T_q, то тогда неравенство $\varepsilon_q > 0$ накладывает жёсткое ограничение на величину параметра деформации q: в этом случае энтропийный индекс удовлетворяет неравенству $1 < q < 1+2/D$.

В приближении первого порядка определяющие уравнения для потока тепла $\mathcal{J}_q$ и тензора вязких напряжений $\mathcal{T}_q \equiv \mathcal{P}_q - p_q\mathcal{I}$ имеют вид:

$$\mathcal{J}_q(\mathbf{r},t) = -\lambda_q \nabla T\,, \tag{16}$$

$$\mathcal{T}(\mathbf{r},t) = \mu_q\left(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T - \frac{2}{3}\mathcal{I}\nabla\cdot\mathbf{u}\right), \tag{17}$$

где $\lambda_q = \tau\dfrac{k_{\mathcal{B}}p_q}{m}\dfrac{1+D/2}{1+(1-q)(1+D/2)}$ и $\mu_q = \tau\, p_q = \tau\dfrac{\rho_q k_{\mathcal{B}}T}{m[1+(1-q)\frac{D}{2}]}$ – соответственно коэффициенты теплопроводности и сдвиговой вязкости.

2. ЗАМКНУТАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ q-ГИДРОДИНАМИКИ ДЛЯ ДОПЛАНЕТНОГО ОБЛАКА С РАВНОВЕСНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

В эволюции многих астрофизических объектов большую роль играет давление излучения, как фактор их гидростатического равновесия. Впервые анализ неустойчивости в аккреционных дисках относительно осесимметричных возмущений с учетом давления излучения был проведен в работе Шакуры и Сюняева [30]. В последующих работах рассматривались общие политропные модели [31], учитывались неосесимметричные возмущения [53], звуковые и эпициклические колебания [24,54] и т.д.

Ниже мы используем приведенную выше систему уравнений q- гидродинамики для моделирования неустойчивости околосолнечного допланетного облака (толстого диска), вещество которого состоит из смеси с q-газа и чёрнотельного изотропного излучения при температуре T, распространяющегося по всем направлениям. Будем предполагать, что допланетное облако оптически толстое и распределение поля излучения близко к равновесному. Подчеркнём также, что облако в значительной мере обладает осевой симметрией, что является следствием его вращения вокруг центральной звезды. Далее будем также предполагать, что облако- самогравитирующее, для которого вертикальная структура (вдоль оси вращения) определяется балансом сил давления и гравитации самого диска.

В случае пренебрежения гидродинамическими диссипативными процессами и нагревом космического вещества, обусловленным диссипацией и процессами ионизации и возбуждения, исходная система q-уравнений, состоящая из аналога уравнений Эйлера и уравнения Пуассона, имеет вид[iii)] (см., например, [10]):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0\,, \tag{18}$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\,t} = -\frac{1}{\rho}\nabla P - \nabla \psi\,, \tag{19}$$

$$\Delta \psi = 4\pi G \rho\,, \tag{20}$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{P}{\rho}\nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{dQ}{d\,t}\,. \tag{21}$$

где соотношением $d\mathcal{A}/d\,t \equiv \partial \mathcal{A}/dt + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathcal{A}$ определяется полная производная структурной величины $\mathcal{A}(\mathbf{r},t)$ по времени. Здесь

$$P(\mathbf{r},t) = p_q + p_{rad} \equiv p_q + aT^4/3\,, \tag{22}$$

$$\mathcal{E}(\mathbf{r},t) = \varepsilon_q + \varepsilon_{rad} \equiv \varepsilon_q + aT^4/\rho \tag{23}$$

− соответственно полное давление и полная внутренняя энергия (на единицу массы) смеси идеального q-газа и чёрнотельного излучения; $\rho dQ/dt = -\nabla \cdot \mathcal{J}_Q$; $\mathcal{J}_Q$ − суммарный вектор теплового потока, учитывающий в принципе все термодинамически обратимые процессы, которые могут уносить тепло из элемента среды при его движении; $\varepsilon_q(\mathbf{r},t) = c_{vq}T(\mathbf{r},t) = \dfrac{D}{2+(1-q)D}\dfrac{k_{\mathcal{B}}T(\mathbf{r},t)}{m}$ − внутренняя энергия (на единицу массы газовой составляющей допланетного диска); $\varepsilon_{rad} = aT^4/\rho$ − энергия излучения чёрного тела, находящаяся в единице массы; $p_q(\mathbf{r},t) = \dfrac{2}{2+(1-q)D}\dfrac{k_{\mathcal{B}}}{m}T(\mathbf{r},t)\rho(\mathbf{r},t) = \dfrac{2}{D}\rho\varepsilon_q$ − газовое давление в неэкстенсивной дисковой системе (аналог закона состояния в кинетической теории идеальных газов); T − абсолютная температура; $p_{rad} \equiv aT^4/3$ − лучевое давление;

[iii)] Здесь и далее индекс “q” у ряда гидродинамических и термодинамических переменных мы будем опускать.

a − постоянная излучения Стефана−Больцмана; $\psi(\mathbf{r},t) = -G\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}'$ − гравитационный потенциал, являющийся решением уравнения Пуассона (8) (интеграл здесь берётся по всему объёму V, занимаемому допланетным облаком); G − гравитационная постоянная; $c_{vq} = \frac{D}{2+(1-q)D}\frac{k_{\mathcal{B}}}{m}$ − удельная изохорная теплоёмкость газовой составляющей смеси. Определим также показатель адиабаты газового вещества диска, как отношение $\gamma_q \equiv \gamma_{gas} = c_{pq}/c_{vq}$. Тогда $\gamma_q \equiv \gamma_{gas} = 2-q+2/D$, $\gamma_1 = (2+D)/D$.

Уравнение для полной внутренней энергии смеси (21) удобно переписать, используя уравнение неразрывности (18), в форме первого начала термодинамики $dQ/dt = d\mathcal{E}/dt + Pdv/dt$, которое остаётся справедливым и для неэкстенсивных систем [10, 11], или в виде тождества Гиббса

$$Td\mathcal{S}/dt \equiv dQ/dt = d\mathcal{E}/dt + Pdv/dt, \tag{24}$$

выражающего скорость $d\mathcal{S}/dt$ изменения энтропии $\mathcal{S}$ (на единицу массы) дискового вещества и излучения при движении элемента среды вдоль его траектории (здесь $v(\mathbf{r},t) = 1/\rho$ − удельный объём).

Изоэнтропические изменения в среде, содержащей q-газ и радиацию. Далее мы будем рассматривать такие движения космического вещества (находящегося в состоянии идеального q-газа) и чёрнотельного излучения, для которых энтропия каждой частицы среды остается в первом приближении постоянной на протяжении всего пути частицы, т.е. $d\mathcal{S}/dt \equiv \partial\mathcal{S}/\partial t + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathcal{S} = 0$. Подобные обратимые и адиабатические движения являются изоэнтропическими. Для них энергетическое уравнение (21) сводится к уравнению

$$\rho d\mathcal{E}/dt + P\nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \tag{25}$$

выражающему тот факт, что скорость изменения полной внутренней энергии движущегося элемента среды равна работе по сжатию этого элемента, совершаемой окружающей средой.

Вместе с тем, для астрофизических целей часто удобно использовать другие формы уравнения (25) (которые впервые были выведены Эддингтоном [55] и Чандрасекхаром [20]. Эти формы справедливы, когда давление P и внутреннюю энергию $\mathcal{E}$ можно вычислить из соответствующих уравнений состояния как функций от удельного объёма v и температуры T (или энтропии $\mathcal{S}$) в зависимости от исследуемого процесса. Для «медленного» процесса, характеризуемого временем, много большим времени теплопередачи, любые возмущения профиля температуры будут успевать релаксировать. Следовательно, этот процесс можно рассматривать как изотермический, при котором $P = P(v,T_0) = P(v)$. «Быстрый» процесс (по сравнению с процессом теплопереноса) можно считать адиабатическим в силу нехватки времени для обмена теплом двух соседних областей:

$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = const$ и $P = P(v,\mathcal{S}_0) = P(v)$.

Из энергетического уравнения (25) для квазистатического процесса следует

$$\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v}\right)_T dv + Pdv = \frac{v}{T}\left(12 p_{rad} + \frac{c_{vq}}{c_{pq} - c_{vq}} p_q\right) dT + (4 p_{rad} + p_q) dv. \tag{26}$$

Следовательно, для изоэнтропических изменений имеем

$$\left(12 p_{rad} + \frac{1}{\gamma_q - 1} p_q\right) d\ln T + (4 p_{rad} + p_q) d\ln v = 0. \tag{27}$$

Введём теперь адиабатические показатели смеси вещества и излучения Γ_1, Γ_2 и Γ_3 соотношениями

$$\frac{d}{dt}\ln P = \Gamma_1 \frac{d}{dt}\ln\rho, \tag{28}$$

$$\frac{d}{dt}\ln T = (\Gamma_3 - 1)\frac{d}{dt}\ln\rho = \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2}\frac{d}{dt}\ln P, \tag{29}$$

которые могут быть использованы вместо энергетического уравнения (25). С учётом уравнения состояния «идеального q-газа» (15) можно записать

$$dP = d(p_{rad} + p_q) = (4 p_{rad} + p_q) d\ln T - p_q d\ln v. \tag{30}$$

Следовательно, (28) есть не что иное, как

$$\frac{4 p_{rad} + p_q}{T} dT + \left[\Gamma_1 \frac{(p_{rad} + p_q) - p_q}{v}\right] dv = 0. \tag{31}$$

Из (27) и (31) следует, что

$$\frac{12 p_{rad} + (\gamma_q - 1)^{-1} p_q}{4 p_{rad} + p_q} = \frac{4 p_{rad} + p_q}{\Gamma_1 (p_{rad} + p_q) - p_q}. \tag{32}$$

Введём теперь в рассмотрение величину $\beta \equiv p_{gas} / P$ − коэффициент, характеризующий долю вещества в полном давлении системы[iv)]. При использовании этого параметра, соотношение (32) можно переписать в виде:

[iv)] На особую важность отношения $(1-\beta)$ для теории звездной структуры впервые указал Эддингтон. В известном отрывке из его книги «Внутреннее строение звезд» Эддингтон связывал это отношение с «явлением звезды» («happening of the stars»).

$$\Gamma_1 = \beta + \frac{(4-3\beta)^2(\gamma_q - 1)}{\beta + 12(\gamma_q - 1)(1-\beta)}, \quad (\gamma_q - 1 = 1 - q + 2/D). \tag{33}$$

Можно легко показать, что имеют место следующие соотношения

$$\Gamma_2 = \frac{(4-3\beta)\Gamma_1}{\beta + 3(1-\beta)\Gamma_1} = 1 + \frac{(4-3\beta)(\gamma_q - 1)}{3(\gamma_q - 1)(1-\beta)(4+\beta)},$$

$$\Gamma_3 = 1 + \frac{\Gamma_1 - \beta}{4 - 3\beta} = 1 + \frac{\Gamma_1(\Gamma_2 - 1)}{\Gamma_2} = 1 + \frac{(4-3\beta)(\gamma_q - 1)}{\beta + 12(\gamma_q - 1)(1-\beta)}.$$

Если $p_{rad} \ll p_q$, то все обобщённые показатели адиабаты Γ_j для «q-газа + излучение» совпадают с показателем адиабаты чистого q-газа $\left(\gamma_q = 2/D + 2 - q\right)$, а когда присутствует одно лишь излучение абсолютно чёрного тела ($p_q \ll p_{rad}$), то они равны $4/3$. Таким образом, для смеси «идеального q-газа» и радиации обобщенные показатели адиабаты принимают промежуточные значения от $4/3$ до γ_q.

3. ДЖИНСКОВСКАЯ ГРАВИТАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В НЕЭКСТЕНСИВНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Рассмотрим сначала простейшую задачу возникновения неустойчивости в бесконечной покоящейся сферически однородной газовой среде. Напомним, что при рассмотрении гравитационной неустойчивости Дж. Джинс рассматривал однородное состояние самогравитирующей среды в состоянии покоя, что не совсем корректно, так как такое состояние не является состоянием равновесия. Тем не менее, его вывод критерия неустойчивости можно рассматривать как первое приближение, которое в наиболее простых случаях дает правильный порядок нижней критической длины волны возмущения, ведущего к неустойчивости (см., например, [22,24].

Линеаризованные основные дифференциальные уравнения (18)-(21) для случая чисто радиального сферически симметричного движения с учетом допущений, что невозмущенное состояние является равновесным $(u = u_0 + u',\ u_0 = 0)$ и что уравнение Пуассона (20) можно применить лишь к возмущениям плотности (условие $\psi_0 \cong 0$ называют иногда «мошенничеством» Джинса [18,19], имеют вид:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 u}{\partial r} = 0, \tag{34}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P'}{\partial r} - \frac{\rho'}{\rho_0^2}\frac{\partial P_0}{\partial r} - \frac{\partial \psi'}{\partial r}, \tag{35}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{P'}{P_0}\right) = \Gamma_{1,0}\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right), \tag{36}$$

$$\frac{\partial^2\psi'}{\partial r^2} = 4\pi G\rho'. \tag{37}$$

Здесь и далее индекс «0» относится к невозмущенным величинам.

Уравнение (36) тривиально интегрируется. Выбирая постоянную интегрирования так, чтобы $P' = 0$ при $\rho' = 0$, получим

$$P'/P_0) = \Gamma_{1,0}\,\rho'/\rho_0\,. \tag{38}$$

Допустим теперь, что характерная длина, связанная с пространственными изменениями величин P_0 и ρ_0, велика по сравнению с другими характерными длинами задачи (это так называемое приближение коротковолновой акустики), т.е. можно пренебречь производными $\partial P_0/\partial r$ и $\partial\rho_0/\partial r$. При этих дополнительных упрощающих предположениях уравнение неразрывности, импульса и энергии легко объединить в одно уравнение для адиабатической звуковой волны[v)] [56]

$$\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2} + v_{S,q}^2\frac{\partial^2\rho'}{\partial r^2} - 4\pi G\rho_0\rho' = 0\,. \tag{39}$$

Здесь возмущенная производная давления $\partial P'/\partial r$ выражается, согласно (38), через возмущенную производную плотности $\partial\rho'/\partial r$ в виде $\partial P'/\partial r = (\Gamma_{1,0}P_0/\rho_0)\partial\rho'/\partial r = v_{S,q}^2\partial\rho'/\partial r$, где

$$v_{S,q} \equiv \sqrt{\Gamma_{1,0}\frac{P_0}{\rho_0}} = \left\{\frac{p_{q0}}{\rho_0}\left[1 + (\Gamma_{3,0}-1)\frac{4-3\beta_0}{\beta_0}\right]\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\{\frac{1}{(\gamma_q - 1)D/2}\frac{k_B T_0}{m}\left[1 + \frac{(4-3\beta_0)^2(\gamma_q - 1)}{\beta_0^2 + 12\beta_0(\gamma_q - 1)(1-\beta_0)}\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{40}$$

− адиабатическая (или лапласова) скорость звука в неэкстенсивной радиационной гидродинамике. При написании (40) учтено, что

$$\frac{P_0}{\rho_0} = \frac{p_{q,0} + p_{rad,0}}{\rho_0} = \frac{1}{\beta_0}\frac{p_{q,0}}{\rho_0} = \frac{1}{\beta_0}\frac{1}{(\gamma_q - 1)D/2}\frac{k_B T_0}{m} = \frac{1}{\beta_0}\frac{1}{1+(1-q)D/2}\frac{k_B T_0}{m}\,. \tag{41}$$

[v)] Отметим, что при изучении возмущённых состояний самогравитирующего космического вещества часто приходится иметь дело с разновидностью звуковых волн.

В частном случае, когда $q=1$ и $D=3$, имеем $\gamma_1 \equiv 5/3$ (классический идеальный одноатомный газ). Тогда из (40) следует, что

$$v_{S,1} \equiv \left\{ \frac{k_B}{m} T_0 \left[1 + \frac{2(4-3\beta_0)^2}{3\beta_0(8-7\beta_0)} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{40*}$$

Если излучение также отсутствует, то $(v_{S,1})_{\beta_0=1} \equiv v_{gas,1} = \sqrt{\gamma_1 k_B T_0 / m}$ − адиабатическая скорость звука в идеальном газе.

В случае когда $q \neq 1$ (идеальный q-газ), а излучение отсутствует ($\beta_0 = 1$), будем иметь

$$(v_{S,q})_{\beta_0=1} = \left[\frac{k_B T_0}{m} \frac{2\gamma_q}{(\gamma_q - 1)D} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{k_B T_0}{m} \frac{2-q+2/D}{(1-q)D/2+1} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{40**}$$

Уравнение (39) является линейным и однородным уравнением в частных производных, следовательно, к нему применим метод нормальных колебаний (метод мод). Решая уравнения (39) для возмущенной плотности в виде $\rho' \sim \exp(-i\,\omega\, t + i\, \mathrm{k}\, r)$, описывающем волны с угловой частотой ω, волновым вектором k в направлении r [vi)] и длиной волны $\lambda_r = 2\pi / \mathrm{k}$, получим следующее дисперсионное уравнение для бегущей волны

$$\omega^2 - \mathrm{k}^2 \frac{p_{q,0}}{\rho_0} \left\{ 1 + \frac{\Gamma_{1,0} - \beta_0}{4 - 3\beta_0} \left(1 + 4\frac{1-\beta_0}{\beta_0} \right) \right\} + 4\pi G \rho_0 = 0, \tag{42}$$

которое с учетом соотношений (40) и (41) принимает «стандартный» вид

$$\omega^2 = \mathrm{k}^2 v_{S,q}^2 - 4\pi G \rho_0. \tag{42*}$$

Здесь адиабатическая скорость звука $v_{S,0}$ определяется формулой (40).

Для устойчивых волн с частотами ω имеем $\omega^2 > 0$, тогда как неустойчивость соответствует условию $\omega^2 < 0$. Эти два класса разделяет случай нейтральной устойчивости $\omega^2 = 0$, что соответствует модам с критической длиной волны возмущения

$$\lambda_{cr} = 2\pi / \mathrm{k}_{cr}, \quad \mathrm{k}_{cr}^2 = \omega_{cr}^2 / v_{Sq}^2, \quad \omega_{cr}^2 = 4\pi G \rho_0. \tag{43}$$

Из уравнения (42*) следует, что граничное значение $\mathrm{k} = \mathrm{k}_{cr}$ разделяет устойчивые $(\mathrm{k} > \mathrm{k}_{cr})$ и неустойчивые $(\mathrm{k} < \mathrm{k}_{cr})$ пульсации плотности. При малых k (длинные волны) пульсации будут расти со временем и появляется нестабильность Джинса, а коротковол-

---

[vi)] Следует заметить, что линеаризованное уравнение импульса требует, чтобы скорость $\mathbf{u}$ была параллельна волновому вектору $\pm\mathbf{k}$ [56]. Следовательно, скорости частиц жидкости, связанные с адиабатическими звуковыми волнами, параллельны направлению распространения волн.

новые пульсации плотности (большие k, малые длины волн) колеблются, т.е. распространяются в виде звуковых волн.

Таким образом, критическая длина волны возмущения

$$\lambda_{cr} = \frac{2\pi v_{Sq}}{\omega_{cr}} = \sqrt{\frac{\pi v_{Sq}^2}{G\rho_0}} \equiv \left\{ \frac{2\pi k_B T_0}{mG\rho_0 D} \left[\frac{1}{\gamma_q - 1} + \frac{(4-3\beta_0)^2}{\beta_0^2 + 12\beta_0(\gamma_q - 1)(1-\beta_0)} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{44}$$

является размером мельчайших «капель» рассматриваемой «фрактальной» газовой среды с излучением, которые могут удерживаться вместе собственным гравитационным притяжением. Следовательно, модифицированный в рамках неэкстенсивной кинетической теории критерий неустойчивости Джинса для смеси q-газа и чернотельной радиации будет выглядеть следующим образом: длина неустойчивой волны возмущения λ_r должна удовлетворять неравенству

$$\lambda_r \ge \lambda_{cr} = v_{Sq} \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}} \equiv \left\{ \frac{\pi k_B T_0}{mG\rho_0} \frac{2}{(\gamma_q - 1)D} \left[1 + \frac{(4-3\beta_0)^2(\gamma_q - 1)}{\beta_0^2 + 12\beta_0(\gamma_q - 1)(1-\beta_0)} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{45}$$

В традиционной литературе длину

$$\lambda_{\mathcal{J}} = \sqrt{\frac{\pi v_{gas}^2}{G\rho_0}} = \left(\gamma_1 \frac{\pi k_B T_0}{mG\rho_0} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{46}$$

соответствующую размеру области сжатия самогравитирующего идеального газа, называют длиной Джинса. С учетом (45) критерий неустойчивости Джинса в неэкстенсивной кинетике может быть переписан в виде:

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_{\mathcal{J}}} \ge \frac{v_{Sq}}{v_{gas}} = \left\{ \frac{1}{\gamma_1} \frac{2}{(\gamma_q - 1)D} \left[1 + \frac{(4-3\beta_0)^2(\gamma_q - 1)}{\beta_0^2 + 12\beta_0(\gamma_q - 1)(1-\beta_0)} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{\gamma_1} \frac{2/D}{(1-q+2/D)} \left[1 + \frac{(4-3\beta_0)^2(1-q+2/D)}{\beta_0^2 + 12\beta_0(1-q+2/D)(1-\beta_0)} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \equiv \Xi_q. \tag{45*}$$

Отсюда следует:

1. Если $q = 1$ (при этом $\gamma_1 = 1 + 2/D$), то фактор

$$\Xi_1 \equiv \left[\frac{1}{\gamma_1} \left(1 + \frac{(4-3\beta_0)^2 2/D}{\beta_0^2 + 24\beta_0(1-\beta_0)/D} \right) \right]^{\frac{1}{2}} > 1. \tag{47}$$

Следовательно, критическая длина волны возмущения λ_r в рассматриваемом случае больше джинсовской длины волны $\lambda_{\mathcal{J}}$, т.е. благодаря давлению излучения облачная среда стабилизируется, причем равенство соответствует предельной устойчивости.

2. Если $q \neq 1$, но излучение отсутствует $\beta_0 = 1$, то фактор

$$\Xi_q = \left[\frac{1}{\gamma_1}\left(2/D + \frac{2/D}{1-q+2/D}\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \quad 0 < q < 1 + 2/D. \tag{48}$$

В этом случае критерий гравитационной неустойчивости зависит от численных значений индекса энтропийной деформации q и размерности пространства скоростей D. При этом возможна ситуация, при которой гравитационно-устойчивое (на основе классической статистики Больцмана−Гиббса) облако газа, будет неустойчивым согласно неэкстенсивной статистики Тсаллиса [14,15].

Связанная с λ_{cr} критическая масса (масса, содержащаяся внутри сферы диаметром λ_{cr}) определяется соотношением

$$\mathcal{M}_{cr} = (\pi/6)\rho_0\lambda_{cr}^3 = \mathcal{M}_{\mathcal{J}}\,\Xi^3, \tag{49}$$

где

$$\mathcal{M}_{\mathcal{J}} \equiv (\pi/6)\rho_0\lambda_{\mathcal{J}}^3 = (\pi/6)\rho_0\left(\frac{\gamma_1\pi k_B T_0}{mG\rho_0}\right)^{3/2} \tag{50}$$

− критическая масса Джинса. Возмущения с массой $\mathcal{M}_r$, превышающей критическую массу Джинса $\mathcal{M}_{\mathcal{J}}$ $(\Xi > 1)$ могут расти, формируя гравитационно-ограниченные структуры, в то время как возмущения с массой $\mathcal{M}_r$ меньше $\mathcal{M}_{\mathcal{J}}$ не растут и ведут себя как акустические волны. При этом для самогравитирующих неэкстенсивных сред с излучением критические значения длины волны и массы явно зависят от энтропийного индекса q, размерности пространства скоростей D и коэффициента β, которые, являясь свободными параметрами, должны определяться в каждом конкретном случае эмпирическим путем из экспериментальных данных. Это позволяет при исследовании неустойчивости самогравитирующих космических объектов в рамках неэкстенсивной статистики более обосновано моделировать реально складывающуюся ситуацию.

Заметим, что дальнейшее развитие предложенного здесь подхода может быть связано с учетом влияния на джинсовскую неустойчивость вращения среды, магнитного поля, вязкости и других диссипативных эффектов.

4. ГРАВИТАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ПЛАЗМЕННОГО ОБЛАКА С ЧЁРНОТЕЛЬНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

Поскольку вращение космогонических плазменных объектов является весьма распространенным феноменом во Вселенной, возникает вопрос: как эти факторы действует на джинсовскую неустойчивость? В связи с этим рассмотрим в упрощенной постановке проблему влияния силы Кориолиса на гравитационную неустойчивость неэкстенсивной среды допланетного плазменного облака с излучением. Исходные бездиссипативные уравнения в этом случае состоят из следующих уравнений: уравнений Эйлера в q-гидродинамике, уравнения Пуассона и уравнения магнитной индукции:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{u})=0\,, \tag{51}$$

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}=-\frac{\nabla P}{\rho}+2\mathbf{u}\times\mathbf{\Omega}+\frac{1}{\rho c}\mathbf{j}\times\boldsymbol{\mathcal{B}}-\nabla\psi\,, \tag{52}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla T=(\Gamma_3-1)\frac{T}{\rho}\left\{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\rho\right\}, \tag{53}$$

$$\nabla^2\psi=4\pi G\rho\,, \tag{54}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t}=\nabla\times(\mathbf{u}\times\boldsymbol{\mathcal{B}}),\quad \nabla\cdot\boldsymbol{\mathcal{B}}=0\,. \tag{55}$$

Здесь $\mathbf{\Omega}=\Omega_x\mathbf{i}_x+\Omega_z\mathbf{i}_z$; $\boldsymbol{\mathcal{B}}=\boldsymbol{\mathcal{B}}_0\equiv\mathcal{B}_0\mathbf{i}_z$ − магнитное поле; c − скорость света; $\mathbf{j}=\dfrac{c}{4\pi}\nabla\times\boldsymbol{\mathcal{B}}$ − сила тока; $\Gamma_3=1+\dfrac{(4-3\beta)(\gamma_q-1)}{\beta+12(\gamma_q-1)(1-\beta)}$ − адиабатический показатель смеси вещества и чёрнотельного излучения; $\gamma_q\equiv\gamma_{gas}=c_{pq}/c_{vq}=\left(2\dfrac{D+1}{D}-q\right)$ − показатель адиабаты газового вещества диска.

Для изучения малых возмущений линеаризуем систему (51)-(55). Для этого представим входящие в эту систему переменные в виде сумм равновесных и возмущенных величин. В предположении, что для невозмущенного облака состояние его среды является однородным и равновесным $(\mathbf{u}=\mathbf{u}_0+\mathbf{u}',\ \mathbf{u}_0=0)$ и что уравнение Пуассона (65) можно применять только к возмущениям плотности, линеаризованные уравнения (51)-(55) принимают вид:

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\rho_0\nabla\cdot\mathbf{u}'=0\,, \tag{56}$$

$$\frac{\partial\mathbf{u}'}{\partial t}-2\mathbf{u}'\times\mathbf{\Omega}+\frac{\beta_0P_0}{\rho_0}\left\{\nabla\left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right)+\frac{4-3\beta_0}{\beta_0}\nabla\left(\frac{T'}{T_0}\right)\right\}+\frac{1}{4\pi\rho_0}\boldsymbol{\mathcal{B}}_0\times(\nabla\times\boldsymbol{\mathcal{B}}')+\nabla\psi'=0\,, \tag{57}$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t}-(\Gamma_{3,0}-1)\frac{T_0}{\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial t}=0\,, \tag{58}$$

$$\nabla^2\psi'-4\pi G\rho'=0\,, \tag{59}$$

$$\frac{\partial\mathcal{B}'}{\partial t}-\nabla\times(\mathbf{u}'\times\mathcal{B}_0)=0\,,\quad \nabla\cdot\mathcal{B}'=0\,. \tag{60}$$

Здесь $v_{S,q}=\left\{\frac{p_{q0}}{\rho_0}\left[\frac{4-3\beta_0}{\beta_0}(\Gamma_{3,0}-1)+1\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$ − адиабатическая скорость звука в неэкстенсивной газовой среде с излучением; $\frac{\beta_0 P_0}{\rho_0}=\frac{k_B}{m_0}\frac{T_0}{1+(1-q)D/2}$; $2\mathbf{u}'\times\mathbf{\Omega}=\{2u_y\Omega,-2u'_x\Omega\,,\,0\}$. Величины $\rho_0, T_0, P_0, \mathbf{u}_0$, $\mathcal{B}_0$ и β_0 описывают некоторое стационарное решение системы (56)-(60), а величины ρ', T', $\mathbf{u}'$, $\mathcal{B}'$ и ψ' − суть малые возмущения магнито-гидродинамических параметров, слабо нарушающих невозмущенное состояние.

В результате объединения уравнений (57) и (58) будем иметь

$$\frac{\partial\mathbf{u}'}{\partial t}-2\mathbf{u}'\times\mathbf{\Omega}+v_{S,q}^2\nabla\rho'+\nabla\psi'+\frac{1}{4\pi\rho_0}\mathcal{B}_0\times(\nabla\times\mathcal{B}')=0\,. \tag{61}$$

Система уравнений (56), (59)-(61) описывает развитие малых адиабатических возмущений во фрактальной плазменной среде с излучением на фоне основного решения в пространстве и во времени. Она является системой линейных и однородных уравнений в частных производных, следовательно, к ней применим метод нормальных колебаний (метод мод). Предполагая далее цилиндрическую симметрию движения $\mathbf{u}'(=\mathbf{i}_x u'_x+\mathbf{i}_z u'_z)$[vii], а также что возмущенные параметры $\rho', \mathbf{u}', \psi'$ и $\mathcal{B}'$, эволюционируют по закону $\sim\exp(-i\,\omega t+i\,\mathrm{k}_x\,x+i\,\mathrm{k}_z\,z)$, где ω — частота гармонических колебаний (в общем случае комплексная величина), а $|\mathbf{k}|=\sqrt{\mathrm{k}_x^2+\mathrm{k}_z^2}$ — волновое число, в результате получим:

$$-\omega\rho'+\rho_0\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}'=0\,, \tag{73}$$

[vii] Известно, что проблему устойчивости самогравитирующего газового облака в принципе нельзя описывать в рамках двумерного приближения, поскольку оно заведомо является сильно неустойчивым (см., например, [24]). Однако при наличие сильного внешнего гравитационного поля с цилиндрической геометрией и с образующей вдоль оси вращения облака, возможно обеспечить его устойчивость в случае, когда угловая скорость вращения достаточно велика. В этом случае структура допланетного облака вдоль оси вращения будет определяться исключительно его самогравитацией. Разумеется, этот случай искусственный, поскольку в реальных астрофизических системах такие цилиндрические поля если и встречаются, то без вложенных дисков. Вместе с тем, рассмотрение такого вложенного в цилиндр самогравитирующего газового диска представляет определённый математический интерес, поскольку только в этом случае можно выделить эффекты, к которым приводит самогравитация в чистом виде. Именно такие модели рассматривались в большинстве классических работ по астрофизическим дискам (см., например, [27,28,57].

$$-\omega\rho_0\mathbf{u}' + i2\mathbf{u}'\times\mathbf{\Omega} + v_{S,0}^2\rho'\mathbf{k} - \rho_0\mathbf{k}\psi' + \frac{\mathcal{B}_0}{4\pi}\left[\mathbf{i}_x(\mathrm{k}_x\mathcal{B}_z' - \mathrm{k}_z\mathcal{B}_x') - \mathbf{i}_y\mathrm{k}_z\mathcal{B}_y'\right] = 0 \qquad (74)$$

$$|\mathbf{k}|^2\psi' - 4\pi G\rho' = 0, \qquad (75)$$

$$-\omega\mathcal{B}_x' - \mathcal{B}_0 k_z u_x' = 0, \quad -\omega\mathcal{B}_y' - \mathcal{B}_0 k_z u_y' = 0, \quad -\omega\mathcal{B}_z' + \mathcal{B}_0 k_x u_x' = 0, \quad k_x\mathcal{B}_x' + k_z\mathcal{B}_z' = 0. \qquad (76)$$

Система уравнений (73)-(76) является исходной для дальнейшего анализа динамики малых возмущений в модели вращающегося плазменного облака с радиацией.

Дисперсионные уравнения в изэнтропическом плазменном облаке. Условие существования нетривиальных решений системы (73)-(76) приводит к следующему дисперсионному уравнению 6-го порядка относительно комплексной величины $\omega(\mathbf{k})$:

$$\omega^6 - \omega^4\left[4|\mathbf{\Omega}|^2 + v_{\mathcal{A}}^2\left(|\mathbf{k}|^2 + \mathrm{k}_z^2\right) + \left(v_{S,0}^2|\mathbf{k}|^2 - 4\pi G\rho_0\right)\right] + \omega^2\left\{\frac{4}{|\mathbf{k}|^2}\left(v_{S,0}^2|\mathbf{k}|^2 - 4\pi G\rho_0\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\Omega_x\mathrm{k}_x^2 + \Omega_z\mathrm{k}_z^2\right)^2 + v_{\mathcal{A}}^2\mathrm{k}_z^2\left[v_{\mathcal{A}}^2|\mathbf{k}|^2 + 2\left(v_{S,0}^2|\mathbf{k}|^2 - 4\pi G\rho_0\right)\right]\right\} -$$

$$-v_{\mathcal{A}}^4\mathrm{k}_z^4\left(v_{S,0}^2|\mathbf{k}|^2 - 4\pi G\rho_0\right) = 0, \qquad (77)$$

где $v_{\mathcal{A}} = \mathcal{B}_0/\sqrt{4\pi\rho_0}$ – альфвеновская (магнитогидродинамическая) скорость волн, обусловленных квазиупругим натяжением магнитных силовых линий.

Методом Кардана возможно получение точного решения этого алгебраического уравнения (кубического относительно величины $n = \omega^2$). Однако это решение, к сожалению, не приводит к наглядным формулам для различных показателей роста. Вместе с тем качественный анализ системы уравнений (73)-(76) возможен на основе рациональной аппроксимации отдельных их членов.

Исключая с этой целью из системы уравнений (73)-(76) возмущенные параметры ρ', ψ' и $\mathcal{B}'$, в результате получим следующее алгебраическое соотношение

$$\omega^2\mathbf{u}' - i2\omega\mathbf{u}'\times\mathbf{\Omega} - v_{S,0}^2\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}') + 4\pi G\rho_0\mathbf{k}\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}'}{|\mathbf{k}|^2} - v_{\mathcal{A}}^2|\mathbf{k}|^2(\mathbf{u}' - \mathbf{i}_z u_z') = 0. \qquad (78)$$

При использовании векторного тождества $\mathbf{u}' = \dfrac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}')}{|\mathbf{k}|^2} + \dfrac{1}{|\mathbf{k}|^2}\mathbf{k}\times(\mathbf{u}'\times\mathbf{k})$ [58], принимающего для продольных звуковых волн в жидкости следующий вид $\mathbf{u}' = \mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}')/|\mathbf{k}|^{-2}$ (см. сноску «VI»), соотношение (77) можно переписать следующим образом:

$$\omega^2\mathbf{u}' - i\,\omega 2\rho_0^{-1}(\mathbf{u}'\times\mathbf{\Omega}) - |\mathbf{k}|^2 v_{S,q}^2\mathbf{u}' + 4\pi G\rho_0\mathbf{u}' - v_{\mathcal{A}}^2|\mathbf{k}|^2(\mathbf{u}' - \mathbf{i}_z u_z') = 0. \qquad (78^*)$$

Проанализируем теперь это уравнение.

1. Рассмотрим сначала случай самогравитирующего незаряженного газового облака. Тогда

$$\omega^2\mathbf{u}'-|\mathbf{k}|^2 V_{S,q}^2\mathbf{u}'+4\pi G\rho_0\mathbf{u}'=i\,\omega 2(\mathbf{u}'\times\mathbf{\Omega}). \tag{79}$$

При скалярном умножении этого соотношения на возмущенную скорость $\mathbf{u}'$ получим дисперсионное соотношение для звуковых волн во вращающемся облаке

$$\omega^2-|\mathbf{k}|^2 V_{S,q}^2+4\pi G\rho_0=0\ , \tag{80}$$

из которого следует, что кориолисова сила не преодолевает стабилизирующего эффекта излучения для вращающегося облака, поскольку в этом случае справедлив рассмотренный выше критерий неустойчивости Джинса (42^*) для самогравитирующего газового облака с излучением.

Если волна возмущения распространяется в плоскости xz перпендикулярно направлению оси вращения облака $\mathbf{\Omega}=\mathbf{i}_z\Omega$, то из (79) следует алгебраическое соотношение:

$$|\mathbf{u}'|^2(\omega^2-|\mathbf{k}|^2 V_{S,q}^2+4\pi G\rho_0)^2=-4\omega^2(\mathbf{u}'\times\mathbf{\Omega})\cdot(\mathbf{u}'\times\mathbf{\Omega})=4\omega^2|\mathbf{u}'|^2|\mathbf{\Omega}|^2, \tag{81}$$

записанное здесь с использованием условия $\mathbf{u}'\cdot\mathbf{\Omega}=0$ и формулы векторной алгебры $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2-\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$ [58]. Из (81) вытекает следующее дисперсионное уравнение

$$\omega^4+2\omega^2(4\pi G\rho_0-|\mathbf{k}|^2 V_{S,q}^2-2\Omega^2)+(4\pi G\rho_0-|\mathbf{k}|^2 V_{S,q}^2)^2=0, \tag{82}$$

Пусть ω_1^2 и ω_2^2 − корни уравнения (82); тогда

$$\omega_1^2+\omega_2^2=-2(-|\mathbf{k}|^2 V_{S,q}^2+4\pi G\rho_0-2\Omega^2),\qquad \omega_1^2\omega_2^2=(|\mathbf{k}|^2 V_{S,q}^2-4\pi G\rho_0)^2. \tag{83}$$

Отсюда следует, что условие неустойчивости облака $\omega_{1,2}^2<0$ для совокупности волн возмущения имеет вид

$$V_{S,q}^2|\mathbf{k}|^2<4\pi G\rho_0-2\Omega^2. \tag{84}$$

В этом случае критическая длина волны возмущения $\lambda_{cr}=2\pi/\mathrm{k}_{cr}$ и критическое волновое число $\mathrm{k}_{cr}=|\mathbf{k}|_{cr}$, разделяющее устойчивые $(\mathrm{k}_r>\mathrm{k}_{cr})$ и неустойчивые $(\mathrm{k}_r<\mathrm{k}_{cr})$ возмущенные волны, определяются соотношениями

$$|\mathbf{k}|_{cr}=\frac{1}{V_{S,q}}\left(4\pi G\rho_0-2\Omega^2\right)^{1/2}=2\left(\frac{\pi G\rho_0}{V_{S,q}^2}\right)^{1/2}\left(1-\frac{\Omega^2}{2\pi G\rho_0}\right)^{1/2}, \tag{85}$$

$$\lambda_{cr}=\frac{2\pi}{|\mathbf{k}|_{cr}}=\sqrt{\frac{\pi V_{S,q}^2}{G\rho_0}}\left(1-\frac{\Omega^2}{2\pi G\rho_0}\right)^{-1/2}. \tag{86}$$

Следует иметь в виду, что критерий (84) имеет смысл только в случае, если выполняется условие $\Omega^2 / 2\pi G\rho_0 < 1$ (условие устойчивости вращающегося облака по Тумре [57]).

Таким образом, для критерия джинсовской неустойчивости вращающегося газового облака с учетом излучения для волн возмущения распространяющихся в направлении перпендикулярном направлению оси вращения облака, получим следующее представление:

$$\lambda_r > \lambda_{cr} = v_{S,q}\sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}}\left(1-\frac{\Omega^2}{2\pi G\rho_0}\right)^{-1/2} = v_{S,q}\sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}}\left(1-\frac{\Omega^2}{2\pi G\rho_0}\right)^{-1/2}, \qquad (87)$$

которое, с учетом формулы (46) для длины Джинса, может быть записано в виде

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_J} > \frac{v_{S,q}}{v_{gas}}\left(1-\frac{\Omega^2}{2\pi G\rho_0}\right)^{-1/2} =$$

$$= \left\{\frac{1}{\gamma_1}\frac{1}{(\gamma_q-1)D/2}\left[1+\frac{(4-3\beta_0)^2(\gamma_q-1)}{\beta_0^2+12\beta_0(\gamma_q-1)(1-\beta_0)}\right]\right\}^{1/2}\left(1-\frac{\Omega^2}{2\pi G\rho_0}\right)^{-1/2}. \qquad (88)$$

2. Пусть теперь вращение плазменного облака отсутствует. Тогда из (77) следует

$$\omega^2\mathbf{u}' - v_{S,0}^2|\mathbf{k}|^2\frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}')}{|\mathbf{k}|^2} + 4\pi G\rho_0\frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}')}{|\mathbf{k}|^2} - v_{\mathcal{A}}^2|\mathbf{k}|^2(\mathbf{u}'-\mathbf{i}_z u_z') = 0, \qquad (89)$$

Рассмотрим два простых случая:

a). Для поперечного распространения волн возмущения (когда $\mathrm{k}_x = \mathrm{k}$, $u_z' = 0$) уравнение (89) сводится к простому дисперсионному соотношению (сравни с (42^*))

$$\omega^2 - v_{\mathcal{A}}^2\,\mathrm{k}_x^2 - v_{S,0}^2\,\mathrm{k}_x^2 + 4\pi G\rho_0 = 0, \qquad (90)$$

для которого, с учётом (42^*), критерий гравитационной неустойчивости самогравитирующей плазмы с магнитным полем и радиационным давлением принимает вид:

$$\mathrm{k}_x^2\left\{v_{\mathcal{A}}^2 + \frac{1}{(\gamma_q-1)D/2}\frac{k_B T_0}{m}\left[1+\frac{(4-3\beta_0)^2(\gamma_q-1)}{\beta_0^2+12\beta_0(\gamma_q-1)(1-\beta_0)}\right]\right\} > 4\pi G\rho_0. \qquad (91)$$

b). В случае продольного (к направлению магнитного поля) распространения пульсационных волн (для которых $\mathrm{k}_z = \mathrm{k}$, $\mathrm{k}_x = 0$) уравнение (89) записывается следующим образом:

$$\omega^2\mathbf{u}' - v_{S,0}^2(\mathrm{k}_z^2 u_z')\mathbf{i}_z + 4\pi G\rho_0 u_z'\mathbf{i}_z + v_{\mathcal{A}}^2\,\mathrm{k}_z^2(\mathbf{u}'-\mathbf{i}_z u_z') = 0. \qquad (92)$$

Отсюда для волны возмущения, направленной вдоль направления вектора магнитного поля $(\mathbf{u}' = \mathbf{i}_z u_z')$, получим дисперсионное соотношение

$$\omega^2 - v_{S,0}^2\,\mathrm{k}_z^2 + 4\pi G\rho_0 = 0. \qquad (93)$$

Если $u_z' = 0$, то из (92) следует

$$\omega^2 - v_{\mathcal{A}}^2 \mathrm{k}_z^2 = 0 . \tag{93}$$

Таким образом, в поперечном режиме распространения волны возмущения критерий неустойчивости Джинса для плазмы модифицируется магнитным полем и радиационным давлением. В случае продольного режима магнитное поле не влияет на джинсовский критерий, поскольку этот режим обеспечивает Альфвен-режим движения отдельно от гравитационного режима.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Имея в виду большое космогоническое значение проблемы гравитационной неустойчивости, в представленной работе в рамках неэкстенсивной кинетики исследовано влияние неэкстенсивности среды на критерий гравитационной неустойчивости Джинса для самогравитирующего допланетного облака, вещество которого состоит из смеси идеального q-газа и чёрнотельного излучения. Выведены дисперсионные уравнения, на основе которых выполнен анализ осесимметричных колебаний космических самогравитирующих объектов с излучением и размерностью пространства скоростей. Для неэкстенсивных сред получены модифицированные критерии гравитационной неустойчивости Джинса как для бесконечной покоящейся сферически однородной среды, состоящей из идеального q-газа и излучения, так и для бездиссипативной намагниченной плазмы с учётом вращения и радиационного давления.

Рассмотренный здесь подход к описанию в рамках неэкстенсивной кинетики эволюции относительно простых (модельных) астрофизических объектов может быть распространён на более реалистичные физические ситуации, связанные, в частности, с учетом динамики возмущений в неоднородных и неизотропных дисковых фрактальных средах, с исследованием гравитационных возмущений диссипативных дисков, с исследованием собственных частот колебаний вертикально неоднородных магнитных дисков и т.п. (см.[24]). Это позволяет более обоснованно моделировать реальные астрофизических газо-пылевые структуры и находить соответствующие критерии их гравитационной неустойчивости.

Поскольку физический смысл и численные значения индекса энтропийной деформации q играют существенную роль в понимании эволюции многих аномальных астрофизических объектов, то проблема их определения представляется чрезвычайно важной. К сожалению, эта проблема всё ещё остаётся открытой. Вместе с тем, в настоящее время имеются серьёзные успехи в современной гелиосейсмологии, которая надёжно исследует внутреннюю структуру и динамику Солнца [59]. В солнечной атмосфере установлены и изучены миллионы резонансных мод колебаний. Их частоты измерены с достаточно большой точностью, что позволяет исследовать внутреннюю структуру Солнца на больших глубинах [60]. Эти результаты позволяют решить не только некоторые известные проблемы космологии, но и поднимают ряд теоретических вопросов, ответы на которые необходимы для понимания того, как на самом деле эволюционирует обычная звезда. В частности, гелиосейсмология позволяет, вообще говоря, найти экспериментальные доказательства присутствия неэкстенсивных эффектов в недрах звезды по определяемым скоростям звука. Следовательно, есть уверенность, что в самое ближайшее время можно будет получить астрономические данные по численным значениям параметра q, отличным от единицы.

REFERENCES

[1] C. Tsallis, "Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs-Statistics", *J. Stat. Phys.*, **52**(1-2), 479-487 (1988).

[2] C. Tsallis, "Nonextensive Statistic: Theoretical, Experimental and Computational Evi-dences and Connections", *Brazilian J. Phys.*, **29**(1), 1-35 (1999).

[3] C. Tsallis, *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. Approaching a Complex World.* New York: Springer. (2009).

[4] E.M.F. Curado, C. Tsallis. "Generalized statistical mechanics: connection with thermodynamics", *J. Physica. A.*, **24**, L69-72 (1991).

[5] C. Tsallis, R.S. Mendes, A.R. Plastino,"The role of constraints within generalized Nonextensive statistics", *J. Physica A.*, **261**, 534-554 (1998).

[6] A.V. Kolesnichenko, "Modifikatsiya v ramkakh statistiki Tsallisa kriteriev gravitatsionnoy neustoychivosti astrofizicheskikh diskov s frartal'noy strukturoy fazovogo prosranstva", *Mathematica Montisnigri*, **32**, 93-118 (2015).

[7] A.V. Kolesnichenko, "Kriteriy termicheskoy ustoychivosti i zakon raspredeleniy chastits dlya samogravitiruyushchikh astrofizicheskikh system v ramkakh statistiki Tsallisa", *Mathematica Montisnigri*, **37**, 45-75 (2016).

[8] A.V. Kolesnichenko, "Power distributions for self-gravitating astrophysical systems based on nonextensive Tsallis kinetics", *Solar System Research*, **51**(2), 127-144 (2017).

[9] A.V. Kolesnichenko, "Dvukhparametricheskiy entropiynyy funktsional Sharma-Mittala kak osnova semeystva obobshchyenykh termodinamik neekstensivnykh system", *Mathematica Montisnigri*, **42**, 74-101 (2018).

[10] A.V. Kolesnichenko, *Statisticheskaya mekhanika i termodinamika Tsallisa neadditivnykh system: Vvedenie v teoriyu i prilozheniya*. Moskow: LENAND. (Sinergetika ot proshlogo k budushchemu. № 87), (2019).

[11] A.V. Kolesnichenko, "K postroeniyu neadditivnoy termodinamiki slozhnykh sistem na osnove statistiki Kurado−Tsallisa", *Keldysh Institute Preprints*, **25**, 1-40 (2018).

[12] A.V. Kolesnichenko, B.N. Chetverushkin, "Kinetic derivation of a quasi-hydrodinamic system of equations on the base of nonextensive statistics", *RJNAMM (Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*), **28**(6), 547-576 (2013).

[13] A.V. Kolesnichenko, M.Ya. Marov, "Modeling of aggregation of fractal dust clusters in a laminar protoplanetary disk", *Solar System Research*, **47**(2), 80-98 (2013).

[14] A.V. Kolesnichenko, M.Ya. Marov, "Modification of the jeans instability criterion for fractal-structure astrophysical objects in the framework of nonextensive statistics", *Solar System Research*, **48** (5), 354-365 (2014).

[15] A.V. Kolesnichenko, M.Ya. Marov, "Modification of the Jeans and Toomre instability criteria for astrophysical fractal objects within nonextensive statistics", *Solar System Research*, **50**(4), 251-261 (2016).

[16] A.V. Kolesnichenko, M.Ya. Marov, "Renyi Thermodynamics as a Mandatory Basis to Model the Evolution of a Protoplanetary Gas−Dust Disk with a Fractal Structure", *Solar System Research*, **53**(6), 443-461 (2019).

[17] Nonextensive statistical mechanics and thermodynamics: *Full bibliography/ http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm*. (accessed 12 February 2020).

[18] J.H. Jeans, "The stability of a spherical nebula", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*. Containing Papers of a Mathematical or Physical Character. **199**, 1-53 (1902).

[19] J.H. Jeans, *Astronomy and Cosmogony*, Cambridge Univ. Press. (2009).

[20] S. Chandrasekkhar, *Vvedeniye v ucheniye o stroyenii zvezd*. M.: Izdatelystvo Inost. Liter. (1950).

[21] S. Chandrasekkhar, “O zvezdakh, ikh evolyutsii i ustoychivosti “, *UFN*. **145**(3), 489-506 (1985).
[22] V.S. Safronov, *Evolyutsiya doplanetnogo oblaka i obrazovaniye Zemli i planet*, M.: Nauka. (1969).
[23] N.N. Gor'kavyy, A.M. Fridman, *Fizika planetnykh kolets*. M.: Nauka. (1994).
[24] A.M. Fridman, A.V. Khoperskov, *Fizika galakticheskikh diskov*. M.: Fizmatlit. (2011).
[25] S. Chandrasekhar, E. Fermi, “Problems of gravitational stability in the Presence of a magnetic field”, *Astrophysical Journal*, **118**, 116-141 (1953).
[26] W. B. Bonnor, “Jeans' Formula for Gravitational Instability”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **117**(1), 104-117 (1957).
[27] C. Hunter, “Self-gravitating gaseous disks”, *Ann. Rev. Fluid Mech*., **4**. 219-242 (1972).
[28] P. Goldreich, D. I. Lynden-Bell, “Gravatational stability of uniformly rotating disks”, *MNRAS*, **130**, 97-124 (1965).
[29] C. Low, D. Lynden-Bell, “The minimum Jeans mass or when fragmentation must stop”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society,* **176**(2), 367-390 (1976).
[30] N.I. Shakura, R.A. Sunyaev, “A theory of the instability of disk accretion onto black holes and the variability of binary X-ray sources, galactic nuclei and quasars”, *Mon.Not.RAS, astr.Soc.*, **175**, 613-632 (1976).
[31] M. Camenzind, F. Demole, N. Straumann, “The stability of radiation–pressure–dominated accretion discs”, *Astron. Astrophys*., **158**, 212-216 (1986).
[32] V.M. Cadez, “Applicability problem of Jeans criterion to a stationary self-gravitating cloud”, Astron. Astrophys., **235**, 242-244 (1990).
[33] B.P. Pandey, K. Avinash, “Jeans instability of a dusty plasma”, *Physical Review E* (*Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics*), **49**(6), 5599-5606 (1994).
[34] J. M. Owen, J. Villumsen, V. Baryons, “Dark Matter, and the Jeans Mass in Simulations of Cosmological Structure Formation”, *J. Astroph*., **481**(1), 1-21 (1997).
[35] D. Tsiklauri, “Jeans Instability of Interstellar Gas Clouds in the Background of Weakly Interacting Massive Particles”, *J. Astroph*., **507**(1), 226-228 (1998).
[36] R. L. Mace, V. Frank, M. A. Hellberg, “Jeans stability of dusty space plasmas”, *Physics Letters A*., **237**, 146-151 (1998).
[37] J.A. S. Lima, R. Silva, J. Santos, “Jeans' gravitational instability and nonextensive kinetic theory”, *Astronomy and Astrophysics*. **396**, 309-313 (2002).
[38] S. A. Trigger, A. I. Ershkovich, G. J. F. van Heijst, P. P. J. M. Schram, “Kinetic theory of Jeans instability”, *Phys. Rev. E*., **69**, 066403 -066405 (2004).
[39] M. Sakagami, A.Taruya, “Self-gravitating stellar systems and non-extensive thermostatistics”, *Continuum Mechanics and Thermodynamics,* **16** (3), 279-292 (2004).
[40] P. K. Shukla, L. Stenflo, “Jeans instability in a self-gravitating dusty plasma”, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **462**, 403-407 (2006).
[41] N. L. Tsintsadze , R. Chaudhary, H. A. Shah, G.Murtaza, “Jeans instability in a magneto-radiative dusty plasma”, *Journal of Plasma Physics*., **74**(6), 847-853 (2008).
[42] A.E. Radwan, “Variable streams self-gravitating instability of radiating rotating gas cloud”, *Applied mathematics and computation*,. **148**, 331-339 (2004).
[43] V.M. Cadez, “Instabilities in stratified magnetized Stellar atmospheres”, *Publ. Astron. Obs. Belgrade*., **90**, 121-124 (2010).
[44] J.S. Dhiman, R. Dadwal, “On the Jeans Criterion of a Stratified Heat Conducting Gaseous Medium in the Presence of Non-uniform Rotation and Magnetic Field”, *Journal of Astrophysics and Astronomy*, **33**(4), 363-373 (2012).
[45] A.M. Fridman, V.L. Polyachenko, *Physics of gravitating system. V.1-2*. - N.Y.: Springer-Verlag. 1984.

[46] A.M. Fridman, V.L. Polyachenko, *Physics of Gravitating Systems I: Equilibrium and Stability*. Springer Science & Business Media. (2012).

[47] S. Kaothekar, R.K. Chhajlani, "Jeans Instability Of Self Gravitating Partially Ionized Hall Plasma With Radiative Heat Loss Functions And Porosity", *AIP Conference Proceedings*, **1536**(1), 1288-1289 (2013)**.**

[48] H. Joshi, R. K. Pensia, "Effect of rotation on Jeans instability of magnetized radiative quantum plasma", *Physics of plasmas*,. **24,** 032113-1−032113-8 (2017).

[49] R. K. Pensia, D. L. Sutar, S. Sharma, "Analysis of Jeans Instability of Optically Thick Quantum Plasma under the Effect of Modified Ohms law", *2nd International Conference on Condensed Matter and Applied Physics* (*ICC 2017*).*AIP Conf. Proc.*, 1**953**(1), 060044-1–060044-4 (2018).

[50] V. Kumar, D. L. Sutar, Pensia, S. Sharma, "Effect of fine dust particles and finite electron inertia of rotating magnetized plasma", *2nd International Conference on Condensed Matter and Applied Physics (ICC 2017).AIP Conf. Proc.*, **1953**(1), 060036-1–060036-4 (2018).

[51] B. M. Boghosian, "Navier-Storts Equations for Generalized Thermostatistics", *Bras. J. Phys*., **29**(1), 91-107 (1999).

[52] D.S. Oliveira, R. M. O. Galvao, "Transport equations in magnetized plasmas for non-Maxwellian distribution functions", *Physics of plasmas,* **25,** 102308-1─102308-13 (2018).

[53] M.R. McKee, "The radial-azimuthal stability of accretion disks around black holes", *Astron. Astrophys*, **235**, 521-525 (1990).

[54] A.V. Khopepskov, S.S. KHpapov, "Heustoychivost' zvukovykh voln v tonkom gazovom diske", *Pis'ma v AZH*., **21**, 388-393 (1995).

[55] A. S. Eddington, *The Internal Constitution of the Stars*. Cambridge. England: Cambridge University Press. (1988).

[56] L.D. Landau, Ye.M. Lifshits, *Statisticheskaya fizika*. CH. I. M.: Nauka. (1976).

[57] A. Toomre, "On the gravitational stability of a disk of stars", *J. Astroph*., **139**, 1217-1238 (1964).

[58] N.Ye. Kochin, *Vektornoye ischisleniye i nachala tenzornogo ischisleniya*. M.: Izd-vo Akad. Nauk SSSR. (1961).

[59] D.O. Gough, "Heliophysics Gleaned from Seismology", *Progress in solar/stellar Physics with Helio- and Asteroseismology, Proc. 65th Fujihara Seminar, Astron. Soc. Pacific Conf. Ser*., **462,** 429-454 (2011).

[60] D. O. Gough, B. Hindman, "Helioseismic Detection of Deep Meridional Flow", *J. Astroph*., **714**(1), 960-970 (2010).

Received December 1, 2019