MATHEMATICA MONTISNIGRI
Vol XLV (2019)

О НЕКОТОРЫХ ГРАНИЧНЫХ СВОЙСТВАХ И ТЕОРЕМАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С. Л. БЕРБЕРЯН

Российско-Армянский (Славянский) университет

Ереван, Армения

E-mail: samvel357@mail.ru

DOI: 10.20948/mathmontis-2019-45-2

Ключевые слова: Субгармонические, логарифмически-субгармонические функции, неевклидовое расстояние, угловой предел, подчиненные функции

Аннотация. В статье рассматривается при определенных условиях вопрос ограниченности предельных множеств субгармонических функций в произвольных точках единичной окружности и теоремы единственности для логарифмически-субгармонических функций. Подобного типа задачи ранее рассматривались в основном для мероморфных и голоморфных функций.

ON SOME BOUNDARY PROPERTIES AND UNIQUENESS THEOREMS OF SUBHARMONIC FUNCTIONS

S. BERBERYAN

Russian-Armenian (Slavonic) University

Yerevan, Armenia

E-mail: samvel357@mail.ru

DOI: 10.20948/mathmontis-2019-45-2

Abstract. In the article we study boundedness of cluster sets of subharmonic functions in specific conditions in arbitrary points of a unit circle and theorem of uniqueness for logarithmically subharmonic functions. Similar tasks have already been studied before mainly for meromorphic and holomorphic functions.

2010 Mathematics Subject Classification: 31A05, 31A20, 30C80, 30D40, 30D45
Key words and Phrases: subharmonic, logarithmically subharmonic functions, non-euclidean distance, angular limit, subordinate functions

1 ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе изучаются при определенных условиях на последовательности точек $\{z_n\}$, содержащихся в единичном круге и стремящихся к точкам единичной окружности, ограниченность некоторых предельных множеств, существование угловых пределов и граничные теоремы единственности для некоторых классов субгармонических функций. Подобного типа задачи в основном ранее рассматривались известными математиками для мероморфных и голоморфных функций. Сошлемся только на часть этих работ (см. [1-10]). При изучении субгармонических функций возникают новые трудности и, как показывают примеры, без дополнительных условий утверждение известных теорем для мероморфных и голоморфных функций даже в случае нормальных субгармонических функций не имеют места. Изучаемые точки на единичной окружности, будут охарактеризованы как с помощью линейной меры, так и с помощью понятия категорий. В дальнейшем будем придерживаться общепринятых обозначений (см., например, [4]). Обозначим через D и Γ соответственно единичный круг $|z|<1$ и единичную окружность $|z|=1$. Обозначим через $L(\xi,\varphi)$ гиперцикл, проходящий через точки $\xi=e^{i\theta}$, $-\xi$ и который образует угол φ с диаметром Λ^{θ}, соединяющим точки ξ и $-\xi$. Пусть $H(\xi,\varphi_1,\varphi_2)-$область, ограниченная двумя гиперциклами $L(\xi,\varphi_1)$ и $L(\xi,\varphi_2)$.

Рассмотрим действительнозначную функцию $f(z)$, определенную в D. Для произвольного подмножества S круга D, для которого точка $\xi\in\Gamma$ является предельной точкой, обозначим через $C(f,\xi,S)$ предельное множество функции $f(z)$ в точке ξ относительно множества S, т.е. $C(f,\xi,S)=\bigcap\overline{f(S\bigcap U(\xi))}$, где пересечение берётся по всем окрестностям $U(\xi)$ точки ξ, а черта означает замыкание множества относительно двухточечной компактификации $\overline{R}$ множества $R=(-\infty,+\infty)$ в виде отрезка посредством добавления к точкам множества R символов $-\infty$ и $+\infty$. Точку $\xi\in\Gamma$ отнесём к множеству $F(f)$, если $C(f,\xi,\Delta(\xi))$ состоит из единственного значения α. В этом случае говорят, что функция $f(z)$ имеет в точке $\xi\in\Gamma$ угловой предел α. Множество $F(f)$ называется множеством точек Фату для функции $f(z)$.

Точку $\xi\in\Gamma$ относят к множеству $K(f)$ для функции $f(z)$, если $C(f,\xi,\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2))=C(f,\xi,\Delta(\xi,\varphi_1',\varphi_2'))$ для любых углов $\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$, $\Delta(\xi,\varphi_1',\varphi_2')$, где $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_1',\varphi_2'\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Точка $\xi\in\Gamma$ называется точкой Мейера функции $f(z)$ и относится к множеству $M(f)$, если: $C(f,\xi,h(\xi,\varphi))=C(f,\xi,D)\neq\overline{R}$ для любой хорды

$h(\xi,\varphi)$. Скажем, что точка $\xi\in\Gamma$ является точкой Плеснера для субгармонических функций $f(z)$, если для любых углов $\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$ и $\Delta(\xi,\varphi_1',\varphi_2')$ предельные множества $C(f,\xi,\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2))$, $C(f,\xi,\Delta(\xi,\varphi_1',\varphi_2'))$ совпадают и $C(f,\xi,\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2))=[-\infty,\infty]$ для любых углов $\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$. Множество точек Плеснера обозначим через $I(f)$. Неотрицательная субгармоническая функция $f(z)$ называется логарифмически-субгармонической, если $ln(f(z))-$субгармоническая функция. Интерпретируя круг D, как модель плоскости в геометрии Лобачевского, обозначим через $\sigma(z_1,z_2)$ неевклидовое расстояние между точками z_1,z_2 из круга D:

$$\sigma(z_1,z_2)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}, \text{ где } u=\left|\frac{z_1-z_2}{1-z_1\overline{z}_2}\right|.$$

Понятие нормальной функции, рассмотренное для мероморфных функций и состоящее в свойстве порождать нормальное семейство на группе T всех конформных автоморфизмов области определения, было затем перенесено на гармонические и субгармонические функции (см., например, [11]). В случае единичного круга D группа T состоит из элементов $\mathrm{T}=\{S(z);S(z)=e^{i\alpha}(z+a)\cdot(1+\overline{a}z)^{-1}$, $a-$ произвольная точка в D, $\alpha-$ произвольное действительное число$\}$. Придерживаясь обозначений из работы [4] скажем, что действительнозначная функция $f(z)\in\mathfrak{R}$, если на группе T всех конформных автоморфизмов единичного круга D порождаемое ею семейство функций $\Phi:\{f(S(z));S(z)\in T\}$ нормально в D в смысле Монтеля , т. е. из любой последовательности $\{f(S_n(z))\}$, семейства Φ, где $S_n(z)\in T$ можно извлечь подпоследовательность $\{f(S_{n_k}(z))\}$, равномерно сходящуюся на любом компакте K в D или равномерно расходящуюся к $-\infty$ или к $+\infty$ на K.

Говорят, что функция $u(z)$ подчинена субгармонической функции $f(z)$, если имеет место соотношение

$$u(z)=f(\omega(z)) \tag{1}$$

где $\omega(z)$ есть аналитическая в D функция, причем $\omega(0)=0,|\omega(z)|<1$. Известно (см. [3]), что функция $u(z)$ также будет субгармонической в D. Множество $N\subset\Gamma$ называют метрически плотным на некоторой дуге $\gamma\subset\Gamma$, если линейная мера $mes(\gamma'\bigcap N)$ положительна для каждой дуги $\gamma'\subset\gamma$.Выражение почти в каждой точке $\xi\in E$ означает, что всюду на E, кроме некоторого множества, линейная мера которого равна нулю.

Множество E называется множеством I категории, если оно является объединением счетного семейства нигде не плотных множеств. Множество, не являющееся множеством I категории, является множеством II категории. Множество $E \subset \Gamma$ называется остаточным множеством, если его дополнение до Γ I категории. Для дальнейшего сформулируем известную теорему единственности для логарифмически-субгармонических функций (см.[12]).

Теорема А. Пусть логарифмически-субгармоническая в D функция $f(z)$ имеет угловые пределы, равные нулю на некотором множестве $E \subset \Gamma, mes\, E > 0$. Тогда $f(z) \equiv 0$.

2 ОГРАНИЧЕННОСТЬ ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим следующую теорему.

Теорема 1. Пусть субгармоническая в D функция $f(z)$ ограничена $|f(z_n)| \le K,$ где $K > 0,\ n = 1,2,\ldots$ на некоторой последовательности $\{z_n\},\ z_n \in D,\ n = 1,2,\ldots,\ \lim\limits_{n\to\infty}|z_n| = 1,$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \sigma(z_n, z_{n+1}) < M < +\infty \tag{2}$$

и каждая точка некоторого множества $E \subset \Gamma, mes\, E > 0,$ является предельной для последовательности $\{z_n\}$. Если в некоторой точке ξ множества E имеется такая гиперциклическая область $H(\xi, -\varphi, \varphi),$ для которой существует предел $\lim\limits_{z\to\xi} f(z) = \alpha$ и неевклидовое расстояние от гиперциклов $L(\xi, -\varphi)$ и $L(\xi, \varphi)$ до диаметра Λ^{θ}, соединяющего точки ξ и $-\xi$, больше или равно $M/2$, то $|\alpha| \le K.$

Доказательство. Не ограничивая общности можно считать, что множество E целиком лежит на некоторой дуге $\Gamma_1 \subset \Gamma$ и что концевые точки дуги Γ_1 являются предельными точками множества E. Идея доказательства впервые использована в работе [8]. Предположим противное, т.е. что $\alpha > K.$ Рассмотрим вначале случай, когда $f(z_n) \le K.$ Тогда имеем, что начиная с некоторого номера N все точки последовательности $\{z_n\}, n = 1,2,\ldots, z_n \in D,$ должны лежать вне области $H(\xi, -\varphi, \varphi)$. С другой стороны, из условий теоремы 1 следует, что точка ξ является предельной точкой для последовательности

$\{z_n\}$ и, значит, для бесконечного числа значений n точки z_n и z_{n+1} лежат на противоположных гиперциклах $L(\xi,-\varphi)$ и $L(\xi,\varphi)$ либо вне замкнутой области $\overline{H(\xi,-\varphi,\varphi)}$. Следовательно, для бесконечного числа значений n $\sigma(z_n,z_{n+1})\geq M$, что невозможно в силу соотношения (2). Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы 1 в случае, когда $f(z_n)\leq K.$ Аналогично рассматривается случай $f(z_n)\geq -K$.При этом предполагается, что $\alpha<-K$ и снова приходим к противоречию.

Рассмотрим несколько следствий из теоремы 1.

Следствие 1. Пусть субгармоническая в D функция $f(z)$ ограничена $|f(z_n)|\leq K,$ $n=1,2,...$ на некоторой последовательности точек $\{z_n\}$, $n=1,2,...,$ $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=1,$ множество предельных точек которой есть множество $E, mes\,E>0$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\sigma(z_n,z_{n+1})<M<+\infty$. Если в некоторой точке $\xi\in E$ существует угловой предел α_ξ, то $|\alpha_\xi|\leq K$.

Замечание 1. Отметим, что даже у субгармонических функций $f(z)\in\mathfrak{R}$ из существования углового предела α в некоторой гиперциклической области $H(\xi,-\varphi,\varphi)$ в точке $\xi\in\Gamma$ не следует существование углового предела α_ξ в этой точке. Соответствующий пример приведен в работе [11].

Следствие 2. Пусть $f(z)-$субгармоническая функция класса $\mathfrak{R}$ и удовлетворяет следующим условиям:

1) $|f(z_n)|\leq K,\ n=1,2,...$ на некоторой последовательности $\{z_n\},\ z_n\in D,\ n=1,2,...,\ \lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=1$;
2) множество предельных точек последовательности $\{z_n\}$ есть множество $E, mes\,E>0$;
3) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\sigma(z_n,z_{n+1})<M<+\infty$;
4) В каждой точке $\xi\in E$ существует последовательность $\{t_n^\xi\}\in\Delta(\xi,\varphi_1^\xi,\varphi_2^\xi)$, такая, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\sigma(t_n^\xi,t_{n+1}^\xi)<L<+\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}f(t_n^\xi)=\alpha_\xi$.

Тогда почти в каждой точке $\xi \in E$ функция $f(z)$ имеет угловые пределы α_ξ, для которых $\left|\alpha_\xi\right| \le K$.

Доказательство. Обозначим через $F = E \bigcap K(f)$ множество точек $\xi \in E$ на Γ, в которых существуют соответствующие пределы α_ξ вдоль последовательностей $\left\{t_n^\xi\right\}$.

Из условий следствия 2 следует, что $mes\, F = mes\, E > 0$. В силу известного утверждения из работы [15] в каждой точке $\xi \in F$ функция $f(z)$ имеет угловой предел α_ξ. Отсюда утверждение следствия 2 следует из утверждения следствия 1.

3 ГРАНИЧНЫЕ ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИ-СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В качестве применения теоремы 1 рассмотрим одну граничную теорему единственности для логарифмически-субгармонических функций.

Теорема 2. Пусть логарифмически-субгармоническая в D функция $f(z)$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = 0$ по некоторой последовательности точек $\{z_n\},\ z_n \in D,\ n = 1, 2, ...$ множество предельных точек есть множество $E \subset \Gamma,\ mes\, E > 0,\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \sigma(z_n, z_{n+1}) < M < +\infty$ и в каждой точке $\xi \in E$ существуют угловые пределы α_ξ. Тогда $f(z) \equiv 0$.

Доказательство. Действительно, рассматривая в теореме 1 в качестве K любое сколь угодно малое положительное число $\varepsilon > 0$, согласно утверждению теоремы 1 получим, что $0 \le \alpha_\xi \le \varepsilon$, а, значит, в каждой точке $\xi \in E$ $\alpha_\xi = 0$. Согласно теореме A о единственности для логарифмически-субгармонических функций $f(z) \equiv 0$, что и требовалось доказать.

Следствие 3. Пусть $f(z)$ – логарифмически-субгармоническая функция и удовлетворяются все условия теоремы 2. Если функция $u(z)$ подчинена в D функции $f(z)$, то $u(z) \equiv 0$.

Доказательство. Действительно из соотношения (1) следует, что $ln(u(z))$ подчинена субгармонической функции $ln(f(\omega(z)))$ и, значит, согласно известному утверждению (см.[3])

будет субгармонической функцией. Следовательно, $u(z)$ – логарифмически-субгармоническая функция. Из соотношения (1) и из того, что $\omega(0)=0$ и $|\omega(z)|<1$ следует, что с помощью аналитической функции $\omega(z)$ произвольная замкнутая область $\overline{G}\subset D$, содержащая точку $z=0$, отображается в замкнутую область $\overline{G}_1\subset|\omega|<1$, содержащую точку $\omega=0$. В силу утверждения теоремы 2 $f(z)\equiv 0$ и, значит, из соотношения (1) $u(z)\equiv 0$ в любой замкнутой области $\overline{G}\subset D$. Отсюда следует утверждение следствия 3.

Рассмотрим следующую теорему о существовании угловых пределов у субгармонических функций класса $\mathfrak{N}$.

Теорема 3. Пусть $f(z)$ – субгармоническая функция класса $\mathfrak{N}$ и E – некоторое множество II категории на некоторой дуге $\gamma\subset\Gamma$. Допустим, что в каждой точке $\xi\in E$ существует некоторая последовательность $\{z_n^{\xi}\}\in\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2), \lim\limits_{n\to\infty} z_n=\xi,$ для которой $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\sigma(z_n,z_{n+1})<M<+\infty$ и выполнены следующие условия:

1) предельное множество $C(f,\xi,\{z_n^{\xi}\})$ ограничено сверху;
2) существует такое метрически плотное на γ множество N, что для любой точки $\xi\in N$, существует такая последовательность $\{q_n^{\xi}\}$, для которой $\{q_n^{\xi}\}\to\xi,\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\sigma(q_n^{\xi},q_{n+1}^{\xi})<L<+\infty,\ \left\{q_n^{\xi}\right\}\in\Delta(\xi,\varphi_1',\varphi_2'),$ и $\beta\in C(f,\xi,\{q_n^{\xi}\}).$

Тогда существует множество $E_2, mes\,E_2>0,$ в каждой точке которого функция $f(z)$ имеет угловые граничные пределы, равные β.

Доказательство. Принимая во внимание, что для произвольной функции $f(z)$, определенной в D, множество $K(f)$ II категории и ее дополнение до Γ I категории [3] получим, что множество $F=K(f)\bigcap E$ является множеством II категории. Для субгармонических функций $f(z)\in\mathfrak{N}$ известно (см. [15]), что если $\xi\in K(f)$, то $C(f,\xi,\Delta(\xi))=C(f,\xi,h(\xi,\varphi))$ для любых углов $\Delta(\xi)$ и хорд $h(\xi,\varphi)$.

Из условия 1) согласно известному утверждению (см. [18]) в каждой точке $\xi\in E$ предельные множества $C(f,\xi,\Delta(\xi))$ для любого угла $\Delta(\xi)$ ограничены сверху и, следовательно, эти точки не являются точками Плеснера.

Исходя из известного разложения для субгармонических функций класса $\mathfrak{N}$ (см. [2]) все точки множества F, кроме, быть может, некоторого множества $E_1 \subset E$ I категории, будут принадлежать множеству $M(f)$. Так как любая субгармоническая функция класса $\mathfrak{N}$ непрерывна, то предельное множество $C(f,\xi,D)$ замкнутое и связное множество. В силу теоремы Коллингвуда о максимальности (см. [1]) и определению точек Мейера

$$C(f,\xi,h(\xi,\varphi)) = C(f,\xi,D) \qquad (3)$$

в каждой точке $\xi \in \Gamma \setminus E_1$. Так как предельное множество $C(f,\xi,h(\xi,\varphi))$ (см.[18]) ограничено сверху, то в силу соотношения (3) предельное множество $C(f,\xi,D)$ также ограничено сверху в любой точке $\xi \in F \setminus E_1$. Поэтому в каждой такой точке ξ существует некоторая окрестность $U(\xi)$, в которой функция $f(z)$ ограничена сверху. Обозначим через γ^1 пересечение γ с указанной окрестностью на Γ.

С помощью функции $z = \varphi(\omega)$ конформно отобразим единичный круг $D_1 : |\omega| < 1$ на указанную окрестность $U(\xi)$. Тогда функция $\psi(\omega) = f(\varphi(\omega))$ субгармоническая функция, ограниченная сверху в круге D_1, и поэтому почти всюду на $\Gamma_1 : |\omega| = 1$ имеет радиальные пределы. Так как при конформных отображениях почти всюду некасательные пути переходят в некасательные пути (см. [7]), то почти в каждой точке $\xi \in mes\left(\gamma^1 \cap K(f)\right)$ функция $f(z)$ имеет предел β_ξ по некоторому некасательному пути L_ξ. В силу известного утверждения о том, что если $\xi \in mes\left(\gamma^1 \cap K(f)\right)$, то (см. [15]) функция $f(z)$ имеет угловой предел β_ξ, получим существование угловых пределов почти всюду на дуге γ^1.

Но с другой стороны, согласно условию 2) на множестве $E_2 = N \cap \gamma^1, mes\, E_2 > 0$, угловые пределы функции $f(z)$ должны быть равны β, что и требовалось доказать.

Из утверждения теоремы 3 следует еще одна теорема единственности для логарифмически-субгармонических функций класса $\mathfrak{N}$.

Теорема 4. Пусть $f(z)-$логарифмически-субгармоническая функция класса $\mathfrak{N}$ и $E-$некоторое множество II категории на дуге Γ. Допустим, что в каждой точке $\xi \in E$

существует некоторая последовательность $\{z_n^\xi\} \in \Delta(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \xi$, для которой $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sigma(z_n, z_{n+1}) < M < +\infty$ и выполнены следующие условия:

1) предельное множество $C(f, \xi, z_n^\xi)$ ограничено сверху;
2) существует такое метрически плотное на γ^1 множество N, что для любой точки $\xi \in N, 0 \in C(f, \xi, \{q_n^\xi\})$, где последовательность $\{q_n^\xi\} \in \Delta(\xi, \varphi_1', \varphi_2')$, $\{q_n^\xi\} \to \xi$, и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sigma(q_n^\xi, q_{n+1}^\xi) < L < +\infty.$

Тогда $f(z) \equiv 0$.

Доказательство. Действительно из утверждения теоремы 3 следует, что угловые пределы функции $f(z)$ на некотором множестве E, $mes\,E > 0$, равны 0. Согласно теореме A о единственности логарифмически-субгармонических функций получим, что $f(z) \equiv 0$.

Замечание 2. Отметим, что теоремы, подобные теореме 4, рассматривались для мероморфных функций в работе [10].

Следствие 4. Пусть $f(z)$ – логарифмически-субгармоническкая функция класса $\mathfrak{R}$ и удовлетворяются все условия теоремы 4. Если функция $u(z)$ подчинена в D функции $f(z)$, то $u(z) \equiv 0$.

Для доказательства следствия 4 проводятся те же рассуждения, что и при доказательстве следствия 3.

4 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в настоящей работе получены теоремы об ограниченности предельных множеств, о существовании угловых пределов и о единственности некоторых классов субгармонических функций, определенных в единичном круге. Эти теоремы можно рассматривать как субгармонические аналоги известных теорем, полученных ранее для мероморфных и голоморфных функций, определенных в единичном круге.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта № 18T-1A019 и в рамках финансовой поддержки проекта развития Российско-Армянского Университета.

REFERENCES

[1] E.F. Collingwood, A.J. Lohwater, *The theory of cluster sets*, Cambridge University Press (1966).
[2] S.L. Berberyan, V.I. Gavrilov, “Predelnie mnozhestva neprerivnich i garmonicheskih funktsii po nekasatelnim granichnim putyam”, *Math. Montisnigri*, **1**, 17-25 (1993).
[3] I.I. Privalov, *Subgarmonicheskie funktsii*, M. L., NKTP SSSR, (1937).
[4] V.I. Gavrilov, “Normalnie funktsii i pochti periodicheskie funktsii”, *DAN SSSR*, **240** (4), 768-770 (1978).
[5] M.M. Djrbashyan, V.S. Zakaryan, *Klassi i granichnie svoistva funkcii meromorfnikh v kruge*, Moskva, Nauka, (1993).
[6] F. Bagemihl, “Some boundary properties of normal functions bounded on nontangential arcs”, *Arch. Math*., **14** (6), 399-406 (1963).
[7] I.I. Privalov, *Granichnie svoistva analiticheskikh funcktsii*, M. L., GITTL, (1950).
[8] F. Bagemihl, W. Seidel, “Sequential and continuous limits of meromorphic functions”, *Ann. Acad. Sci Fenn. Ser. AI*, 280, 1-17 (1960).
[9] V.I. Gavrilov, “O golomorphnikh funktsiyakh ogranichennikh na posledovatelnostyakh tochek”, *Sibirskii mathematicheski zhurnal*, **6** (6), 1227-1233 (1965).
[10] V.I. Gavrilov, “O nekotorich teoremach edinstvennosti dlya meromorfnich funcktsii”, *Trudi seminara imeni I.G. Petrovskogo, MGU*, 1, 57-62 (1975).
[11] J. Meek, “Of Fatous points of normal subharmonic functions”, *Mathematica Japonica*, **22** (3), 309-314 (1977).
[12] S. Lozinski, “O subgarmonicheskikh funktsiyakh I ikh prilojeniyakh k teorii poverkhnostei”, *Izv. AN. SSSR, Seriya matem.*, **8**, 175-194 (1944).
[13] M. Arsove, “The Lusin-Privalov theorem for subharmonic functions”, *Proc. London Math. Soc.*, **14** (54), 260-270 (1964).
[14] Z. Pavicevic and I. Susic, “Boundary behavior of subharmonic functions”, *Matematiqki vesnik*, 50, 83-87 (1998).
[15] S.L. Berberyan, “O granichnikh osobennostyakh normalnikh subgarmonicheskikh funktsii”, *Math. Montisnigri*, **18-19**, 5-14 (2005-2006).
[16] S.L. Berberyan, “O theoreme Plesnera dlya garmonicheskikh funcktsii”, *Math. Montisnigri*, **24**, 150-154 (2012).
[17] S.L. Berberyan, “O granichnikh teoremakh edinstvennosti dlya logarifmicheski- subgarmonicheskikh funktsii”, *Izvestiya vuzov, Matematika*, 9, 3-9 (2016).
[18] S.L. Berberyan, “Ob uglovikh granichnikh znacheniyakh normalnikh neprerivnikh funcktsii”, *Izvestiya vuzov, Matematika*, 3, 22-28 (1986).
[19] S.L. Berberyan, “Ob ogranichennosti normalnikh garmonicheskikh funktsii”, *Vestnik MGU, Matematika, Mekhanika*, 2, 57-61 (2013).
[20] S.L. Berberyan “O nekotorikh teoremakh edinstvennosti dlya subgarmonicheskikh funktsii”, *National Academy of Sciences of Armenia, reports*, **110** (2), 128-136 (2010).

Received May 20, 2019