MATHEMATICA MONTISNIGRI
Vol XLV (2019)

СУЩЕСТВОВАНИЕ И УНИКАЛЬНОСТЬ РЕШЕНИЯ ИНЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА *q* И ФУНКЦИИ ЗАПАЗДЫВАНИЯ *α*

НИКОЛА МИХАЛЕВИЧ*

Университет Черногории, Морской факультет, Котор, Черногория

*Ответственный автор. E-mail: nikolamih@ac.me

DOI: 10.20948/mathmontis-2019-45-1

Ключевые слова: Оператор, потенциал, функция запаздывания, сжатие

Аннотация. В статье рассматриваются операторы $A_{1\alpha}$ и $A_{2\alpha}$, обеспечивающие сжатие интегральных уравнений для потенциала q и функции запаздывания α. В статье доказывается, что для каждого из этих операторов существует шар, для которого этот оператор является оператором сжатия. Также в статье доказывается, что каждый из операторов отображает шар на себя.

THE EXISTENCE AND THE UNIQUENESS OF SOLUTIONS OF INTEGRAL EQUATIONS FOR THE CAPACITY *q* AND FUNCTION OF LATE *α*

NIKOLA MIHALJEVIC*

Maritime Faculty, University of Montenegro, Kotor, Montenegro

*Corresponding author. E-mail: nikolamih@ac.me

DOI: 10.20948/mathmontis-2019-45-1

Summary. The operators $A_{1\alpha}$ and $A_{2\alpha}$, which provide compression of the integral equations for the potential q and the delay function α, are considered in this paper. In this article proves that for each of these operators there is a sphere for which this operator is a compression operator. Also in this article, it is proved that each of the operators maps the sphere onto itself.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B24, 35B05.
Key words and Phrases: Operator, Potential, Function of delay, Compression.

1 ВВЕДЕНИЕ

Мы оцениваем следующие суммы

$$\widetilde{S}_{1,l}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{l-1}}\prod_{i=1}^{l-1}\sin m\left(\alpha\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_i)\right)-\gamma_1^{-1}(\bar{t}_{i+1})\right)\cos m\left(\bar{x}-\gamma_1^{-1}(\bar{t}_1)+\alpha\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_l)\right)\right),$$

$$\bar{x}\in[0,\pi],\qquad (l=2,3,\ldots)$$

Для $l=2$ имеем

$$\widetilde{S}_{1,2}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin m\left(\alpha\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_1)\right)-\gamma_1^{-1}(\bar{t}_2)\right)\cos m\left(\bar{x}-\gamma_1^{-1}(\bar{t}_1)+\alpha\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_2)\right)\right)}{m}$$

$$(0\le\bar{x}\le\pi,\qquad 0\le\bar{t}_1\le\pi,\qquad 0\le\bar{t}_2\le\alpha(\bar{t}_2))$$

В результате преобразования правой части получаем

$$\sin m\left(\alpha\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_1)\right)-\gamma_1^{-1}(\bar{t}_2)\right)\cos m\left(\bar{x}-\gamma_1^{-1}(\bar{t}_1)+\alpha\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_2)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin m\left(\alpha\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_1)\right)-\gamma_1^{-1}(\bar{t}_2)+\bar{x}-\gamma_1^{-1}(\bar{t}_1)+\alpha\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_2)\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\sin m\left(\alpha\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_1)\right)-\gamma_1^{-1}(\bar{t}_2)-\bar{x}+\gamma_1^{-1}(\bar{t}_1)-\alpha\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_2)\right)\right)\right].$$

Поэтому $\widetilde{S}_{1,2}$ разделяется на сумму двух рядов вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$. Основываясь на развитии Фурье $\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$, $(0<x<2\pi)$, мы заключаем что $\left|\widetilde{S}_{1,2}\right|\le\frac{\pi}{2}$.

Для $l\ge 3$ имеем

$$\left|\widetilde{S}_{1,l}\right|\le\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{l-1}}\le\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Поэтому оценка действительна

$$\left|\widetilde{S}_{1,l}\right|\le\frac{\pi^2}{6},\quad (l=2,3,\ldots).$$

Аналогичным образом можно показать, что оценка действительна

$$\left|\widetilde{S}_{2,l}\right|\le\frac{\pi^2}{6},\quad (l=2,3,\ldots),$$

где

$$\widetilde{S}_{2,l}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{l-1}}\prod_{i=1}^{l-1}\sin m\left(\alpha\left(\gamma_2^{-1}(\bar{t}_i)\right)-\gamma_2^{-1}(\bar{t}_{i+1})\right)\cos m\left(\bar{x}-\gamma_2^{-1}(\bar{t}_1)-\alpha\left(\gamma_2^{-1}(\bar{t}_l)\right)\right),$$

$$\bar{x}\in[0,\pi],\qquad (l=2,3,\ldots).$$

2 СЖИМАЕМОСТЬ

Рассматривающиеся далее операторы $A_{1\alpha}$ и $A_{2\alpha}$, обеспечивающие сжатие интегральных уравнений для потенциала q и функции запаздывания α были введены в работе [1].

Лема 1. Для произвольных функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ имеем

$$\prod_{i=1}^{l} f_1(t_i)-\prod_{i=1}^{l} f_2(t_i)=\sum_{i=1}^{l}\left(f_1(t_i)-f_2(t_i)\right)\prod_{j=i+1}^{l} f_1(t_j)\prod_{k=1}^{i-1} f_2(t_k) \qquad (1)$$

(если в произведении **П,** нижний индекс больше верхнего, мы берем $\mathbf{\Pi}=1$**).**

Доказательство. См [2].

Теорема 1. Оператор $A_{1\alpha}$ является оператором сжатия на шаре

$$\widetilde{K}_{1\alpha}=\left\{\widetilde{q}_1 : \|\widetilde{q}_1\|\le \max\left\{1,\frac{1}{\alpha(\pi)}\right\}\ln\left(1+\frac{6}{\pi^2+3}\right)\right\}.$$

Доказательство. Пусть $\widetilde{q}_1^{(1)},\widetilde{q}_1^{(1)}\in\widetilde{K}_{1\alpha}$. Тогда

$$\left\|A_{1\alpha}\widetilde{q}_1^{(1)}-A_{1\alpha}\widetilde{q}_1^{(2)}\right\|=\int_0^{\pi}\left|A_{1\alpha}\widetilde{q}_1^{(1)}(\overline{x})-A_{1\alpha}\widetilde{q}_1^{(2)}(\overline{x})\right|d\overline{x}.$$

Далее

$$\left|A_{1\alpha}\widetilde{q}_1^{(1)}(\overline{x})-A_{1\alpha}\widetilde{q}_1^{(2)}(\overline{x})\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi}\sum_{l=2}^{\infty}\int_{\overline{D}_l^{(1)}}\left[\widetilde{Q}_1^{(1)}(\overline{T}_l)-\widetilde{Q}_1^{(2)}(\overline{T}_l)\right]\prod_{i=1}^{l-1}\left(\alpha\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_i)\right)-\gamma_1^{-1}(\bar{t}_{i+1})\right)d\overline{T}_l-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=3}^{\infty}\frac{1}{m^{l-1}}\int_{\overline{D}_l^{(1)}}\left[\widetilde{Q}_1^{(1)}(\overline{T}_l)-\widetilde{Q}_1^{(2)}(\overline{T}_l)\right]\overline{P}_1(\overline{T}_l,m)\cos m\left(\overline{x}-\gamma_1^{-1}(\bar{t}_1)+\alpha\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_2)\right)\right)d\overline{T}_l\right|\le$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\sum_{l=2}^{\infty}\left|\int_{\overline{D}_l^{(1)}}\left[\widetilde{Q}_1^{(1)}(\overline{T}_l)-\widetilde{Q}_1^{(2)}(\overline{T}_l)\right]\prod_{i=1}^{l-1}\left(\alpha\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_i)\right)-\gamma_1^{-1}(\bar{t}_{i+1})\right)d\overline{T}_l\right|+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{m^{l-1}}\left|\int_{\overline{D}_l^{(1)}}\left[\widetilde{Q}_1^{(1)}(\overline{T}_l)-\widetilde{Q}_1^{(2)}(\overline{T}_l)\right]\overline{P}_1(\overline{T}_l,m)\cos m\left(\overline{x}-\gamma_1^{-1}(\bar{t}_1)+\alpha\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_2)\right)\right)d\overline{T}_l\right|=$$

$$=\Sigma_1+\Sigma_2.$$

Мы оцениваем обе суммы. Так как

$$\alpha\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_i)\right)-\gamma_1^{-1}(\bar{t}_{i+1})<\alpha\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_i)\right)<\alpha(\pi),$$

то для первой суммы Σ_1 имеем

$$\Sigma_1 \le \frac{1}{2\pi}\sum_{l=2}^{\infty}\int_{\overline{D}_l^{(1)}}\left|\left[\widetilde{Q}_1^{(1)}\left(\overline{T}_l\right)-\widetilde{Q}_1^{(2)}\left(\overline{T}_l\right)\right]\prod_{i=1}^{l-1}\left(\alpha\left(\gamma_1^{-1}\left(\bar{t}_i\right)\right)-\gamma_1^{-1}\left(\bar{t}_{i+1}\right)\right)\right|d\overline{T}_l \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\sum_{l=2}^{\infty}\alpha(\pi)^{l-1}\int_{\overline{D}_l^{(1)}}\left|\widetilde{Q}_1^{(1)}\left(\overline{T}_l\right)-\widetilde{Q}_1^{(2)}\left(\overline{T}_l\right)\right|d\overline{T}_l =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{l=2}^{\infty}\alpha(\pi)^{l-1}\int_{\overline{D}_l^{(1)}}\left|\prod_{i=1}^{l}\widetilde{q}_1^{(1)}\left(\bar{t}_i\right)-\prod_{i=1}^{l}\widetilde{q}_1^{(2)}\left(\bar{t}_i\right)\right|d\overline{T}_l .$$

Для суммы Σ_2 имеем

$$\Sigma_2 = \sum_{l=2}^{\infty}\left|\int_{\overline{D}_l^{(1)}}\left[\widetilde{Q}_1^{(1)}\left(\overline{T}_l\right)-\widetilde{Q}_1^{(2)}\left(\overline{T}_l\right)\right]\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{l-1}}\overline{P}_1\left(\overline{T}_l,m\right)\cos m\left(\bar{x}-\gamma_1^{-1}\left(\bar{t}_1\right)+\alpha\left(\gamma_1^{-1}\left(\bar{t}_2\right)\right)\right)d\overline{T}_l\right| \le$$

$$\le \frac{\pi}{6}\sum_{l=2}^{\infty}\int_{\overline{D}_l^{(1)}}\left|\widetilde{Q}_1^{(1)}\left(\overline{T}_l\right)-\widetilde{Q}_1^{(2)}\left(\overline{T}_l\right)\right|d\overline{T}_l = \frac{\pi}{6}\sum_{l=2}^{\infty}\int_{\overline{D}_l^{(1)}}\left|\prod_{i=1}^{l}\widetilde{q}_1^{(1)}\left(\bar{t}_i\right)-\prod_{i=1}^{l}\widetilde{q}_1^{(2)}\left(\bar{t}_i\right)\right|d\overline{T}_l .$$

Так, как $\alpha\left(\gamma_1^{-1}\left(\bar{t}_i\right)\right)<\gamma_1^{-1}\left(\bar{t}_i\right)$ это $\gamma_1\left(\alpha\left(\gamma_1^{-1}\left(\bar{t}_i\right)\right)\right)<\bar{t}_i$, то отсюда и из формулы (1) имеем

$$\int_{\overline{D}_l^{(1)}}\left|\prod_{i=1}^{l}\widetilde{q}_1^{(1)}\left(\bar{t}_i\right)-\prod_{i=1}^{l}\widetilde{q}_1^{(2)}\left(\bar{t}_i\right)\right|d\overline{T}_l =$$

$$= \int_0^{\gamma_1(\pi)}\int_0^{\gamma_1\left(\alpha\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_1)\right)\right)}\cdots\int_0^{\gamma_1\left(\alpha\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_{l-1})\right)\right)}\left|\sum_{i=1}^{l}\left(\widetilde{q}_1^{(1)}\left(\bar{t}_i\right)-\widetilde{q}_1^{(2)}\left(\bar{t}_i\right)\right)\prod_{j=i+1}^{l}\widetilde{q}_1^{(1)}\left(\bar{t}_j\right)\prod_{k=1}^{i-1}\widetilde{q}_1^{(2)}\left(\bar{t}_k\right)\right|d\bar{t}_l\ldots d\bar{t}_1 \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{l}\int_0^{\gamma_1(\pi)}\int_0^{\gamma_1\left(\alpha\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_1)\right)\right)}\cdots\int_0^{\gamma_1\left(\alpha\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_{l-1})\right)\right)}\left|\widetilde{q}_1^{(1)}\left(\bar{t}_i\right)-\widetilde{q}_1^{(2)}\left(\bar{t}_i\right)\right|\prod_{j=i+1}^{l}\left|\widetilde{q}_1^{(1)}\left(\bar{t}_j\right)\right|\prod_{k=1}^{i-1}\left|\widetilde{q}_1^{(2)}\left(\bar{t}_k\right)\right|d\bar{t}_l\ldots d\bar{t}_1 \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{l}\int_0^{\pi}\int_0^{\bar{t}_1}\cdots\int_0^{\bar{t}_{l-1}}\left|\widetilde{q}_1^{(1)}\left(\bar{t}_i\right)-\widetilde{q}_1^{(2)}\left(\bar{t}_i\right)\right|\prod_{j=i+1}^{l}\left|\widetilde{q}_1^{(1)}\left(\bar{t}_j\right)\right|\prod_{k=1}^{i-1}\left|\widetilde{q}_1^{(2)}\left(\bar{t}_k\right)\right|d\bar{t}_l\ldots d\bar{t}_1 =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{\bar{t}_1}\cdots\int_0^{\bar{t}_{l-1}}\left|\widetilde{q}_1^{(1)}\left(\bar{t}_1\right)-\widetilde{q}_1^{(2)}\left(\bar{t}_1\right)\right|\prod_{j=2}^{l}\left|\widetilde{q}_1^{(1)}\left(\bar{t}_j\right)\right|d\bar{t}_l\ldots d\bar{t}_1 +$$

$$+ \sum_{i=2}^{l-1}\int_0^{\pi}\int_0^{\bar{t}_1}\cdots\int_0^{\bar{t}_{l-1}}\left|\widetilde{q}_1^{(1)}\left(\bar{t}_i\right)-\widetilde{q}_1^{(2)}\left(\bar{t}_i\right)\right|\prod_{j=i+1}^{l}\left|\widetilde{q}_1^{(1)}\left(\bar{t}_j\right)\right|\prod_{k=1}^{i-1}\left|\widetilde{q}_1^{(2)}\left(\bar{t}_k\right)\right|d\bar{t}_l\ldots d\bar{t}_1 +$$

$$+ \int_0^{\pi}\int_0^{\bar{t}_1}\cdots\int_0^{\bar{t}_{l-1}}\prod_{j=1}^{l-1}\left|\widetilde{q}_1^{(2)}\left(\bar{t}_j\right)\right|\left|\widetilde{q}_1^{(1)}\left(\bar{t}_l\right)-\widetilde{q}_1^{(2)}\left(\bar{t}_l\right)\right|d\bar{t}_l\ldots d\bar{t}_1 .$$

Для первого слагаемого имеем

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\bar{t}_1}\dots\int_0^{\bar{t}_{l-1}} \left|\tilde{q}_1^{(1)}(\bar{t}_1)-\tilde{q}_1^{(2)}(\bar{t}_1)\right|\prod_{j=2}^{l}\left|\tilde{q}_1^{(1)}(\bar{t}_j)\right|d\bar{t}_l\dots d\bar{t}_1 =$$

$$=\int_0^{\pi}\left|\tilde{q}_1^{(1)}(\bar{t}_1)-\tilde{q}_1^{(2)}(\bar{t}_1)\right|\left(\int_0^{\bar{t}_1}\left|\tilde{q}_1^{(1)}(\bar{t}_2)\right|f(\bar{t}_2)d\bar{t}_2\right)d\bar{t}_1$$

где

$$f(\bar{t}_2)=\int_0^{\bar{t}_2}\left|\tilde{q}_1^{(1)}(\bar{t}_3)\right|\left(\int_0^{\bar{t}_3}\left|\tilde{q}_1^{(1)}(\bar{t}_4)\right|\left(\dots\int_0^{\bar{t}_{l-1}}\left|\tilde{q}_1^{(1)}(\bar{t}_l)\right|d\bar{t}_l\dots\right)d\bar{t}_4\right)d\bar{t}_3 .$$

Изменив порядок интеграции, а затем роль переменных $\bar{t}_1$ и $\bar{t}_2$ далее получаем что

$$\int_0^{\pi}\left|\tilde{q}_1^{(1)}(\bar{t}_1)-\tilde{q}_1^{(2)}(\bar{t}_1)\right|\left(\int_0^{\bar{t}_1}\left|\tilde{q}_1^{(1)}(\bar{t}_2)\right|f(\bar{t}_2)d\bar{t}_2\right)d\bar{t}_1 =$$

$$=\int_0^{\pi}\left|\tilde{q}_1^{(1)}(\bar{t}_1)\right|f(\bar{t}_1)\left(\int_{\bar{t}_1}^{\pi}\left|\tilde{q}_1^{(1)}(\bar{t}_2)-\tilde{q}_1^{(2)}(\bar{t}_2)\right|d\bar{t}_2\right)d\bar{t}_1 .$$

Однако

$$f(\bar{t}_1)=\int_0^{\bar{t}_1}\left|\tilde{q}_1^{(1)}(\bar{t}_3)\right|\left(\int_0^{\bar{t}_3}\left|\tilde{q}_1^{(1)}(\bar{t}_4)\right|\left(\dots\int_0^{\bar{t}_{l-1}}\left|\tilde{q}_1^{(1)}(\bar{t}_l)\right|d\bar{t}_l\dots\right)d\bar{t}_4\right)d\bar{t}_3 =$$

$$=\int_0^{\bar{t}_1}\left|\tilde{q}_1^{(1)}(\bar{t}_2)\right|\left(\int_0^{\bar{t}_2}\left|\tilde{q}_1^{(1)}(\bar{t}_3)\right|\left(\dots\int_0^{\bar{t}_{l-2}}\left|\tilde{q}_1^{(1)}(\bar{t}_{l-1})\right|d\bar{t}_{l-1}\dots\right)d\bar{t}_3\right)d\bar{t}_2$$

и

$$\int_{\bar{t}_1}^{\pi}\left|\tilde{q}_1^{(1)}(\bar{t}_2)-\tilde{q}_1^{(2)}(\bar{t}_2)\right|d\bar{t}_2=\int_{\bar{t}_1}^{\pi}\left|\tilde{q}_1^{(1)}(\bar{t}_l)-\tilde{q}_1^{(2)}(\bar{t}_l)\right|d\bar{t}_l$$

это

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\bar{t}_1}\dots\int_0^{\bar{t}_{l-1}} \left|\tilde{q}_1^{(1)}(\bar{t}_1)-\tilde{q}_1^{(2)}(\bar{t}_1)\right|\prod_{j=2}^{l}\left|\tilde{q}_1^{(1)}(\bar{t}_j)\right|d\bar{t}_l\dots d\bar{t}_1 =$$

$$=\int_0^{\pi}\int_0^{\bar{t}_1}\dots\int_0^{\bar{t}_{l-2}} \left|\tilde{q}_1^{(1)}(\bar{t}_1)\right|\left(\int_{\bar{t}_1}^{\pi}\left|\tilde{q}_1^{(1)}(\bar{t}_l)-\tilde{q}_1^{(2)}(\bar{t}_l)\right|d\bar{t}_l\right)d\bar{t}_{l-1}\dots d\bar{t}_1 .$$

Таким образом, мы можем доказать, что

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\bar t_1}\dots\int_0^{\bar t_{l-1}}\left|\widetilde{q}_1^{(1)}(\bar t_i)-\widetilde{q}_1^{(2)}(\bar t_i)\right|\prod_{j=i+1}^{l}\left|\widetilde{q}_1^{(1)}(\bar t_j)\right|\prod_{k=1}^{i-1}\left|\widetilde{q}_1^{(2)}(\bar t_k)\right|d\bar t_l\dots d\bar t_1=$$

$$=\int_0^{\pi}\int_0^{\bar t_1}\dots\int_0^{\bar t_{l-2}}\prod_{j=i}^{l-1}\left|\widetilde{q}_1^{(1)}(\bar t_j)\right|\prod_{k=1}^{i-1}\left|\widetilde{q}_1^{(2)}(\bar t_k)\right|\left(\int_{\bar t_i}^{\bar t_{l-1}}\left|\widetilde{q}_1^{(1)}(\bar t_l)-\widetilde{q}_1^{(2)}(\bar t_l)\right|d\bar t_l\right)d\bar t_{l-1}\dots d\bar t_1$$

для $i=2,3,\dots,l-1$.

Мы определяем функцию

$$\widetilde{q}_1(\bar t)=\max\left\{\left|\widetilde{q}_1^{(1)}(\bar t)\right|,\left|\widetilde{q}_1^{(2)}(\bar t)\right|\right\},\qquad \bar t\in[0,\pi].$$

Тогда

$$\int_{\bar D_l^{(1)}}\left|\prod_{i=1}^{l}\widetilde{q}_1^{(1)}(\bar t_i)-\prod_{i=1}^{l}\widetilde{q}_1^{(2)}(\bar t_i)\right|d\overline{T}_l\le$$

$$\le\int_0^{\pi}\int_0^{\bar t_1}\dots\int_0^{\bar t_{l-2}}\prod_{j=1}^{l-1}\widetilde{q}_1(\bar t_j)\left(\int_{\bar t_1}^{\pi}\left|\widetilde{q}_1^{(1)}(\bar t_l)-\widetilde{q}_1^{(2)}(\bar t_l)\right|d\bar t_l\right)d\bar t_{l-1}\dots d\bar t_1+$$

$$+\sum_{i=2}^{l-1}\int_0^{\pi}\int_0^{\bar t_1}\dots\int_0^{\bar t_{l-1}}\prod_{j=1}^{l-1}\widetilde{q}_1(\bar t_j)\left(\int_{\bar t_i}^{\bar t_{i-1}}\left|\widetilde{q}_1^{(1)}(\bar t_l)-\widetilde{q}_1^{(2)}(\bar t_l)\right|d\bar t_l\right)d\bar t_{l-1}\dots d\bar t_1+$$

$$+\int_0^{\pi}\int_0^{\bar t_1}\dots\int_0^{\bar t_{l-2}}\prod_{j=1}^{l-1}\widetilde{q}_1(\bar t_j)\left(\int_0^{\bar t_{l-1}}\left|\widetilde{q}_1^{(1)}(\bar t_l)-\widetilde{q}_1^{(2)}(\bar t_l)\right|d\bar t_l\right)d\bar t_{l-1}\dots d\bar t_1=$$

$$=\int_0^{\pi}\int_0^{\bar t_1}\dots\int_0^{\bar t_{l-2}}\prod_{j=1}^{l-1}\widetilde{q}_1(\bar t_j)\left(\int_{\bar t_1}^{\pi}\left|\widetilde{q}_1^{(1)}(\bar t_l)-\widetilde{q}_1^{(2)}(\bar t_l)\right|d\bar t_l+\right.$$

$$+\sum_{i=2}^{l-1}\int_{\bar t_i}^{\bar t_{i-1}}\left|\widetilde{q}_1^{(1)}(\bar t_l)-\widetilde{q}_1^{(2)}(\bar t_l)\right|d\bar t_l+$$

$$\left.+\int_0^{\bar t_{l-1}}\left|\widetilde{q}_1^{(1)}(\bar t_l)-\widetilde{q}_1^{(2)}(\bar t_l)\right|d\bar t_l\right)d\bar t_{l-1}\dots d\bar t=$$

$$=\int_0^{\pi}\int_0^{\bar t_1}\dots\int_0^{\bar t_{l-2}}\prod_{j=1}^{l-1}\widetilde{q}_1(\bar t_j)d\bar t_{l-1}\dots d\bar t_1\cdot\int_0^{\pi}\left|\widetilde{q}_1^{(1)}(\bar t_l)-\widetilde{q}_1^{(2)}(\bar t_l)\right|d\bar t_l=$$

$$=\int_0^{\pi}\int_0^{\bar t_1}\dots\int_0^{\bar t_{l-2}}\prod_{j=1}^{l-1}\widetilde{q}_1(\bar t_j)d\bar t_{l-1}\dots d\bar t_1\cdot\left\|\widetilde{q}_1^{(1)}-\widetilde{q}_1^{(2)}\right\|.$$

Следующий абзац известен из интегрального учета функций нескольких переменных. Если функция $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ соответствует условию

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n}),$$

где $(i_1, i_2, ..., i_n)$ произвольная перестановка множества $\{1,2,...,n\}$. Тогда

$$n!\int_0^{\pi}\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_{n-1}} f(x_1, x_2, ..., x_n)dx_n \ldots dx_2 dx_1 = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi} f(x_1, x_2, ..., x_n)dx_n \ldots dx_2 dx_1 .$$

Функция $\widetilde{Q}_{1,l-1} = \prod_{j=1}^{l-1} \widetilde{q}_1(\bar{t}_j)$, очевидно, отвечает этому условию, поэтому

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\bar{t}_1} \ldots \int_0^{\bar{t}_{l-2}} \prod_{j=1}^{l-1} \widetilde{q}_1(\bar{t}_j) d\bar{t}_{l-1} \ldots d\bar{t}_1 = \frac{1}{(l-1)!}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \ldots \int_0^{\pi} \prod_{j=1}^{l-1} \widetilde{q}_1(\bar{t}_j) d\bar{t}_{l-1} \ldots d\bar{t}_1 =$$

$$= \frac{1}{(l-1)!}\prod_{j=1}^{l-1}\int_0^{\pi} \widetilde{q}_1(\bar{t}_j) d\bar{t}_j \le \frac{1}{(l-1)!}\prod_{j=1}^{l-1}\int_0^{\pi} \left|\widetilde{q}_1(\bar{t}_j)\right| d\bar{t}_j = \frac{\|\widetilde{q}_1\|^{l-1}}{(l-1)!} .$$

Отсюда следует

$$\sum_{l=2}^{\infty} \alpha(\pi)^{l-1} \int_{\overline{D}_l^{(1)}} \left| \prod_{i=1}^{l} \widetilde{q}_1^{(1)}(\bar{t}_i) - \prod_{i=1}^{l} \widetilde{q}_1^{(2)}(\bar{t}_i) \right| d\overline{T}_l \le$$

$$\le \left\|\widetilde{q}_1^{(1)} - \widetilde{q}_1^{(2)}\right\| \cdot \sum_{l=2}^{\infty} \frac{\left(\|\widetilde{q}_1\|\alpha(\pi)\right)^{l-1}}{(l-1)!} = \left(e^{\|\widetilde{q}_1\|\alpha(\pi)} - 1\right)\left\|\widetilde{q}_1^{(1)} - \widetilde{q}_1^{(2)}\right\|$$

и

$$\sum_{l=2}^{\infty} \int_{\overline{D}_l^{(1)}} \left| \prod_{i=1}^{l} \widetilde{q}_1^{(1)}(\bar{t}_i) - \prod_{i=1}^{l} \widetilde{q}_1^{(2)}(\bar{t}_i) \right| d\overline{T}_l \le$$

$$\le \left\|\widetilde{q}_1^{(1)} - \widetilde{q}_1^{(2)}\right\| \cdot \sum_{l=2}^{\infty} \frac{\|\widetilde{q}_1\|^{l-1}}{(l-1)!} = \left(e^{\|\widetilde{q}_1\|} - 1\right)\left\|\widetilde{q}_1^{(1)} - \widetilde{q}_1^{(2)}\right\|$$

следовательно

$$\Sigma_1 \le \frac{1}{2\pi}\left(e^{\|\widetilde{q}_1\|\alpha(\pi)} - 1\right)\left\|\widetilde{q}_1^{(1)} - \widetilde{q}_1^{(2)}\right\| \qquad \text{и} \qquad \Sigma_1 \le \frac{\pi}{6}\left(e^{\|\widetilde{q}_1\|} - 1\right)\left\|\widetilde{q}_1^{(1)} - \widetilde{q}_1^{(2)}\right\| .$$

Далее

$$\left|A_{1\alpha}\widetilde{q}_1^{(1)}(x) - A_{1\alpha}\widetilde{q}_1^{(1)}(x)\right| \le \left[\frac{1}{2\pi}\left(e^{\|\widetilde{q}_1\|\alpha(\pi)} - 1\right) + \frac{\pi}{6}\left(e^{\|\widetilde{q}_1\|} - 1\right)\right]\left\|\widetilde{q}_1^{(1)} - \widetilde{q}_1^{(2)}\right\|,$$

следовательно

$$\left\|A_{1\alpha}\widetilde{q}_1^{(1)} - A_{1\alpha}\widetilde{q}_1^{(2)}\right\| \le \left[\frac{1}{2\pi}\left(e^{\|\widetilde{q}_1\|\alpha(\pi)} - 1\right) + \frac{\pi}{6}\left(e^{\|\widetilde{q}_1\|} - 1\right)\right]\left\|\widetilde{q}_1^{(1)} - \widetilde{q}_1^{(2)}\right\|\int_0^{\pi} dx =$$

$$\left[\frac{1}{\pi}\left(e^{\|\widetilde{q}_1\|\alpha(\pi)}-1\right)+\frac{\pi^2}{6}\left(e^{\|\widetilde{q}_1\|}-1\right)\right]\left\|\widetilde{q}_1^{(1)}-\widetilde{q}_1^{(2)}\right\|.$$

Оператор $A_{1\alpha}$ является оператором сжатия если

$$\frac{1}{\pi}\left(e^{\|\widetilde{q}_1\|\alpha(\pi)}-1\right)+\frac{\pi^2}{6}\left(e^{\|\widetilde{q}_1\|}-1\right)<1.$$

Здесь мы можем выделить два случая. Первый, когда $\alpha(\pi)\le 1$ и другой, когда $\alpha(\pi)>1$. В первом случае мы получаем

$$\|\widetilde{q}_1\|<\ln\left(1+\frac{6}{\pi^2+3}\right),$$

а во втором

$$\|\widetilde{q}_1\|<\frac{1}{\alpha(\pi)}\ln\left(1+\frac{6}{\pi^2+3}\right).$$

Таким образом, мы имеем

$$\|\widetilde{q}_1\|\le\max\left\{1,\frac{1}{\alpha(\pi)}\right\}\ln\left(1+\frac{6}{\pi^2+3}\right)=\rho.$$

Теорема доказана. □

Теорема 2. Оператор $A_{2\alpha}$ является оператором сжатия на шаре

$$\widetilde{K}_{2\alpha}=\left\{\widetilde{q}_2 : \|\widetilde{q}_2\|\le\max\left\{1,\frac{1}{\alpha(\pi)}\right\}\ln\left(1+\frac{6}{\pi^2+3}\right)\right\}.$$

Доказательство. Идентично доказательству теоремы 1, поэтому мы не будем его повторять. □

3 ОТОБРАЖЕНИЕ “НА”

Теорема 3. Оператор $A_{1\alpha}$ отображает шар $\widetilde{K}_{1\alpha}$ на себя.

Доказательство. Из выражения для оператора $A_{1\alpha}$ мы заключаем, что

$$\left|A_{1\alpha}\widetilde{q}_1(x)\right|\le\frac{1}{2\pi\alpha(\pi)}\left(e^{\alpha(\pi)\|\widetilde{q}_1\|}-1-\alpha(\pi)\|\widetilde{q}_1\|\right)+\frac{\pi}{6}\left(e^{\|\widetilde{q}_1\|}-1-\|\widetilde{q}_1\|\right),$$

соответственно

$$\left\|A_{1\alpha}\widetilde{q}_1(x)\right\|\le\frac{1}{2\alpha(\pi)}\left(e^{\alpha(\pi)\|\widetilde{q}_1\|}-1-\alpha(\pi)\|\widetilde{q}_1\|\right)+\frac{\pi^2}{6}\left(e^{\|\widetilde{q}_1\|}-1-\|\widetilde{q}_1\|\right).$$

Предположим, что $\left\|A_{1\alpha}\widetilde{q}_1(x)\right\| \leq \left\|\widetilde{q}_1\right\|$. Таким образом, получаем для неравенства

$$\frac{1}{2\alpha(\pi)}\left(e^{\alpha(\pi)\|\widetilde{q}_1\|}-1-\alpha(\pi)\|\widetilde{q}_1\|\right)+\frac{\pi^2}{6}\left(e^{\|\widetilde{q}_1\|}-1-\|\widetilde{q}_1\|\right)\leq\|\widetilde{q}_1\|. \tag{2}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать случаи $\alpha(\pi)\in(0,1]$ и $\alpha(\pi)\in(1,\pi)$.

Если $\alpha(\pi)\leq 1$, то верхнее неравенство эквивалентно неравенству

$$e^{\|\widetilde{q}_1\|}-1\leq\left(1+\frac{6}{3+\pi^2\alpha(\pi)}\right)\|\widetilde{q}_1\|.$$

Вводим функции φ и ψ следующим образом: $\varphi(t)=e^t-1$ и $\psi(t)=\left(1+\frac{6}{3+\pi^2\alpha(\pi)}\right)t$.

Так как $\varphi'(0)=1$, $\psi'(0)=1+\frac{6}{3+\pi^2\alpha(\pi)}$ и $\varphi(0)=\psi(0)=0$, понято, что существует положительное решение ρ_0 уравнения $\varphi(t)=\psi(t)$. Поэтому для всех $t\in(0,\rho_0]$ имеем $\varphi(t)<\psi(t)$. Мы заключаем, что каждый шар $\widetilde{K}_r$ при $r\in(0,\rho_0]$, оператор $A_{1\alpha}$ отображает на себя. Мы докажем что и шар $\widetilde{K}_{1\alpha}$ один из них. Поэтому должно быть доказано, что

$$\ln\left(1+\frac{6}{\pi^2+3}\right)<\rho_0.$$

Этот факт равносилен неравенству

$$\frac{6}{\pi^2+3}<\left(1+\frac{6}{3+\pi^2\alpha(\pi)}\right)\cdot\ln\left(1+\frac{6}{\pi^2+3}\right). \tag{3}$$

Для $\alpha(\pi)=1$ неравенство (3) будет иметь вид

$$\frac{6}{\pi^2+3}<\left(1+\frac{6}{\pi^2+3}\right)\cdot\ln\left(1+\frac{6}{\pi^2+3}\right)$$

Это неравенство является верным, что элементарно проверяется. Таким образом, доказано, что (3) действительно и для всех $\alpha(\pi)\in(0,1]$.

Пусть $\alpha(\pi)\in(1,\pi)$. Аналогично предыдущей процедуре, мы заключаем, что оператор $A_{1\alpha}$ будет отображать на себя шар радиуса $\frac{1}{\alpha(\pi)}\ln\left(1+\frac{6}{\pi^2+3}\right)$, если

$$\frac{6}{\pi^2+3}<\left(1+\frac{6}{\pi^2+3}\right)\frac{1}{\alpha(\pi)}\ln\left(1+\frac{6}{\pi^2+3}\right). \tag{4}$$

Последнее условие на самом деле представляет ограничение на значение функции задержки в точке π. □

Теорема 4. Оператор $A_{2\alpha}$ отображают шар $\widetilde{K}_{2\alpha}$ на себя.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 3.

□

4 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье [1] мы сформировали интегральные уравнения $\widetilde{q}_1(\bar{x}) = \bar{f}_1(\bar{x}) - A_{1\alpha}\widetilde{q}_1(\bar{x})$ и $\widetilde{q}_2(\bar{x}) = \bar{f}_2(\bar{x}) - A_{2\alpha}\widetilde{q}_2(\bar{x})$, которые зависят от потенциала q и функции задержки α. В данной статье мы доказали, используя [6-17], что операторы $A_{1\alpha}$ и $A_{2\alpha}$ являются операторами сжатия ($A_{1\alpha}$ на шаре $\widetilde{K}_{1\alpha}$, $A_{2\alpha}$ на шаре $\widetilde{K}_{2\alpha}$) и "на" отображениях. Это означает, что существует единственное решение вышеупомянутых интегральных уравнений, т.е. существуют уникальные функции q и α, которые имеют абсолютно непрерывные производные на отрезке $[0,\pi]$, с условием $0 < \alpha'(x) < 1$, так что оператор $D_{ij}^{(2)}$ (см [3] и [4]) имеет собственные значения для точно заданных значений λ_{nij} (см [5]).

REFERENCES

[1] Nikola Mihaljevic, "Formation of integral equations for the potential *q* and functions of delay *α"*, *Math. Montisnigri*, **40**, 14-23 (2017)

[2] R.Lazoviħ, *Konstruktcija operatora tipa Shturma-Leeuvila sa kashњeњem*, Doktorska disertatcija, Beograd (1998)

[3] N.Mixaљeviħ, M.Pikula, "Karakteristichna funkcija operatora tipa Shturm-Liuvila sa promenљivim kashњeњem", *Zbornik Fakulteta za pomorstvo u Kotoru*, **20**, 403-410 (2003).

[4] Nikola Mihaljevic, "Asymptotics of the eigenvalues of the Sturm-Liouville problem with variable delay" *Math. Montisnigri*, **28**, 5-16 (2013).

[5] Nikola Mihaljevic, "Representation characteristic function of Sturm-Liuville type over the zeros", *Math. Montisnigri*, **31**, 25-37 (2014).

[6] S.B. Norkin, *Differencial`ny`e uravneniya vtorogo poryadka s zapazdy`vayushhim argumentom*, Nauka, Moskva, (1965).

[7] I.M. Gel`fand, B.M. Levitan, "Ob opredelenii differencial`nogo uravneniya po ego spektral`noj funkcii", Izv. AN SSSR, Ser. Mat., **15**, 309-360 (1951).

[8] L.E. Elsgolcz, S.B. Norkin, *Vvedenie v teoriyu differencial`ny`x uravnenij s otklonyayushhimsya argumentom*, Nauka, Moskva, (1971).

[9] R.Lazović, M.Pikula, *Regularized trace of the operator applied to solving inverse problems*, Radovi matematički, (2002).

[10] M. Pikula, "Ob opredelenii differencial`nogo uravneniya s peremenny`m zapazdy`vaniem", *Math. Montisnigri*, **6**, 71-91 (1996).

[11] M. Pikula, "Opredelenie differencial`nogo operatora Shturma-Liuvillya s zapazdy`vayushhim argumentom po dvum spektram", *Matematicheskij vestnik*, **43,** 159-171 (1991).

[12] N. Mihaljevich, "A reconstruction of the operator by using given spectral characteristic", *Math. Montisnigri*, **20-21**, 15-34 (2007-2008).

[13] N. Mihaljevich, M. Pikula, "*The inverse Sturm-Liouville problem with changeable*

delay", *Math. Montisnigri*, **16**, 41-68 (2003).
[14] V.A. Sadovnichij, *Teoriya operatorov*, Moskva, MGU, (1979)
[15] N. Levinson, "The inverse Sturm-Liouville problem", *Math. Tidsskr.*, **13**, 25-30 (1949).
[16] B.V. Shabat, *Vvedenie v kompleksny`j analiz*, Nauka, Moskva, (1985).
[17] L.V. Ahlfors, *Complex analysys,* Mc Graw-Hill Book Company, (1953).

Received May 16, 2019