

Посвящается к 80-летию профессора В. И. Гаврилова

## ДЕЙСТВИЕ ГРУПП МЕБИУСОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ НА КОВРЫ АПОЛЛОНИЯ

А.Г. АРАКЕЛЯН<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> Национальный политехнический университет Армении,  
Ереван, Армения  
e-mail: arman.arakelyan@gmail.com

**Ключевые слова:** ковер Аполлония, декартова конфигурация окружностей, группы Клейна, группы Шоттки.

**Аннотация.** На расширенной комплексной плоскости рассматриваются различные способы построения ковра Аполлония. Помимо алгебраической конструкции ковра, исследованы две различные Клейновы группы производящие одинаковую упаковку Аполлония и выявлены некоторые связи между ними. Однако остается открытым вопрос определения более точного соотношения между ними, объясняющее это совпадение.

## MOBIUS GROUP ACTION ON APOLLONIAN GASKETS

A.H. ARAKELYAN

<sup>\*</sup> National polytechnical university of Armenia,  
Yerevan, Armenia  
e-mail: arman.arakelyan@gmail.com

**Summary.** The Apollonian gasket was introduced with different ways for its construction. Apart from the algebraic construction, two different but closely related Kleinian groups that produce the same Apollonian packing were examined and some of their connections were revealed. However, there is still left to discover an explicit relation between them in order to explain this coincidence.

## 1 ВВЕДЕНИЕ

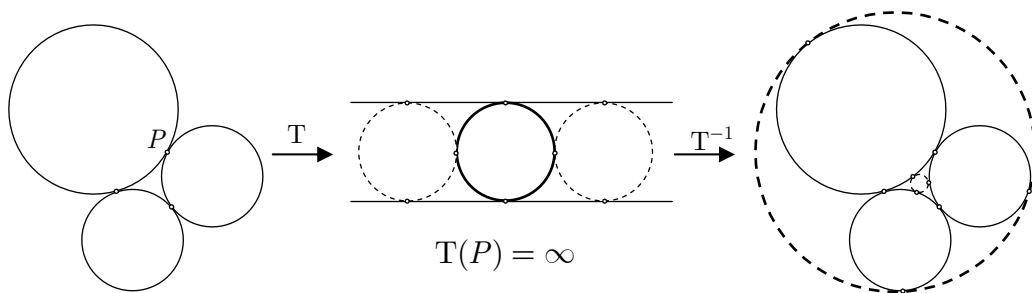
Ковер Аполлония одна из самых красивых упаковок касающихся окружностей, построение которого может быть описано очень простым способом на основе древней задачи Аполлония Пергского.

**Теорема 1** (Аполлония). Для заданных трех попарно касающихся окружностей на плоскости можно построить ровно две окружности, касающиеся всех трех.

**Доказательство.** Приведем современное доказательство, используя дробно-линейные преобразования из  $PSL_2(\mathbb{C})$  на расширенной комплексной плоскости  $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . известные как преобразования Мёбиуса:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

где  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  с  $ad - bc = 1$ , а  $z \in \tilde{\mathbb{C}}$ . Как известно преобразование Мёбиуса обладает свойством сохранения углов и окружностей, в частности оно переводит касающиеся окружности в касающиеся окружности (здесь и далее линии на  $\mathbb{C}$  будем понимать как окружности бесконечного радиуса на  $\tilde{\mathbb{C}}$ ).

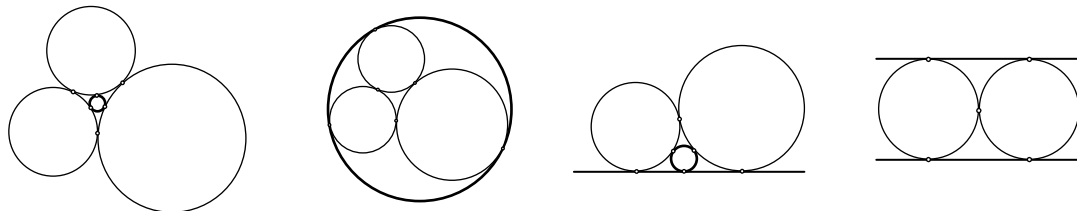


**Рисунок 1:** Иллюстрация доказательства теоремы Аполлония.

Для заданных трех попарно касающихся окружностей  $C_1, C_2, C_3$  обозначим через  $P$  точку касания окружностей  $C_1$  и  $C_2$ . Пусть  $T \in PSL_2(\mathbb{C})$  преобразование переводящее точку  $P$  в  $\infty$ . Очевидно, что преобразование  $T$  переводит  $C_1$  и  $C_2$  в касающиеся в  $\infty$  окружности, т.е. в параллельные линии, а  $T(C_3)$  в окружность касающейся этих линий. Понятно, что для конфигурации  $T(C_1), T(C_2), T(C_3)$  (рис.1) существуют ровно две окружности (скажем  $D$  и  $D'$ ) касающиеся всех трех  $T(C_i), i = \overline{1,3}$ . Используя обратное преобразование  $T^{-1}$ , которое также преобразование Мёбиуса, получим, что  $T^{-1}(D)$  и  $T^{-1}(D')$  именно те две окружности касающиеся окружностей  $C_1, C_2, C_3$ .

Для построение аполлоновской упаковки окружностей, мы начинаем с четырех попарно окружностей на плоскости (см. рис. 2 для возможных конфигураций) и добавляем новые окружности, касающиеся всевозможным тройкам предыдущих окружностей согласно теореме 1. Продолжая этот процесс до бесконечности, приходим к бесконечной упаковке окружностей, называемой *Ковром Аполлония* (см. рис. 4

для возможных типов ковров).

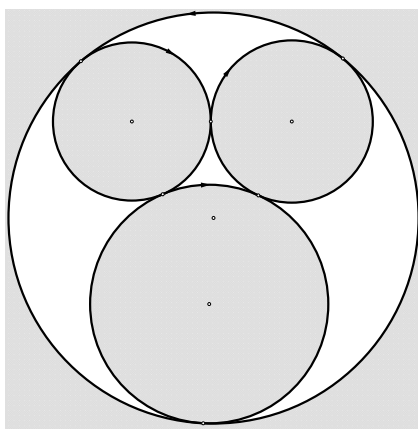


**Рисунок 2:** Декартовы конфигурации попарно касающихся окружности.

В следующих разделах рассмотрим аполлоновские упаковки окружностей и их свойства с различных точек зрения и попытаемся исследовать связи между ними.

## 2 АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Расположение четырех попарно касающихся окружностей, с непересекающимися внутренностями называется *конфигурацией Декарта*, все возможные варианты которой приведены на рисунке 2. Обозначим радиусы окружностей через  $r_i$ ,  $i = \overline{1,4}$ , а их соответствующие кривизны - через  $\beta_i = 1 / r_i$ ,  $i = \overline{1,4}$ . Примем, что прямая имеет бесконечный радиус, следовательно, ее кривизна равна нулю. Для того, чтобы внутренности окружностей не пересекались необходимо либо ввести ориентацию окружностей, либо рассматривать вместо окружностей двумерные круги, ограниченные этими окружностями. Оба подхода на самом деле эквивалентны. Действительно, каждый круг наследует ориентацию у двумерной плоскости (или сферы), на которой он находится, а граница ориентированного круга сама имеет выделенную ориентацию. В нашем случае она определяется известным «правилом левой руки»: когда мы обходим границу в положительном направлении, область должна оставаться слева. В частности, внешняя окружность на рис. 3 является границей области, дополнительной к большому кругу. Поэтому ее ориентация противоположна ориентациям других окружностей, которые ограничивают обычные круги.



**Рисунок 3:** Декартова ориентированная конфигурации

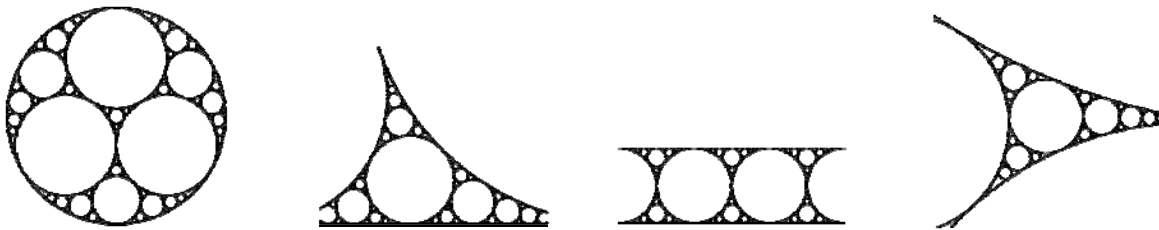
Таким образом, если участвующая в конфигурации окружность с радиусом  $r_i$  имеет с другими только внешнее касание, его кривизна принимается равной  $1/r_i$ , и  $-1/r_i$ , если она имеет с остальными только внутреннее касание.

В 1643г. Р. Декарт в своем письме принцессе Елизабет отмечает одно соотношение между четырьмя радиусами, содержание которого, в терминах кривизны окружностей, выражается в следующей теореме.

**Теорема 2** (Декарта)<sup>1</sup>. В конфигурациях Декарта кривизны взаимокасающихся окружностей удовлетворяют следующему соотношению:

$$\sum_{i=1}^4 \beta_i^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^4 \beta_i \right)^2. \quad (1)$$

Ясно, что в зависимости от исходной декартовой конфигурации ковер Аполлония может принимать четыре различные формы (см. рис. 3)



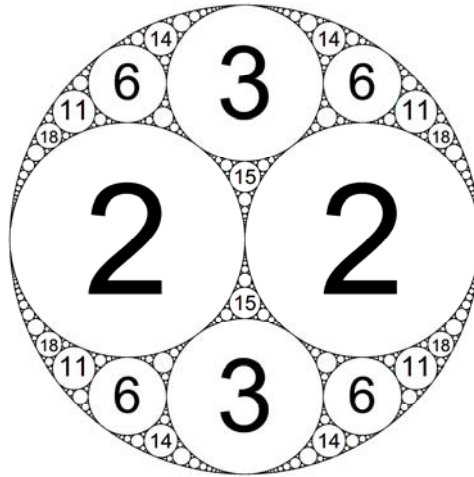
**Рисунок 4:** Ковры Аполлония

Ковры Аполлония можно изучать с разных углов. Различные свойства таких упаковок исследованы в красивой серии работ Грэхэма, Лагариаса и других<sup>2-3</sup>. Несомненно, Ковры Аполлония представляют интерес и в классической геометрии. Например, процесс получения новой окружности на  $n$ -ой стадии, на самом деле, эквивалентен нахождению образа инверсного отражения одного из окружностей рожденной на стадии  $n - 1$ . В 1936 году Фредерик Содди вновь доказал уравнение Декарта, и обобщил его для трехмерного случая. Более того он заметил свойство “целочисленности” аполлониевых ковров<sup>4</sup>: если кривизны окружностей в исходной декартовой конфигурации целые числа, то кривизны всех остальных окружностей на ковре Аполлония также целые числа. Действительно, рассмотрим три взаимно касающиеся окружности с целочисленными кривизнами  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ , тогда каждое из решений квадратного уравнения Декарта (1) есть кривизна четвертой касательной окружности. Ясно что сумма решений задается формулой

$$\beta_4 + \beta_4' = 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3), \quad (2)$$

что доказывает свойство целочисленности. Свойство целочисленности и существования бесконечного числа таких ковров делает их интересными и с теоретико-

числовой точки зрения. На рис. 5 приведен пример целочисленного ковра порожденного исходными окружностями с кривизнами  $-1, 2, 2, 3$ .



**Рисунок 5:** Целочисленный ковер Аполлония порожденный декартовой конфигурацией с кривизнами окружностей  $-1, 2, 2, 3$ .

Смодифицируем классическую теорему окружностей Декарта так, чтоб она включала в себя не только кривизны, но и центры окружностей конфигурации.

**Теорема 3** (Декарта модифицированная). Предположим, что  $\beta_i$  и  $z_i = x_i + iy_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$  соответственно кривизны и центры окружностей в произвольной декартовой конфигурации. Тогда справедливо следующее соотношение

$$\sum_{i=1}^4 (\beta_i z_i)^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^4 \beta_i z_i \right)^2. \quad (3)$$

Решая уравнение (3) относительно  $\beta_4 z_4$  получим аналогичную формуле (2) соотношение

$$\beta_4 z_4 + \beta_4' z_4' = 2(\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \beta_3 z_3): \quad (4)$$

**Доказательство.** Поскольку  $C_1, C_2, C_3, C_4$  образуют декартову конфигурацию, то согласно соотношению (1)

$$\beta_4 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + 2f(\beta_1, \beta_2, \beta_3),$$

где  $f(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \triangleq \pm \sqrt{\beta_1 \beta_2 + \beta_1 \beta_3 + \beta_2 \beta_3}$ . В последнем соотношении выберем положительный корень, если окружность  $C_4$  наименьшая, и негативный-в противном случае.

Предположим, что  $\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \neq 0$ , центр окружности  $C_1$  расположен в начале

координат, а  $z_2 = \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1\beta_2} \in \mathbb{R}$  : В этом случае ясно, что  $z_3 = \left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}\right)e^{i\varphi}$ ,

где

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{(1/\beta_1 + 1/\beta_2)^2 + (1/\beta_1 + 1/\beta_3)^2 - (1/\beta_2 + 1/\beta_3)^2}{2 \cdot (1/\beta_1 + 1/\beta_2)(1/\beta_1 + 1/\beta_3)} = \\ &= \frac{\beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3 - \beta_1^2}{(\beta_1 + \beta_2)(\beta_1 + \beta_3)} = \frac{f^2(\beta_1, \beta_2, \beta_3) - \beta_1^2}{f^2(\beta_1, \beta_2, \beta_3) + \beta_1^2}, \end{aligned}$$

следовательно  $\sin \varphi = \frac{2\beta_1 f(\beta_1, \beta_2, \beta_3)}{f^2(\beta_1, \beta_2, \beta_3) + \beta_1^2}$  и  $\beta_3 z_3 = \frac{(f(\beta_1, \beta_2, \beta_3) + i\beta_1)^2}{\beta_1(\beta_1 + \beta_2)}$  : Аналогично

получим  $\beta_4 z_4 = \frac{(f(\beta_1, \beta_2, \beta_4) + i\beta_1)^2}{\beta_1(\beta_1 + \beta_2)}$  :

Поскольку  $f(\beta_1, \beta_2, \beta_4) = \beta_1 + \beta_2 + f(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ , то

$$\begin{aligned} &\beta_1(\beta_1 + \beta_2)\{\beta_1 z_1, \beta_2 z_2, \beta_3 z_3, \beta_4 z_4\} = \\ &= \{0, (\beta_1 + \beta_2)^2, (f(\beta_1, \beta_2, \beta_3) + i\beta_1)^2, (f(\beta_1, \beta_2, \beta_4) + i\beta_1)^2\} = \{0, A^2, B^2, (A + B)^2\}, \end{aligned}$$

где  $A = \beta_1 + \beta_2$  и  $B = f(\beta_1, \beta_2, \beta_3) + i\beta_1$ . Отсюда, учитывая тождество

$$2(A^4 + B^4 + (A + B)^4) = (A^2 + B^2 + (A + B)^2)^2$$

получим утверждение теоремы.

Теперь, если окружности в произвольном положении, то их центры можно представить в виде

$$Z_1 = z_0 + wz_1, Z_2 = z_0 + wz_2, Z_3 = z_0 + wz_3, Z_4 = z_0 + wz_4$$

где  $z_1 = 0$ ,  $z_2 \in \mathbb{R}$  вещественная, а  $w \in \mathbb{C}, |w| = 1$ : Последние подставляя в левой части соотношения (3) после некоторых простых вычислений получим доказательство теоремы в общем случае.

Рекурсивное применение формул (2) и (4) позволяет полностью определить каждую из новых касающихся окружностей ковра Аполлония, находя их кривизны и центры простыми алгебраическими операциями.

### 3 ГРУППОВОЙ ПОДХОД

#### 3.1 Аполлониева Группа

В этом раздел мы рассмотрим действие расширенной группы дробно-линейных преобразований Мёбиуса в связи с коврами Аполлония. Целью является использовать параметры дробно-линейного отображения для построения ковра Аполлония и исследования его свойств. Можно сказать, что мы переводим геометрическую задачу в

задачу с параметрами, которую можно решить алгебраически, при этом используются такие подгруппы Мёбиусовых преобразований, которые дискретны, т.е. образы близких окружностей могут оказаться на сфере, удаленными на значительные, но конечные расстояния, что позволяет заполнять окружностями все меньших радиусов все получающиеся криволинейные треугольники.

Хоть и на первый взгляд, различные выборы начальных декартовых конфигураций приводят к разным и не похожим друг на друга коврам, тем не менее, все получаемые картины в определенном смысле эквивалентны. Чтобы понять это, рассмотрим группу конформных преобразований Мёбиуса расширенной комплексной плоскости. Как уже отмечалось, преобразование Мёбиуса обладает свойством сохранения углов и окружностей, в частности оно переводит касающиеся окружности в касающиеся окружности. Более того, для трёх попарно различных точек существует единственное отображение, переводящее эти три точки в заданные три попарно различные точки.

Таким образом, с точностью до конформного преобразования, существует только один ковер Аполлония.

Ковер Аполлония  $\mathcal{A}$  порожденная конфигурацией Декарта  $\mathcal{D}$  можно описать с помощью определенной группы преобразований Мёбиуса следующим образом.

Пусть  $\mathcal{D}_0 = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$  начальная декартова конфигурация ковра Аполлония из рис 5. Рассмотрим группу мёбиусовых преобразований

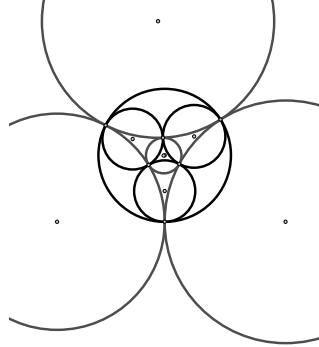
$$\mathcal{S}(\mathcal{D}_0) = \langle \mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \mathfrak{s}_3, \mathfrak{s}_4 \rangle < \text{Möb}(\tilde{\mathbb{C}})$$

действующих на  $\tilde{\mathbb{C}}$ , где  $\mathfrak{s}_i$  инверсия относительно окружности  $C_i^\perp$  проходящая через точки касания окружностей  $C_j, j \neq i$ . Другими словами, инверсии  $\mathfrak{s}_i$  фиксирует три начальных окружностей  $C_j \in \mathcal{D}_0, j \neq i$  и переводит окружность  $C_i$  в новую окружность  $C_i' := \mathfrak{s}_i(C_i)$  касающаяся трем окружностям  $C_j, j \neq i$ . Нетрудно заметить, что окружности  $C_i^\perp, i = \overline{1,4}$  образуют двойственную конфигурацию Декарта  $\mathcal{D}'_0$  (см. рис. 6)

Если вместо исходной декартовой кофигурации  $\mathcal{D}_0$  рассмотреть другую конфигурацию  $\mathcal{D}$ , то получим другую группу инверсий  $\mathcal{S}(\mathcal{D})$ . Тем не менее эти две группы всегда можно сопрягать с помощью преобразований Мёбиуса. Именно поэтому достаточно исследовать только случай  $\mathcal{S}(\mathcal{D}_0)$ .

Поскольку круги ковра Аполлония лежат на расширенной плоскости  $\tilde{\mathbb{C}}$ , которую можно рассматривать как границу  $\delta_\infty(\mathbb{H}^3)$  гиперболического пространства  $\mathbb{H}^3$ , то группа  $\mathcal{S}(\mathcal{D})$  дискретна и действует разрывно на  $\mathbb{H}^3$ . Следовательно,  $\mathcal{S}(\mathcal{D})$  есть группа Клейна (дискретная подгруппа  $\text{Möb}(\tilde{\mathbb{C}}) = \text{PSL}_2(\mathbb{C})^\pm$ ). Заметим, что группа  $\mathcal{S}(\mathcal{D})$  действует инвариантно относительно ковра  $\mathcal{A}$ , имеет четыре  $\mathcal{S}$ -орбиты  $\mathcal{S}(C_i)$  и удовлетворяет условию  $\mathcal{A} = \bigcap_{i=1}^4 \mathcal{S}(C_i)$ , т.е. инверсии исходных четырех окружностей относительно двойственных окружностей порождает всю упаковку  $\mathcal{A}$ . Поэтому группу

$\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}) \triangleq \mathcal{S}(\mathcal{D})$  назовем *геометрической группой Аполлония*.



**Рисунок 6:** Двойственная конфигурация Декарта.

Пусть  $\mathcal{A}$  - ковер Аполлония. Тогда *остаточное множество*  $\mathcal{A}$  определяется соотношением

$$\text{Res}(\mathcal{A}) = \overline{\bigcup_{C \in \mathcal{A}} C}.$$

Равносильно, если взять дополнение в  $\tilde{\mathbb{C}}$  внутренностей всех окружностей ковra  $\mathcal{A}$ .

**Теорема 4.** Для группы  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D})$  и ковra Аполлония  $\mathcal{A}$  имеет место следующее соотношение

$$\text{Res}(\mathcal{A}) = \Lambda(\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D})),$$

где  $\Lambda(\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}))$  предельное множество группы  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D})$ .

**Доказательство.** Поскольку  $\Lambda(\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}))$  есть множество точек накопления орбиты  $\mathcal{S}(z)$  произвольной точки  $z \in \mathbb{H}^3$ , а  $\text{Res}(\mathcal{A})$  замыкание всех точек касания окружностей ковra  $\mathcal{A}$ , то  $\Lambda(\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D})) \subset \text{Res}(\mathcal{A})$ .

Далее, пусть  $z \in \text{Res}(\mathcal{A})$ , а  $N$  – произвольное открытое множество содержащая  $z$ . Тогда ясно, что  $N$  содержит бесконечное число окружностей из  $\mathcal{A}$ , но поскольку  $\mathcal{A}$  порождается орбитами  $\mathcal{S}(C_i), i = 1, 4$ , то существует индекс  $i$  и бесконечная последовательность  $\mathfrak{S}_k$  элементов  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D})$  такие, что  $\mathfrak{S}(C_i) \subset N$  для всех  $k$ . Следовательно  $z \in \Lambda(\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}))$ , т.е.  $\text{Res}(\mathcal{A}) \subset \Lambda(\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}))$ .

Вернемся снова к декартовой кофигурации  $\mathcal{D}_0 = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$  из рис. 5. Если предположить, что  $C_1$  единичная окружность, то можно легко найти аналитические выражения для инверсии  $\mathfrak{s}_i$ . Учитывая, что инверсия относительно окружности с радиусом  $r$  с центром в точке  $w$  задается соотношением

$$i(z) = \frac{w\bar{z} + r^2 - w\bar{w}}{z - \bar{w}},$$



то, после не сложных вычислений, для генераторов групп Аполлония получим:

$$\mathfrak{s}_1(z) = \frac{\bar{z}}{-4iz + 1}, \quad \mathfrak{s}_2(z) = \bar{z}, \quad \mathfrak{s}_3(z) = \frac{(1+i)\bar{z} - 1}{\bar{z} - 1 + i}, \quad \mathfrak{s}_4(z) = \frac{(-1+i)\bar{z} - 1}{\bar{z} + 1 + i}.$$

Заметим, что инверсии  $\mathfrak{s}_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$  являются конформными, но меняющими ориентацию отображениями. Тем не менее, их можно переписать в виде композиций, сохраняющих ориентацию отображений (т.е. элементов из  $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ ) и отображения комплексного сопряжения  $j : z \rightarrow \bar{z}$ . Таким образом,  $\mathfrak{s}_k = \alpha_k \circ j$ , где  $\alpha_k$  представляются следующими матриц:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4i & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1+i & -1 \\ 1 & -1+i \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1+i & -1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix}.$$

Если учесть, что общая группа Мёбиуса  $\text{Möb}(\tilde{\mathbb{C}})$  получается расширением группы  $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$  добавив к ней преобразование  $j : z \rightarrow \bar{z}$ , т.е.  $\text{Möb}(\tilde{\mathbb{C}}) = \langle \text{PSL}_2(\mathbb{C}), j \rangle$ , то подгруппу  $\mathcal{S}_A^h(\mathcal{D})$  сохраняющих ориентацию голоморфных элементов групп  $\mathcal{S}_A(\mathcal{D})$  можно представить в виде

$$\mathcal{S}_A^h(\mathcal{D}) = \mathcal{S}_A(\mathcal{D}) \cap \text{PSL}_2(\mathbb{C}).$$

Учитывая, что  $\alpha_2 = I$  и  $\bar{\alpha}_k = \alpha_k^{-1}$ , получим

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_A^h(\mathcal{D}) &= \langle \alpha_1 \bar{\alpha}_2, \alpha_1 \bar{\alpha}_3, \alpha_1 \bar{\alpha}_4, \alpha_2 \bar{\alpha}_1, \alpha_2 \bar{\alpha}_3, \alpha_2 \bar{\alpha}_4, \alpha_3 \bar{\alpha}_1, \alpha_3 \bar{\alpha}_2, \alpha_3 \bar{\alpha}_4, \alpha_4 \bar{\alpha}_1, \alpha_4 \bar{\alpha}_2, \alpha_4 \bar{\alpha}_3 \rangle = \\ &= \langle \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4 \rangle. \end{aligned}$$

### 3.2

### Группы Шоттки

Рассмотрим теперь другую клейнову группу, связанную с коврами Аполлония. Это, группы Шоттки, действующие в гиперболическом пространстве  $\mathbb{H}^3$  и покажем, что остаточное множество ковров Аполлония можно рассматривать как предельное множество этих групп.

Классическая группа Шоттки  $\mathcal{G} = \langle \mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_n \rangle$  группа мебиусовых преобразований, связанные с не имеющими общих внутренних точек, но, возможно, касающихся на границах  $2n$  кругов на плоскости  $\tilde{\mathbb{C}}$ . Порождающий элемент группы  $\mathfrak{g}_k, k = 1, \dots, n$  отображает интерьер окружности  $C_{2k-1}$  на экстерьер окружности  $C_{2k}$  и наоборот.

Рассмотрим начальную декартову конфигурация ковра Аполлония  $\mathcal{D}_0 = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$  из рис 5 вместе с двойственной конфигурацией  $\mathcal{D}'_0$ . Как и в предыдущем разделе предположим, что  $C_1$  единичная окружность и покажем, что существует группа Шоттки второго род, порождающие которой соединяют в пары круги двойственной декартовой конфигурации, а предельное множество совпадает с

остаточным множества ковра  $\mathcal{A}$ .

В частности допустим что  $g_1$  и  $g_2$  порождающие элементы группы  $\mathcal{G}_0$ , такие, что  $g_1$  отображает окружность  $C_1^\perp$  на окружность  $C_2^\perp$ , а интерьер окружности  $C_1^\perp$  на экстерьер окружности  $C_2^\perp$ . Аналогично,  $g_2$  отображает окружность  $C_3^\perp$  на окружность  $C_4^\perp$ , а интерьер окружности  $C_3^\perp$  на экстерьер окружности  $C_4^\perp$ . Для того, чтобы предельное множество группы Шоттки с касающимися начальными кругами Шоттки образовала кривую, необходимы наложить следующие условия на точки касания:

$$g_1\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right) = 1, \quad g_1\left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right) = -1, \quad g_2(-1) = 1, \quad g_2\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right) = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i.$$

Для наглядного понимания этих требований достаточно взглянуть на рис. 7, где изображены исходные круги Шоттки и ковер Аполлония, а на следующем, рис. 8, продемонстрировано как круги Шоттки скапливаются аппроксимируя предельное множество.

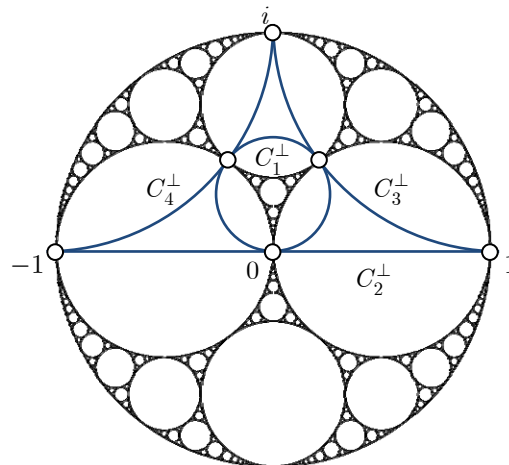


Рисунок 7: Точки касания исходных кругов Шоттки и ковер Аполлония.

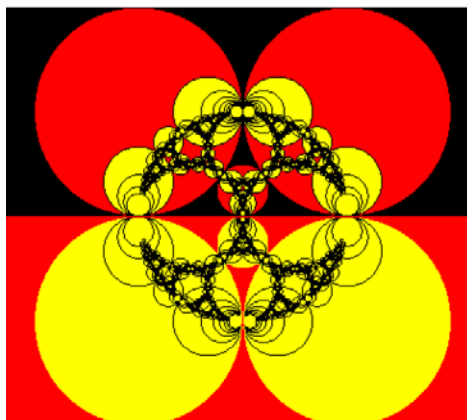


Рисунок 8: Скопление орбит кругов Шоттки.

Теперь, так как преобразования Мебиуса действуют трижды транзитивно на плоскости  $\tilde{\mathbb{C}}$ , то после несложных вычислений получим:

$$\mathfrak{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2i & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathfrak{g}_2 = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Заметим, что  $\text{trace}(\mathfrak{g}_1) = \text{trace}(\mathfrak{g}_2) = 2$ , т.е. обе,  $\mathfrak{g}_1$  и  $\mathfrak{g}_2$ , параболические преобразования, то есть имеют ровно одну неподвижную точку на  $\tilde{\mathbb{C}}$ . Более того коммутатор

$$\mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2 \mathfrak{g}_1^{-1} \mathfrak{g}_2^{-1} = \begin{pmatrix} -1-2i & 2i \\ -2i & -1+2i \end{pmatrix}$$

тоже параболический. Следовательно, группа Шоттки, производящая ковер Аполлония отличается наличием двух параболических образующих и параболического коммутатора. Таким образом справедливо следующее утверждение:

**Утверждение 1.** Предельное множество  $\Lambda(\mathcal{G}_0)$  Группа Шоттки  $\mathcal{G}_0 = \langle \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2 \rangle$  с двумя параболическими образующими

$$\mathfrak{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2i & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathfrak{g}_2 = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix}$$

совпадает с остаточным множества ковра  $\mathcal{A}$  с начальной декартовой конфигурацией  $\mathcal{D}_0$ .

Как и в случае аполлониевой группы, если вместо исходной декартовой кофигурации  $\mathcal{D}_0$  рассмотреть другую конфигурацию  $\mathcal{D}$ , то получим другую группу Шоттки  $\mathcal{G}$ . Тем не менее, всегда можно найти преобразование Мёбиуса  $\beta$ , такое что  $\beta \mathcal{G} \beta^{-1} = \mathcal{G}_0$  и  $\beta(\mathcal{D}_0) = \mathcal{D}$ . Именно поэтому достаточно исследовать только случай  $\mathcal{G}_0$ . Тем самым получаем следующее более общее утверждение.

**Теорема 5.** Для заданного ковра Аполлония  $\mathcal{A}$  существует классическая группа Шоттки второго рода  $\mathcal{G}$  с параболическими образующими и параболическим коммутатором, такая, что  $\text{Res}(\mathcal{A}) = \Lambda(\mathcal{G})$ .

**Доказательство.** Используя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 4 получим утверждение теоремы.

#### 4 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Есть очевидные отношения между группой Шоттки  $\mathcal{G}_0$  и группой  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}^h(\mathcal{D})$  голоморфных элементов  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D})$ . Действительно, группа  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}^h(\mathcal{D})$  порождается тремя параболическими элементами  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ , которые связаны с параболическими элементами  $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2 \mathfrak{g}_1^{-1} \mathfrak{g}_2^{-1}$  группы  $\mathcal{G}_0$  следующими соотношениями

$$\alpha_1 = \mathfrak{g}_1^{-2}, \quad \alpha_4\alpha_3^{-1} = \mathfrak{g}_2^{-2}, \quad \alpha_3^2 = \mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_1^{-1}\mathfrak{g}_2^{-1}.$$

Однако эти группы не совсем одинаковы. Необходимо определить более точное соотношение между ними, объясняющее, как они приводят к одному и тому же ковру Аполлония.

## REFERENCES

- [1] Descartes R. “*Oeuvres de Descartes, Correspondance IV /C*”, Adam and P. Tannery, Eds.- Paris: Leopold Cerf (1901).
- [2] J.C. Lagarias, C.L. Mallows, A.R. Wilks. “Beyond the Descartes Circle Theorem”, *American Mathematical Monthly*, **109(4)**, 338-361, 2002.
- [3] R.L. Graham, J.C. Lagarias, C.L. Mallows, A.R. Wilks, C.H. Yan. “Apollonian Circle Packings: Number Theory”, *Journal of Number Theory*, **100**, 1-45, (2003).
- [4] F. Soddy. “The Kiss Precise” *Nature*. **137**, 1021 (1936).

Поступила в редакцию 10 февраля 2015 года.