MATHEMATICA MONTISNIGRI
Vol XXXII (2015) 66-80

Посвящается профессору В. И. Гаврилову по случаю его 80-ти летия.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ ДВУКРАТНЫХ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А.О. БАБАЯН

Национальный политехнический университет Армении (Фонд).
Ереван, Армения
E-mail: barmenak@gmail.com

Ключевые слова: задача Дирихле, дефектные числа, нетривиальные решения однородной задачи Дирихле, неправильно эллиптическое уравнение, многочлены Чебышева

Аннотация. В работе рассматривается задача Дирихле в единичном круге для уравнения четвертого порядка с частными производными с постоянными коэффициентами. Предполагается, что характеристическое уравнение имеет два различных двукратных корня. Указан класс, в котором эта задача нормально разрешима и определены дефектные числа. Условия разрешимости рассматриваемой задачи и решения однородной и неоднородной задач определяются в явном виде.

ON A DIRICHLET PROBLEM FOR FOURTH ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION IN THE CASE OF DOUBLE ROOTS OF CHARACTERISTIC EQUATION

A.O. BABAYAN

National polytechnic university of Armenia (Foundation).
Yerevan, Armenia
e-mail: barmenak@gmail.com

Summary. In the paper the Dirichlet problem in a unit disc for a fourth order partial differential equation with constant coefficients is considered. It is supposed that the characteristic equation has two different double roots. A class where the problem is normally solvable is determined and defect numbers are found. The solvability conditions and solutions of homogeneous and inhomogeneous problems are determined in explicit form.

2010 Mathematics Subject Classification: 35G45, 35G15, 35J40, 35J58
Key words and Phrases: Dirichlet problem, defect numbers, non-trivial solutions of homogeneous Dirichlet problem, improperly elliptic equation, Chebyshev polynomials

1 ВВЕДЕНИЕ. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть $D=\{(x,y): x^2+y^2<1\}$ - единичный круг комплексной плоскости. В области D рассмотрим дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\sum_{k=0}^{4} A_k \frac{\partial^4 u}{\partial x^k \partial y^{4-k}}(x,y)=0, \quad (x,y)\in D, \tag{1}$$

где A_k - комплексные постоянные ($A_0 \neq 0$). Предполагаем, что если λ_j ($j=1,2,3,4$) - корни характеристического уравнения

$$\sum_{k=0}^{4} A_k \lambda^{4-k}=0, \tag{2}$$

то

$$\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3=\lambda_4,\ \lambda_j\neq\pm i,\ j=1,2,3,4. \tag{3}$$

Решение уравнения (1) ищется в классе $C^4(D)\bigcap C^{(1,\alpha)}(\overline{D})$, и на границе Γ удовлетворяет условиям Дирихле

$$u|_\Gamma=f(x,y),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_\Gamma=g(x,y),\quad (x,y)\in\Gamma. \tag{4}$$

Здесь f и g - заданные функции, $\frac{\partial}{\partial\vec{n}}=-\frac{\partial}{\partial r}$ - дифференцирование по направлению внутренней нормали к границе Γ (здесь и далее $z=x+iy=re^{i\theta}$). Отметим, что при различном расположении корней λ_j свойства уравнения (1) существенно изменяются, поэтому класс функций, которому принадлежат функции f и g уточним в дальнейшем. Будем различать следующие три случая: 1) $\Im\lambda_1>0>\Im\lambda_3$, то есть уравнение (1) - правильно эллиптическое, 2) $\Im\lambda_1\geq\Im\lambda_3>0$, когда уравнение (1) - неправильно эллиптическое, и, наконец, 3) когда один из корней является действительным числом, то есть если уравнение (1) не является эллиптическим.

В первом случае будем предполагать, что $f\in C^{(1,\alpha)}(\Gamma)$, $g\in C^{(\alpha)}(\Gamma)$. Известно, что в такой постановке задача Дирихле (1), (4) является фредгольмовой[1,2]. В этом случае, при $\lambda_1=\lambda_2=i$ в[3] было показано, что задача Дирихле (1), (4) однозначно разрешима. Для неправильно эллиптических уравнений (второй случай) классические краевые задачи, и, в частности, задача Дирихле, не являются корректными[4]. В[5] были исследованы краевые задачи для неправильно эллиптических уравнений второго порядка и описаны более узкие классы функций, в которых данные задачи являются нетеровыми. Вопросу однозначной разрешимости однородной задачи Дирихле (при $f\equiv g\equiv 0$) для уравнения четвертого порядка общего вида посвящена работа[6]. Однозначная разрешимость задачи Дирихле для эллиптических систем второго порядка была изучена в[7]. В[8] получены условия разрешимости граничных задач для неоднородного полианалитического уравнения. Задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения высокого порядка была изучена в[9]. В работе[10], используя представление решения уравнения (1), полученное в[9], исследуются однородная и неоднородная задачи (1), (4) в эллиптическом случае при некотором расположении корней.

В настоящей работе изучается случай, когда корни уравнения (2) удовлетворяют условиям (3). В случае неправильно эллиптического уравнения указан класс граничных функций, для которого задача Дирихле (1), (4) нетерова и определены дефектные числа (количество линейно независимых решений однородной задачи и количество линейно независимых условий на граничные функции, необходимых и достаточных для разрешимости неоднородной задачи). Решения однородной задачи и условия разрешимости неоднородной задачи определяются в явном виде. Аналогичные результаты получены для правильно эллиптического уравнения (1). В последнем пункте рассмотрена однородная задача (1), (4) для не эллиптического уравнения (1) (случай 3).

Для точной формулировки полученных результатов введем необходимые обозначения. Используя операторы комплексного дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\ \frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

представим уравнение (1) в комплексной форме.

Случай правильно эллиптического уравнения. Уравнение (1) представим в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar z}-\mu\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial z}-\nu\frac{\partial}{\partial \bar z}\right)^2 u(x,y)=0. \tag{5}$$

где $\mu=\dfrac{i-\lambda_1}{i+\lambda_1}$, $\nu=\dfrac{i+\lambda_3}{i-\lambda_3}$. Из условий $\Im\lambda_1>0>\Im\lambda_3$ и из (3) следует, что

$$|\mu|<1,\ |\nu|<1,;\quad \mu\nu\neq 0. \tag{6}$$

Представим граничные условия (4) в эквивалентной форме

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \bar z}\right|_\Gamma=F(x,y),\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_\Gamma=G(x,y),\ (x,y)\in\Gamma;\ u(1,0)=f(1,0). \tag{7}$$

Мы предполагаем, что $f\in C^{(1,\alpha)}(\Gamma)$, $g\in C^{(\alpha)}(\Gamma)$. Поэтому функции F и G, определяющиеся соотношениями:

$$F(x,y)=\frac{z}{2}\left(g(x,y)+i\frac{\partial f}{\partial\theta}(x,y)\right),\ G(x,y)=\frac{\bar z}{2}\left(g(x,y)-i\frac{\partial f}{\partial\theta}(x,y)\right),\ z=re^{i\theta}\in\Gamma, \tag{8}$$

принадлежат пространству $C^{(\alpha)}(\Gamma)$. Здесь и далее $\dfrac{\partial}{\partial\theta}$ - производная по аргументу комплексного числа $z=re^{i\theta}$.

Теорема 1. *Обозначим* $z=\mu\nu$ *и* $t=0.5(z^{0.5}+z^{-0.5})$. *Тогда задача Дирихле (1), (4) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\Lambda_k(t)\equiv U_{k-1}^2(t)-k^2\neq 0,\quad k=3,4,\ldots, \tag{9}$$

где U_{k-1} - многочлен Чебышева второго рода [15] степени $k-1$. Если условия (9) нарушаются при некотором k_0, то однородная задача (1), (4) имеет нетривиальное решение, которое является многочленом порядка k_0+1. При этом для разрешимости неоднородной задачи (1), (4) необходимо, чтобы граничные функции удовлетворяли одному линейно независимому условию. Таким образом, дефектные числа задачи (1), (4) равны количеству номеров, при которых нарушается условие (9).

Случай неправильно эллиптического уравнения. В этом случае $\Im\lambda_1 \geq \Im\lambda_3 > 0$, следовательно, уравнение (1) можно представить в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu_1 \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu_2 \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u(x,y) = 0, \tag{10}$$

где $\mu_1 = \dfrac{i-\lambda_1}{i+\lambda_1}$, $\mu_2 = \dfrac{i-\lambda_3}{i+\lambda_3}$. Из этих соотношений следует:

$$\mu_1 \neq \mu_2, \ \ |\mu_1| < 1, \ \ |\mu_2| < 1. \tag{11}$$

Определим класс граничных функций, который будет необходим для дальнейшего.

Определение 2. *Обозначим $B^{(m,\alpha)}(\delta)$ класс функций, аналитических в кольце $R = \{z : \delta < |z| < 1\}$, которые вместе с производными до порядка m, принадлежат пространству $C^{(\alpha)}(\overline{R})$ (т. е. удовлетворяют условию Гельдера с показателем α в замыкании области R).*

Доказана следующая теорема:

Теорема 3. *Предположим, что $|\mu_1| \geq |\mu_2|$, обозначим $z = \mu_2 \mu_1^{-1}$ и $t = 0.5(z^{0.5} + z^{-0.5})$. Пусть граничные функции из (9) F и G принадлежат множеству $B^{(1,\alpha)}(|\mu_1|)$. Тогда, если выполняются условия (9), то задача (10), (4) однозначно разрешима. Если условия (9) нарушаются при некотором k_0, то однородная задача (1), (4) имеет нетривиальное решение, которое является многочленом порядка k_0+1. При этом для разрешимости неоднородной задачи (1), (4) необходимо, чтобы граничные функции удовлетворяли одному линейно независимому условию. Таким образом, дефектные числа задачи (1), (4) равны количеству номеров, при которых нарушается условие (9).*

Далее, рассматриваем случай не эллиптического уравнения.

Теорема 4. *Пусть μ_1, μ_2, z, t определены как в теореме* **3**. *Тогда однородная задача (1), (4) не имеет нетривиальных полиномиальных решений тогда и только тогда, когда выполняются условия (9).*

2 СЛУЧАЙ ПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Доказательство теоремы 1. Рассматриваем правильно эллиптическое уравнение (1) (случай 1). При этом уравнение (1) представляется в виде (5). Общее решение этого уравнения представляется в виде[9]:

$$u(x,y) = \Phi_0(z+\mu\bar{z}) + \frac{\partial}{\partial\theta}\Phi_1(z+\mu\bar{z}) + \Psi_0(\bar{z}+\nu z) + \frac{\partial}{\partial\theta}\Psi_1(\bar{z}+\nu z), \tag{12}$$

где Φ_j и Ψ_j $(j=0{,}1)$ - функции аналитические в областях $D_1(\mu)=\{z+\mu\bar{z} \mid z\in D\}$ и $D_2(\nu)=\{\bar{z}+\nu z \mid z\in D\}$ соответственно, которые необходимо определить. Подставим функцию (12) в граничные равенства (7). Используя операторное тождество[9]

$$\frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k \partial \bar{z}^m}\frac{\partial^l}{\partial \theta^l}=\left(\frac{\partial}{\partial \theta}+(k-m)iI\right)^l \frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k \partial \bar{z}^m},$$

получим

$$\mu\Phi_0'(z+\mu\bar{z})+\mu\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-iI\right)\Phi_1'(z+\mu\bar{z})+\Psi_0'(\bar{z}+\nu z)+\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-iI\right)\Psi_1'(\bar{z}+\nu z)=F(z),\ z\in\Gamma, \tag{13}$$
$$\Phi_0'(z+\mu\bar{z})+\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+iI\right)\Phi_1'(z+\mu\bar{z})+\nu\Psi_0'(\bar{z}+\nu z)+\nu\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+iI\right)\Psi_1'(\bar{z}+\nu z)=G(z),\ z\in\Gamma.$$

Нам понадобится представление функции $\Phi(z+\mu\bar{z})$, где Φ аналитична в области $D_1(\mu)$, в окрестности Γ с помощью аналитической в D функции. В[2] доказано, что при $|z|=1$ функция $\Phi(z+\mu\bar{z})$ допускает представление

$$\Phi(z+\mu\bar{z})=\omega(z)+\omega(\mu\bar{z}), \tag{14}$$

где ω -- аналитическая в единичном круге функция. Если известна функция ω, то Φ определяется по формуле:

$$\Phi(z+\mu\bar{z})=\omega\left(\frac{1}{2}(z+\mu\bar{z}+\sqrt{(z+\mu\bar{z})^2-4\mu})\right)+\omega\left(\frac{1}{2}(z+\mu\bar{z}-\sqrt{(z+\mu\bar{z})^2-4\mu})\right), \tag{15}$$

где $|z|<1$. В этих формулах выбираем ту ветвь $\sqrt{\zeta^2-4\mu}$, которая аналитически продолжается вне сегмента $[-2\sqrt{\mu},2\sqrt{\mu}]$ и удовлетворяет условию $\zeta^{-1}\sqrt{\zeta^2-4\mu}\to 1$ при $\zeta\to\infty$. Аналогичное представление можно записать для функции $\Psi(\bar{z}+\nu z)$.

Используем (14) для представления функций Φ_j' и Ψ_j' на окружности Γ

$$\Phi_j'(z+\mu\bar{z})=\varphi_j(z)+\varphi_j(\mu\bar{z})\equiv\sum_{k=0}^{\infty}A_{kj}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{kj}\mu^k\bar{z}^k, \tag{16}$$
$$\Psi_j'(\bar{z}+\nu z)=\psi_j(\bar{z})+\psi_j(\nu z)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}B_{kj}\bar{z}^k+\sum_{k=0}^{\infty}B_{kj}\nu^k z^k,\ \ j=0,1,\ \ z\in\Gamma.$$

Так как, подлежащие определению функции φ_j и ψ_j аналитичны в круге D, то они определяются своими коэффициентами Тейлора A_{kj} и B_{kj}. Для определения этих коэффициентов, подставим разложения (16) в граничные условия (5):

$$\mu\sum_{k=0}^{\infty}A_{k0}z^k+\mu\sum_{k=0}^{\infty}A_{k0}\mu^k\bar{z}^k+\mu\sum_{k=0}^{\infty}A_{k1}i(k-1)z^k-\mu\sum_{k=0}^{\infty}A_{k1}\mu^k i(k+1)\bar{z}^k+ \tag{17}$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}B_{k0}\bar{z}^k+\sum_{k=0}^{\infty}B_{k0}\nu^k z^k-\sum_{k=0}^{\infty}B_{k1}(k+1)i\bar{z}^k+\sum_{k=0}^{\infty}B_{k1}i\nu^k(k-1)z^k=F(z),\ |z|=1,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_{k0} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{k0} \mu^k \bar{z}^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{k1} i(k+1) z^k - \sum_{k=0}^{\infty} A_{k1} \mu^k i(k-1) \bar{z}^k +$$

$$+\nu \sum_{k=0}^{\infty} B_{k0} \bar{z}^k + \nu \sum_{k=0}^{\infty} B_{k0} \nu^k z^k -$$

$$-\nu \sum_{k=0}^{\infty} B_{k1}(k-1) i \bar{z}^k + \nu \sum_{k=0}^{\infty} B_{k1} i \nu^k (k+1) z^k = G(z),\ |z|=1,$$

Разложим функции F и G на окружности Γ в ряд Фурье

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} F_{-k} \bar{z}^k \equiv F_+(z) + F_-(z), \tag{18}$$

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} G_{-k} \bar{z}^k \equiv G_+(z) + G_-(z),$$

и приравняем в (17) коэффициенты при соответствующих степенях z и $\bar{z}$. Получим системы для определения неизвестных A_{kj} и B_{kj}. При $k=0$ имеем:

$$2\mu A_{00} - 2i\mu A_{01} + 2B_{00} - 2iB_{01} = F_0,\ 2A_{00} + 2iA_{01} + 2\nu B_{00} + 2i\nu B_{01} = G_0. \tag{19}$$

При $k \ge 1$ получаем систему четырех уравнений относительно неизвестных A_{kj} и B_{kj}:

$$A_{k0} + i(k+1)A_{k1} + \nu^{k+1} B_{k0} + i(k+1)\nu^{k+1} B_{k1} = G_k \tag{20}$$

$$\mu A_{k0} + i\mu(k-1)A_{k1} + \nu^k B_{k0} + i(k-1)\nu^k B_{k1} = F_k,$$

$$\mu^k A_{k0} - i(k-1)\mu^k A_{k1} + \nu B_{k0} - i\nu(k-1)B_{k1} = G_{-k},$$

$$\mu^{k+1} A_{k0} - i(k+1)\mu^{k+1} A_{k1} + B_{k0} - i(k+1)B_{k1} = F_{-k},$$

Определитель основной матрицы системы (20) имеет вид:

$$\Omega_k = \det \widetilde{\Omega}_k \equiv \det \begin{pmatrix} 1 & i(k+1) & \nu^{k+1} & i(k+1)\nu^{k+1} \\ \mu & i\mu(k-1) & \nu^k & i(k-1)\nu^k \\ \mu^k & -i\mu^k(k-1) & \nu & -i\nu(k-1) \\ \mu^{k+1} & -i(k+1)\mu^{k+1} & 1 & -i(k+1) \end{pmatrix} \tag{21}$$

Преобразуя этот определитель и, используя обозначения теоремы **1**, получим:

$$\Omega_k = -4z(1-z)^2 \left(\left(\frac{z^k - 1}{z-1} \right)^2 - k^2 z^{k-1} \right) = -4z^k (1-z)^2 (U_{k-1}^2(t) - k^2). \tag{22}$$

При условиях теоремы **1** $z \ne 0$ и $1 - z \ne 0$, так как $\mu\nu \ne 0$. Поэтому однородная (при $F_k = G_k \equiv 0$) система (20) имеет ненулевое решение при $k > 2$ тогда и только тогда, когда $\Lambda_k(t) = 0$ (отметим, что $\Omega_2 \ne 0$, так как является обобщенным определителем Вандермонда с различными коэффициентами). Например, при $k = 3$ $\Lambda_3(t) = U_2^2(t) - 9$, следовательно, при $t^2 = -0.5$, или $z^2 + 4z + 1 = 0$ (так как $|z| < 1$ следует брать корень $z = \sqrt{3} - 2$) однородная система (20) имеет ненулевое решение A_{3j}, B_{3j}, $j = 0,1,2$. По этим ненулевым коэффициентам по формулам (14), (15), (12) определяем нетривиальное решение однородной задачи (5), (4), которое в этом случае является многочленом четвертого порядка $(1 - z\bar{z})^2$. Аналогично, если однородная система (20) имеет ненулевое решение при некотором $k_0 > 2$, то по нему получаем решение однородной задачи (5), (4), которое является ненулевым многочленом порядка $k_0 + 1$. Предположим, что выполнены условия (9). Тогда, при $k \geq 2$ $\Omega_k \neq 0$, следовательно, однородная система (20) однозначно разрешима, то есть $A_{kj} = B_{kj} = 0$ при $j = 0,1,2$ и $k \geq 2$. Поэтому ненулевым решением однородной задачи может быть только многочлен степени не выше двух. Но из однородных граничных условий (4) следует, что если этот многочлен ненулевой, то он должен делиться на $(1 - z\bar{z})^2$ (см.[13], т. 5.1, стр. 84), то есть должен иметь степень не ниже четырех. Таким образом, в этом случае, однородная задача (5), (4) не имеет нетривиальных решений. Первая часть теоремы **1** доказана.

Рассмотрим неоднородную задачу (5), (4) при условиях (9). Система (19) всегда имеет решение, а система (20) при $k > 1$ однозначно разрешима, так как определитель Ω_k при $k > 1$ отличен от нуля. Рассмотрим систему (20) при $k = 1$. В этом случае левые части второго и третьего уравнений (20) совпадают. Из (8) следует, что

$$F_1 = G_{-1} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} g(\cos\tau, \sin\tau) d\tau,$$

то есть второе и третье уравнения в (20) совпадают. Непосредственно проверяется, что ранг матрицы $\widetilde{\Omega}_1$ равен трем, следовательно, система (20) при $k = 1$ также имеет решение. Перейдем к исследованию системы (20) при $k > 1$. Сначала введем обозначения $x_1 = A_{k0}$, $x_2 = iA_{k1}$, $x_3 = B_{k0}$, $x_4 = iB_{k1}$ и преобразуем ее к следующей форме:

$$x_1 + (k+1)x_2 + \nu^{k+1}x_3 + \nu^{k+1}x_4 = G_k, \tag{23}$$

$$-2\mu x_2 + \nu^k(1-z)x_3 + \nu^k(k - 1 - z(k+1))x_4 = F_k - \mu G_k,$$

$$\nu(1 - z^k - kz^{k-1}(1-z))x_3 + \nu(k-1)(kz^{k-1}(z-1) + z^k - 1)x_4 = S_1,$$

$$\frac{\Omega_k}{2z(z^k - 1 - kz^{k-1}(z-1))(z^{k+1} - 1 - (k+1)z^k(z-1))} x_4 = S_2.$$

Здесь Ω_k определяется по формуле (21), и

$$S_1 = G_{-k} - k\mu^{k-1}F_k + (k-1)\mu^k G_k, \tag{24}$$

$$S_2 = \frac{F_{-k} - \mu^k(k+1)F_k + k\mu^{k+1}G_k}{1 - z^{k+1} - (k+1)z^k(1-z)} - \frac{G_{-k} - k\mu^{k-1}F_k + (k-1)\mu^k G_k}{1 - z^k - kz^{k-1}(1-z)}.$$

Из этих соотношений следует, что при условиях (9) система (23) однозначно разрешима, причем так как $\Omega_k \to -4\mu\nu$, то при $k \to \infty$

$$B_{k1}:\ C(F_{-k}-G_{-k}),\ A_{k1}:\ C_1(F_k-\mu G_k), B_{k0}:\ kiC(G_{-k}-F_{-k}), A_{k0}:\ kiC_1(F_k-\mu G_k), \quad (25)$$

где C и C_1 постоянные, не зависящие от k. Поэтому функции $\Phi_0(z+\mu\bar{z})+\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi_1(z+\mu\bar{z})$ и $\Psi_0(\bar{z}+\nu z)+\frac{\partial}{\partial\theta}\Psi_1(\bar{z}+\nu z)$ принадлежат классу $C^{(1,\alpha)}(\overline{D})$. Таким образом, построенная функция u является решением задачи (1), (4). Итак, при условиях (9) задача (1), (4) имеет решение для произвольных граничных функций f, g. Если условия (9) нарушаются при некотором $k_0>2$, то из (23) и (24) следует, что для разрешимости задачи (1), (4) необходимо, чтобы выполнялось условие на граничные функции F и G:

$$\frac{F_{-k_0}-\mu_0^k(k_0+1)F_{k_0}+k_0\mu^{k_0+1}G_{k_0}}{1-z^{k_0+1}-(k_0+1)z^{k_0}(1-z)}-\frac{G_{-k_0}-k_0\mu^{k_0-1}F_{k_0}+(k_0-1)\mu^{k_0}G_{k_0}}{1-z^{k_0}-k_0z^{k_0-1}(1-z)}=0. \quad (26)$$

Таким образом, количество линейно независимых условий разрешимости задачи (1), (4) равно количеству номеров, для которых нарушается условие (9). Теорема **1** доказана.

3 СЛУЧАЙ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Доказательство теоремы 2. Предположим, что корни характеристического уравнения удовлетворяют условиям

$$\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3=\lambda_4,\ \lambda_j\neq i,\ \Im\lambda_j>0,\ j=1,2,3,4. \quad (27)$$

В этом случае будем использовать рассуждения, аналогичные предыдущим. Сначала представим уравнение (1) в виде (10), где числа μ_1, μ_2 удовлетворяют условиям (11). Общее решение уравнения (10) представляется в виде:

$$u(x,y)=\Phi_0(z+\mu_1\bar{z})+\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi_1(z+\mu_1\bar{z})+\Psi_0(z+\mu_2\bar{z})+\frac{\partial}{\partial\theta}\Psi_1(z+\mu_2\bar{z}), \quad (28)$$

где Φ_j и Ψ_j $(j=0,1)$ - функции аналитические в областях $D_1(\mu_1)$ и $D_1(\mu_2)$ соответственно. Подставим функцию (28) в граничные равенства (7). Получим

$$\mu_1\Phi_0'(z+\mu_1\bar{z})+\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-iI\right)\mu_1\Phi_1'(z+\mu_1\bar{z})+\mu_2\Psi_0'(z+\mu_2\bar{z})+ \quad (29)$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-iI\right)\mu_2\Psi_1'(z+\mu_2\bar{z})=F(z),\ \ z\in\Gamma$$

$$\Phi_0'(z+\mu_1\bar{z})+\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+iI\right)\Phi_1'(z+\mu_1\bar{z})+\Psi_0'(z+\mu_2\bar{z})+\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+iI\right)\Psi_1'(z+\mu_2\bar{z})=G(z), z\in\Gamma.$$

Используем (14) для представления функций Φ_j' Ψ_j' на окружности Γ

$$\Phi'_j(z+\mu_1\bar{z})=\varphi_j(z)+\varphi_j(\mu_1\bar{z})\equiv\sum_{k=0}^{\infty}A_{kj}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{kj}\mu_1^k\bar{z}^k, \tag{30}$$

$$\Psi'_j(z+\mu_2\bar{z})=\psi_j(z)+\psi_j(\mu_2\bar{z})\equiv\sum_{k=0}^{\infty}B_{kj}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}B_{kj}\mu_2^k\bar{z}^k,\ \ j=0,1,\quad z\in\Gamma.$$

Так как, подлежащие определению функции φ_j и ψ_j аналитичны в круге D, то они определяются своими коэффициентами Тейлора A_{kj} и B_{kj}. Для определения этих коэффициентов, подставим разложения (30) в граничные условия (29):

$$\sum_{k=0}^{\infty}A_{k0}\mu_1 z^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{k0}\mu_1^{k+1}\bar{z}^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{k1}i\mu_1(k-1)z^k-\sum_{k=0}^{\infty}A_{k1}i(k+1)\mu_1^{k+1}\bar{z}^k+ \tag{31}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}B_{k0}\mu_2 z^k+\sum_{k=0}^{\infty}B_{k0}\mu_2^{k+1}\bar{z}^k+\sum_{k=0}^{\infty}B_{k1}i\mu_2(k-1)z^k-\sum_{k=0}^{\infty}B_{k1}i(k+1)\mu_2^{k+1}\bar{z}^k=F(z),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}A_{k0}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{k0}\mu_1^k\bar{z}^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{k1}i(k+1)z^k-\sum_{k=0}^{\infty}A_{k1}i(k-1)\mu_1^k\bar{z}^k+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}B_{k0}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}B_{k0}\mu_2^k\bar{z}^k+\sum_{k=0}^{\infty}B_{k1}i(k+1)z^k-\sum_{k=0}^{\infty}B_{k1}i(k-1)\mu_2^k\bar{z}^k=G(z),|z|=1.$$

Используем разложения (18) функций F и G на окружности Γ и приравняем в (31) коэффициенты при соответствующих степенях z и $\bar{z}$. Получим системы для определения неизвестных A_{kj} и B_{kj}. При $k=0$ имеем:

$$2\mu_1A_{00}-2i\mu_1A_{01}+2\mu_2B_{00}-2i\mu_2B_{01}=F_0,\ 2A_{00}+2iA_{01}+2B_{00}+2iB_{01}=G_0. \tag{32}$$

При $k>1$ получим:

$$A_{k0}+i(k+1)A_{k1}+B_{k0}+i(k+1)B_{k1}=G_k, \tag{33}$$

$$\mu_1A_{k0}+i(k-1)\mu_1A_{k1}+\mu_2B_{k0}+i(k-1)\mu_2B_{k1}=F_k,$$

$$\mu_1^kA_{k0}-i(k-1)\mu_1^kA_{k1}+\mu_2^kB_{k0}-i(k-1)\mu_2^kB_{k1}=G_{-k},$$

$$\mu_1^{k+1}A_{k0}-i(k+1)\mu_1^{k+1}A_{k1}+\mu_2^{k+1}B_{k0}-i(k+1)\mu_2^{k+1}B_{k1}=F_{-k}.$$

Определитель основной матрицы системы (33) имеет вид:

$$\Omega_k=\det\widetilde{\Omega}_k\equiv\det\begin{pmatrix}1 & i(k+1) & 1 & i(k+1)\\ \mu_1 & i(k-1)\mu_1 & \mu_2 & i(k-1)\mu_2\\ \mu_1^k & -i(k-1)\mu_1^k & \mu_2^k & -i(k-1)\mu_2^k\\ \mu_1^{k+1} & -i(k+1)\mu_1^{k+1} & \mu_2^{k+1} & -i(k+1)\mu_2^{k+1}\end{pmatrix}. \tag{34}$$

Предположим, что $|\mu_2|\le|\mu_1|$ и положим $z=\mu_2\mu_1^{-1}$ (отметим, что из условий следует, что $|z|\le 1$ и $z\ne 1$). Тогда определитель Ω_k можно представить в виде

$$\Omega_k = -4\mu_1^{2k+2} z(1-z)^2\left(\left(\frac{1-z^k}{1-z}\right)^2 - k^2 z^{k-1}\right) \equiv -4\mu_1^{2k+2} z^k (1-z)^2 (U_{k-1}^2 - k^2). \tag{35}$$

Так как из условий теоремы следует, что $z(1-z)\neq 0$ и $\mu_1 \neq 0$, то $\Omega_k \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\Lambda_k \neq 0$. При $k\to\infty$ имеем также $\Omega_k \sim -4\mu^{2k+2}z$, то есть условие (9) может нарушаться, только для конечного числа значений k. Далее, утверждение теоремы **3** о количестве линейно независимых решений однородной задачи (1), (4) доказывается аналогично доказательству теоремы **1**. Рассмотрим неоднородную задачу (1), (4). Предположим, что граничные функции F, G принадлежат пространству $B^{(1,\alpha)}(|\mu_1|)$. Тогда, так же как и в предыдущем пункте, решая систему (33), при условиях (9) получим асимптотические формулы для коэффициентов A_{kj} и B_{kj} аналогичные (25):

$$B_{k1} \sim \frac{iC(F_{-k}-G_{-k})}{\mu_1^k},\ A_{k1} \sim \frac{iC_1(F_{-k}-G_{-k})}{\mu_1^k}, B_{k0} \sim \frac{kC(F_{-k}-G_{-k})}{\mu_1^k}, A_{k0} \sim \frac{kC_1(F_{-k}-G_{-k})}{\mu_1^k}$$

Так как граничные функции F и G принадлежат пространству $B^{(1,\alpha)}(|\mu_1|)$, то получаем, что функции $\Phi_0(z+\mu_1\bar{z})+\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi_1(z+\mu_1\bar{z})$ и $\Psi_0(z+\mu_2\bar{z})+\frac{\partial}{\partial\theta}\Psi_1(z+\mu_2 z)$ принадлежат классу $C^{(1,\alpha)}(\overline{D})$. Таким образом, построенная функция u является решением задачи (1), (4). Здесь мы также использовали связь скорости убывания коэффициентов Фурье функции и ее принадлежности пространству Гельдера с тем или иным показателем гладкости[12]. В случае, если условия (9) нарушаются при некоторых значениях k, получаем условия разрешимости задачи (1), (4), аналогичные (26). Теорема **3** доказана.

4 СЛУЧАЙ НЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим случай, когда уравнение (1) не является эллиптическим. В этом случае метод, описанный в предыдущих параграфах непосредственно не применим, так как общее решение уравнения (1) не обязательно является аналитической функцией. Поэтому мы используем подход, предложенный в[11]: "двойственность уравнение-область".

Рассмотрим однородную задачу (1), (4) ($f\equiv g\equiv 0$). Будем искать функцию u - полиномиальное решение этой задачи. Используя теорему 5.1 из[13] (гл.5 стр. 74) получаем, что многочлен u можно представить в виде

$$u(x,y)=(1-|z|^2)^2 v(x,y), \tag{36}$$

где v некоторый многочлен, подлежащий определению. Итак, задача определения полиномиального решения однородной задачи (1), (4) эквивалентна следующей. Определить многочлен v, удовлетворяющий уравнению

$$L((1-|z|^2)^2 v) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu_1 \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu_2 \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \left((1-|z|^2)^2 v(x,y)\right) = 0. \tag{37}$$

Умножим обе части (37) на $(1-|z|^2)^2 \bar{\phi}$, где $\phi \in C_0^\infty(D)$ бесконечно дифференцируемая функция с носителем в D и проинтегрируем полученное произведение по D. Получим

$$\iint_D Lu(1-|z|^2)^2 \bar{\phi} dxdy = 0.$$

Интегрируя по частям, и учитывая, что криволинейные интегралы по Γ обращаются в нуль, получим:

$$\iint_D u\overline{L^*(1-|z|^2)^2 \phi} dxdy = 0,$$

или

$$\iint_{R^2} (u\vartheta)(x,y)\overline{L^*(1-|z|^2)^2 \phi} dxdy = 0$$

Здесь ϑ - характеристическая функция единичного круга D, оператор

$$L^* = \left(\frac{\partial}{\partial z} - \bar{\mu}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} - \bar{\mu}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^2$$

сопряженный оператор к оператору L. Переходя к преобразованиям Фурье и используя теорему Планшереля, получим:

$$\iint_{R^2} U(\xi,\eta)(\zeta - \mu_1\bar{\zeta})^2 (\zeta - \mu_2\bar{\zeta})^2 (\Delta+1)^2 \bar{\Phi} d\xi d\eta = 0, \ \zeta = \xi + i\eta. \tag{38}$$

Здесь U и Φ преобразования Фурье функций $u\vartheta$ и ϕ соответственно, Δ - оператор Лапласа. Далее, опять используя интегрирование по частям, и учитывая, что Φ преобразование Фурье произвольной функции из $C_0^\infty(D)$, получим:

$$(\Delta+1)^2((\zeta - \mu_1\bar{\zeta})^2 (\zeta - \mu_2\bar{\zeta})^2 U(\xi,\eta)) = 0. \tag{39}$$

Итак, мы получили, что уравнения (37) и (39) эквивалентны, то есть каждому нетривиальному решению уравнения (37) соответствует нетривиальное решение (39) и обратно. В этом и состоит "двойственность уравнение-область" в случае единичного круга (см.[11] стр.199).

Рассмотрим уравнение (39). Общее решение этого уравнения имеет вид (см.[14], стр. 193):

$$\Theta(\zeta,\bar{\zeta}) = V_0(\zeta,\bar{\zeta}) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+2)}{(k!)^2 4^{k+1}} \int_0^{\zeta} dt \int_0^{\bar{\zeta}} (\zeta - t)^k (\bar{\zeta} - \tau)^k V_0(t,\tau) d\tau. \tag{40}$$

Здесь V_0 - общее решение уравнения

$$\Delta^2 V_0 = 0.$$

Представление V_0 в виде комбинации аналитических функций было получено в[14]. Мы будем использовать модификацию этого представления в форме ряда однородных многочленов:

$$V_0(\zeta,\bar{\zeta}) = a + \sum_{k=0}^{\infty}(a_k\zeta^{k+1} + b_k\zeta^k\bar{\zeta} + c_k\zeta\bar{\zeta}^k + d_k\bar{\zeta}^{k+1}). \tag{41}$$

Таким образом, используя (40) и (41), получим, что функция U решение уравнения (39) удовлетворяет соотношению:

$$(\zeta-\mu_1\bar{\zeta})^2(\zeta-\mu_2\bar{\zeta})^2 U(\zeta,\bar{\zeta}) = a + \sum_{k=0}^{\infty}(a_k\zeta^{k+1} + b_k\zeta^k\bar{\zeta} + c_k\zeta\bar{\zeta}^k + d_k\bar{\zeta}^{k+1}) -$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(k+2)}{(k!)^2 4^{k+1}}\int_0^{\zeta}dt\int_0^{\bar{\zeta}}(\zeta-t)^k(\bar{\zeta}-\tau)^k\left(a + \sum_{j=0}^{\infty}(a_j t^{j+1} + b_j t^j\tau + c_j t\tau^j + d_j\tau^{j+1})\right)d\tau$$

Учитывая, что левая часть этого равенства делится на однородный многочлен $(\zeta-\mu_1\bar{\zeta})^2(\zeta-\mu_2\bar{\zeta})^2$, получаем, что $a=0$ и $a_k = b_k = c_k = d_k = 0$ при $k=0,1,2$. Итак, последнее равенство примет вид:

$$(\zeta-\mu_1\bar{\zeta})^2(\zeta-\mu_2\bar{\zeta})^2 U(\zeta,\bar{\zeta}) = \sum_{j=N}^{\infty}(a_j\zeta^{j+1} + b_j\zeta^j\bar{\zeta} + c_j\zeta\bar{\zeta}^j + d_j\bar{\zeta}^{j+1}) - \tag{42}$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(k+2)}{(k!)^2 4^{k+1}}\int_0^{\zeta}dt\int_0^{\bar{\zeta}}(\zeta-t)^k(\bar{\zeta}-\tau)^k\sum_{j=N}^{\infty}(a_j t^{j+1} + b_j t^j\tau + c_j t\tau^j + d_j\tau^{j+1})d\tau.$$

Здесь $N \geq 3$ наименьший номер k, для которого $|a_k|+|b_k|+|c_k|+|d_k| \neq 0$. Однородная компонента правой части наименьшей степени имеет вид

$$\Theta_0(\zeta,\bar{\zeta}) = a_N\zeta^{N+1} + b_N\zeta^N\bar{\zeta} + c_N\zeta\bar{\zeta}^N + d_N\bar{\zeta}^{N+1}.$$

Так как левая часть (42) делится на $(\zeta-\mu_1\bar{\zeta})^2(\zeta-\mu_2\bar{\zeta})^2$, эта ненулевая функция Θ_0 должна делиться на этот многочлен, то есть коэффициенты a_N, b_N, c_N, d_N являются решением системы

$$\begin{gathered}
a_N\mu_1^{N+1} + b_N\mu_1^N + c_N\mu_1 + d_N = 0,\\
(N+1)a_N\mu_1^N + Nb_N\mu_1^{N-1} + c_N = 0,\\
a_N\mu_2^{N+1} + b_N\mu_2^N + c_N\mu_2 + d_N = 0,\\
(N+1)a_N\mu_2^N + Nb_N\mu_2^{N-1} + c_N = 0.
\end{gathered} \tag{43}$$

Так как функция Θ_0 отлична от нуля, то эта система должна иметь ненулевое решение, то есть определитель матрицы этой системы должен быть равен нулю. Учитывая определение (34), после элементарных преобразований получим, что определитель матрицы системы (43) равен $-(4\mu_1\mu_2)^{-1}\Omega_N$, следовательно, нарушение условий (9) необходимо для существования нетривиального полиномиального решения однородной задачи (1), (4). Первая часть теоремы 4 доказана.

Предположим, что условие (9) нарушается при некотором N. Построим ненулевую функцию, являющуюся решением однородной задачи (1), (4). Пусть T_N -многочлен Чебышева первого рода порядка N. Введем обозначения

$$Q_{N\sigma}(z)=(2\sqrt{\sigma})^N T_N\left(\frac{z}{2\sqrt{\sigma}}\right)=\frac{1}{2}\left(\left(z+\sqrt{z^2-4\sigma}\right)^N+\left(z-\sqrt{z^2-4\sigma}\right)^N\right), \tag{44}$$

$$P_{(N+1)\sigma}(z)=\int_1^z Q_{N\sigma}(t)dt.$$

Рассмотрим функцию

$$u_{N+1}(x,y)=C_0+A_{N0}P_{(N+1)\mu_1}(z+\mu_1\bar{z})+ \tag{45}$$

$$+A_{N1}\frac{\partial}{\partial\varphi}P_{(N+1)\mu_1}(z+\mu_1\bar{z})+B_{N0}P_{(N+1)\mu_2}(z+\mu_2\bar{z})+$$

$$+B_{N1}\frac{\partial}{\partial\varphi}P_{(N+1)\mu_2}(z+\mu_2\bar{z}),\quad z=x+iy.$$

Эта функция, многочлен порядка $N+1$, является решением уравнения (1). Для определения постоянных C_0, A_{Nj}, B_{Nj} ($j=0,1$) подставим функцию u_{N+1} в однородные граничные условия (7). Имеем, аналогично (13):

$$A_{N0}\mu_1 Q_{N\mu_1}(t+\mu_1\bar{t})+A_{N1}\mu_1\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}-iI\right)Q_{N\mu_1}(t+\mu_1\bar{t})+ \tag{46}$$

$$+B_{N0}\mu_2 Q_{N\mu_2}(t+\mu_2\bar{t})+B_{N1}\mu_2\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-iI\right)Q_{N\mu_2}(t+\mu_2\bar{t})=0,$$

$$A_{N0}Q_{N\mu_1}(t+\mu_1\bar{t})+A_{N1}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+iI\right)Q_{N\mu_1}(t+\mu_1\bar{t})+ \tag{47}$$

$$+B_{N0}Q_{N\mu_2}(t+\mu_2\bar{t})+B_{N1}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+iI\right)Q_{N\mu_2}(t+\mu_2\bar{t})=0,\ t\bar{t}=1.$$

Из (44) следует, что на единичной окружности выполняется равенство:

$$Q_{N\sigma}(t+\sigma\bar{t})=2^{N-1}(t^N+\sigma^N\bar{t}^N),$$

поэтому соотношения (46), (47) примут вид:

$$A_{N0}\mu_1\left(t^N+\mu_1^N\bar{t}^N\right)+A_{N1}\mu_1\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-iI\right)\left(t^N+\mu_1^N\bar{t}^N\right)+ \tag{48}$$

$$+B_{N0}\mu_2\left(t^N+\mu_2^N\bar{t}^N\right)+B_{N1}\mu_2\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-iI\right)\left(t^N+\mu_2^N\bar{t}^N\right)=0,$$

$$A_{N10}\left(t^N+\mu_1{}^N\bar{t}^N\right)+A_{N1}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+iI\right)\left(t^N+\mu_1{}^N\bar{t}^N\right)+ \tag{49}$$

$$+B_{N0}\left(t^N+\mu_2{}^N\bar{t}^N\right)+B_{N1}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+iI\right)\left(t^N+\mu_2{}^N\bar{t}^N\right)=0,\ t\bar{t}=1.$$

Используя равенства

$$\frac{\partial}{\partial\theta}t^N=iNt^N,\ \ \frac{\partial}{\partial\theta}\bar{t}^N=-iN\bar{t}^N,$$

уравнения (48), (49) представим в виде:

$$A_{N0}\mu_1 t^N+A_{N0}\mu_1^{N+1}\bar{t}^N+A_{N1}\mu_1 i(N-1)t^N-A_{N1}\mu_1^{N+1}i(N+1)\bar{t}^N+ \tag{50}$$

$$+B_{N0}\mu_2 t^N+B_{N0}\mu_2^{N+1}\bar{t}^N+B_{N1}\mu_2 i(N-1)t^N-B_{N1}\mu_2^{N+1}(N+1)\bar{t}^N=0,$$

$$A_{N0}t^N+A_{N0}\mu_1^N\bar{t}^N+A_{N1}i(N+1)t^N-A_{N1}i(N-1)\mu_1^N\bar{t}^N+ \tag{51}$$

$$+B_{N0}t^N+B_{N0}\mu_2^N\bar{t}^N+B_{N1}i(N+1)t^N-B_{N1}i(N-1)\mu_2^N\bar{t}^N=0,\ t\bar{t}=1.$$

В уравнениях (50), (51), приравнивая к нулю коэффициенты при t^N и $\bar{t}^N$, получим однородную систему (33) при $k=N$. Так как условие (9) нарушается при $k=N$, то определитель этой системы обращается в нуль, и, следовательно, имеем ненулевые коэффициенты A_{Nj}, B_{Nj}, удовлетворяющие этой системе. Фиксируя эти коэффициенты, последнюю неизвестную в (45) - постоянную C_0, получим из однородного условия (7) $u_{N+1}(1,0)=0$.

Итак, подставляя все найденные коэффициенты в (45), получаем ненулевой многочлен u_{N+1} - решение однородной задачи (1), (4). Таким образом, однородная задача (1), (4) имеет нетривиальное полиномиальное решение тогда и только тогда, когда при некотором N нарушается условие (9). Теорема **4** доказана.

REFERENCES

[1] J.-L. Lions and E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications,* Dunod. Paris, Vol. I, (1968).

[2] N.E.Tovmasyan, *Non-Regular Differential Equations and Calculations of Electromagnetic Fields,* World Scientific, (1998).

[3] A.O. Babayan, “On the Unique Solvability of Dirichlet Problem for One Class of the Fourth Order Elliptic Equations”*, Izvestiya NAN Armenii, matematika*, **34**, №**5**, 1-15 (1999).

[4] A.V.Bicadze, *Kraevye zadachi dlya ellipticheskih uravnenij vtorogo poryadka*, Nauka, (1966).

[5] N.E.Tovmasyan, “Novye postanovki i issledovaniya pervoj, vtoroj i tretjej kraevyh zadach dlya silno svyazannyh ellipticheskih sistem dvuh differencialnyh uravnenij vtorogo porjadka s postoyannymi koefficientami”, *Izvestija AN ArmSSR, serija matematika*, **3**, №**6**, 497-521, (1968).

[6] A.P. Soldatov, “Dirichlet Problem for Elliptic Systems on the Plane, *Izvestiya NAN Armenii,*

matematika", **40**, №**6**, 54-70 (2005).
[7] E.A. Burjachenko, "O edinstvennosti resheniya zadachi Dirichlet v kruge dlya differencialnyh uravnenij chetvertogo poryadka v vyrojdennyh sluchayah". *Nelinejnye granichnye zadachi*, Doneck, **10**, 44-49 (2000).
[8] H. Begehr and A. Kumar, "Boundary Value Problems for the Inhomogenuous Polyanalytic Equation 1", *Analysis*, **25**, 55-71 (2005).
[9] A.O.Babayan, "Dirichlet Problem for Properly Elliptic Equation in the Unit Disk", *Izvestiya NAN Armenii, matematika*, **38**, №**6**, 39-48 (2003).
[10] A.O. Babayan, "O zadache Dirihle dlya nepravilno ellipticheskogo uravneniya chetvertogo poryadka", *Neklassicheskije uravnenija matematicheskoj fiziki*, *Novosibirsk*, 56-69 (2007).
[11] V.P. Burskij, *Metody issledovanija granichnyh zadach dlya obshix differencialnyh uravnenij,* Naukova dumka, (2002)
[12] N.K. Bari, *Trigonometricheskie ryady*, FML, (1961).
[13] S. Axler, P. Bourdon and W. Ramay, *Harmonic function theory*, Springer-Verlag, (2001).
[14] I.N. Vekua, *Novye metody resheniya ellipticheskih uravnenij*, OGIZ, Gostexizdat, (1948).
[15] H. Bateman and A.Erdelyi, *Higher Transcendental Functions*, Mc Graw-Hill Book Company, INC, v.1,2, (1953).

Поступила в редакцию 1.11.2014.