

Посвящается 80-летию профессора В. И. Гаврилова

## О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЯДОВ ПО ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЕ УОЛША

С.А. ЕПИСКОПОСЯН

Национальный политехнический университет Армении  
Ереван, Армения  
e-mail: sergoep@ysu.am

**Ключевые слова:** обобщенная система Уолша, нуль-ряд, весовое пространство.

**Аннотация.** Рассматриваются весовые пространства  $L^1_\mu[0,1]$  и вопрос единственности представлений функций этих классов рядами по обобщенной системе Уолша.

## ON UNIQUENESS OF SERIES WITH GENERALIZED WALSH SYSTEM

S.A. EPISKOPOSIAN

National Engineering University of Armenia  
Yerevan, Armenia  
e-mail: sergoep@ysu.am

**Summary.** Issues concerning a weighted  $L^1_\mu$  spaces and the question of the uniqueness of the representation of functions of these classes by series in the generalized Walsh system.

## 1 ВВЕДЕНИЕ

Одним из направлений теории ортогональных рядов является проблема единственности представления функции рядом по некоторой ортогональной системе функций. Изучение вопроса единственности представления функции в виде ряда по системе ортогональных функций впервые началось в теории тригонометрических рядов.

Вопросы единственности представления функции сходящимся к ней рядами тесно связаны с так называемым  $U$  и  $M$  множествами, которые определяются следующим образом:

**Определение 1.** Множество  $E \subset [0, 2\pi]$  называется  $U$ -множеством или множеством единственности для тригонометрической системы, если тригонометрический ряд, сходящийся к нулю во всякой точке  $(0, 2\pi] \setminus E$ , есть ряд нулей. Множество, не являющееся  $U$ -множеством, называется множеством неединственности, или  $M$ -множеством.

В 1870 году Г. Кантор показал, что конечное (а также пустое) множество является  $U$ -множеством, доказав первую теорему единственности (см. [1]).

**Теорема А (Кантора).** Если тригонометрический ряд сходится к нулю всюду на  $[0, 2\pi]$ , кроме конечного множества точек, то этот ряд является тождественно нулевым, то есть все его коэффициенты равны нулю.

Согласно теореме Кантора не существует двух различных тригонометрических рядов, сходящихся всюду на отрезке  $[0, 2\pi]$ , кроме, быть может, конечного числа точек, к одной и той же конечной функции.

В 1909 году У. Юнг, в работе [2], улучшил этот результат, показав, что теорема Кантора остаётся в силе, если требовать сходимости ряда только вне счётного множества.

Полученные Г. Кантором и У. Юнгом множества единственности имеют меру нуль. До 1916 года существовала гипотеза, что любое множество меры нуль является  $U$ -множеством. Эта гипотеза в 1916г. была опровергнута Д. Е. Меньшовым [3]. Он для тригонометрической системы, построил первый пример совершенного  $M$ -множества меры нуль. Далее напомним определение так называемого нуль – ряда:

**Определение 2.** Пусть  $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$  - некоторая система функций, определенных на  $[0, 1]$ .

Тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(t) \quad (1)$$

называется нуль – рядом в смысле сходимости почти всюду ( по мере, по  $L^1_\mu$ - метрике), если ряд (1) сходится к нулю почти всюду ( соответственно по мере, по  $L^1_\mu$ - метрике), хотя не все ее коэффициенты равны нулю.

Первый тригонометрический нуль – ряд, в смысле сходимости почти всюду, был построен Д.Е.Меньшовым. Далее А.А. Талалян [4] доказал существование нуль – рядов, по произвольной ортонормированной полной в  $L^2$  системе, в смысле сходимости по мере.

Как показал Б.С.Кашин [5], здесь нельзя заменить сходимостью по мере сходимостью почти всюду.

А.А.Шнейдер [6] доказал, что аналогичные результаты справедливы и для рядов по системе Уолша в нумерации Пэли.

Очевидно, что нельзя построить нуль – ряд в смысле сходимости по метрике  $L^1$ . Но тем не менее, в некоторых весовых пространствах  $L^1_\mu$  возможно построить нуль – ряды по некоторым системам. В работах [7] и [8] доказаны существование таких рядов по тригонометрической системе и по классической системе Уолша. В настоящей работе рассматриваются аналогичные вопросы для обобщенной системы Уолша.

Теперь напомним определение обобщенной системы Уолша [9]. Пусть  $a \geq 2$  фиксированное целое число и  $\omega_a = e^{\frac{2\pi}{a}}$ .

Как и в классическом случае сперво определим обобщенную систему Радемахера:

**Определение 3.** Возьмем

$$\varphi_0(x) = \omega_a^k, \quad x \in \left[ \frac{k}{a}, \frac{k+1}{a} \right), \quad k = 0, 1, \dots, a-1$$

и для  $n \geq 0$  положим

$$\varphi_n(x+1) = \varphi_n(x) = \varphi_0(a^n x).$$

Тогда обобщенная система Уолша или система Кристенсона-Леви порядка  $a$  определяется следующим образом:

**Определение 4.** Положим  $\psi_0(x) = 1$ . Если

$$n = \alpha_1 a^{n_1} + \dots + \alpha_s a^{n_s}, \quad n_1 > n_2 > \dots > n_s, \quad s = 1, 2, \dots,$$

где  $0 \leq \alpha_j < a$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ , то

$$\psi_n(x) = \varphi_{n_1}^{\alpha_1}(x) \cdot \dots \cdot \varphi_{n_s}^{\alpha_s}(x).$$

Система  $\Psi_a$  - есть обобщенная система Уолша порядка  $a$ . Отметим, что  $\Psi_2$  является классической системой Уолша, а система  $\Psi_a$  является частным случаем системы Виленкина.

**Замечание.** Обобщенная система Уолша  $\Psi_a$ ,  $a \geq 2$  является полной ортонормированной системой в  $L^2[0,1)$  (см. [9]).

Основные свойства системы  $\Psi_a$  получены Г.Кристенсоном, Р. Пели, Ж. Файном, К. Ватари, Н. Виленкиным и другими математиками (см. [10]- [15]).

Имеет место следующее утверждение:

**Теорема 1.** Для любого  $\varepsilon > 0$  существует измеримая функция

$$\mu(x), \quad 0 < \mu(x) \leq 1, \quad |\{x \in [0,1]: \mu(x) \neq 1\}| < \varepsilon,$$

такая, что в весовом пространстве  $L^1_\mu[0,1)$  можно построить нуль - ряд по обобщенной системе Уолша, а именно существует ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k \psi_k(x) \text{ с } \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 > 0,$$

который сходится к нулю по метрике  $L^1_\mu[0,1)$  т.е.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=0}^m C_k \psi_k(x) \right| \mu(x) dx = 0.$$

Теорема 1 следуют из более сильной теоремы, формулировка которой такова:

**Теорема 2.** Пусть  $\omega(t)$  некоторая непрерывная функция, неубывающая на  $[0, \infty)$  и  $\omega(+0) = 0$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует измеримая функция

$$\mu(x), \quad 0 < \mu(x) \leq 1, \quad |\{x \in [0,1]: \mu(x) \neq 1\}| < \varepsilon,$$

такая, что для любой функции  $f(x) \in L^1_\mu[0,1)$  можно найти ряд по обобщенной системе Уолша, вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k \psi_k(x) \text{ с } 0 < \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 \omega(|C_k|) < \infty,$$

который сходится к  $f(x)$  по метрике  $L^1_\mu[0,1)$  т.е.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=0}^m C_k \psi_k(x) - f(x) \right| \mu(x) dx = 0.$$

## 2 ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ ЛЕММ

Ниже приведем некоторые свойства систем  $\Phi_a$  и  $\Psi_a$ :

Обозначим интервал ранга  $n$  относительно  $a$  следующим образом:

$$\Delta_k^{(n)} = \Delta_k^{(n)}(a) = \left[ \frac{k}{a^n}, \frac{k+1}{a^n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, a^n - 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

**А).** Если  $\varphi_n(x)$ ,  $n$ -ая функция Радемахера порядка  $a$ , то из Определения 3 следует

$$\varphi_n(x) = \omega_a^k = e^{\frac{2\pi k}{a}}, \quad x \in \Delta_k^{(n+1)} = \left[ \frac{k}{a^{n+1}}, \frac{k+1}{a^{n+1}} \right). \quad (2)$$

**В).** Каждая  $n$ -ая функция Радемахера имеет период  $\frac{1}{a^n}$  и

$$\varphi_n(x) = \text{const} \in \Omega_a = \{1, \omega_a, \omega_a^2, \dots, \omega_a^{a-1}\},$$

при  $x \in \Delta_{n+1}^{(k)}$ ,  $k = 0, \dots, a^{n+1} - 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

Нетрудно видеть, что

$$(\varphi_n(x))^k = (\varphi_n(x))^m, \quad \forall n, k \in \mathbf{N}, \text{ где } m = k \pmod{a}$$

**С).** Из Определения 4 имеем

$$\psi_i(x) \cdot \psi_j(a^s x) = \psi_{j \cdot a^s + i}(x), \quad \text{где } 0 \leq i, j < a^s \quad (3)$$

и в частности

$$\psi_{a^k + j}(x) = \varphi_k(x) \cdot \psi_j(x), \quad \text{где } 0 \leq j \leq a^k - 1.$$

**А).** Для любого натурального  $n$ , функция Уолша  $\psi_n(x)$  состоит из конечного произведения функций Радемахера и принимает значения из  $\Omega_a$ .

**В).** Пусть  $\omega_a = e^{2\pi i/a}$ . Тогда для любого натурального числа  $m$  имеем

$$\sum_{k=0}^{a-1} \omega_a^{k \cdot m} = \begin{cases} a, & \text{если } m \equiv 0 \pmod{a}, \\ 0, & \text{если } m \not\equiv 0 \pmod{a}. \end{cases} \quad (4)$$

**Г).** Далее, для любых  $m = 1, 2, \dots$  и  $1 \leq k \leq a^m$  рассмотрим функцию

$$I_m^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in [0, 1] \setminus \Delta_m^{(k)}, \\ 1 - a^{-m}, & \text{при } x \in \Delta_m^{(k)}, \end{cases} \quad (5)$$

и продолжим функцию периодической на  $R^1$  с периодом 1. Через  $\chi_E(x)$  обозначим характеристическую функцию множества  $E$ , т.е.

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in E, \\ 0, & \text{при } x \notin E. \end{cases} \quad (6)$$

**Лемма 1.** Для функций  $I_m^{(k)}(x)$  и  $\chi_{\Delta_m^{(k)}}(x)$  имеет место следующее:

$$1) \quad \chi_{\Delta_m^{(k)}}(x) = \sum_{i=0}^{a^m-1} a_i \left( \chi_{\Delta_m^{(k)}} \right) \psi_i(x),$$

$$2) \quad I_m^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{a^m-1} b_i(I_m^{(k)}) \psi_i(x),$$

где коэффициенты Фурье вычисляются следующим образом

$$a_i(\mathcal{X}_{\Delta_m^{(k)}}) = \int_0^1 \mathcal{X}_{\Delta_m^{(k)}}(t) \cdot \overline{\psi_i}(t) dt = \begin{cases} 0, & \text{при } i \geq a^m, \\ \frac{\mathfrak{Z}}{a^m}, & \text{при } 0 \leq i < a^m. \end{cases}$$

$$3) \quad b_i(I_m^{(k)}) = \int_0^1 I_m^{(k)}(t) \cdot \overline{\psi_i}(t) dt = \begin{cases} 0, & \text{при } i = 0 \text{ и } i \geq a^m, \\ -\mathfrak{Z}, & \text{при } 0 \leq i < a^m. \end{cases}$$

где  $\mathfrak{Z} = \text{const} \in \Omega_a = \{1, \omega_a, \omega_a^2, \dots, \omega_a^{a-1}\}$  и  $|\mathfrak{Z}| = 1$ .

**Доказательство .** Очевидно, что

$$I_m^{(k)}(x) = \psi_0(x) - a^m \cdot \mathcal{X}_{\Delta_m^{(k)}}(x). \quad (7)$$

Вычислим коэффициент Фурье функции  $\mathcal{X}_{\Delta_m^{(k)}}(x)$ :

$$a_i(\mathcal{X}_{\Delta_m^{(k)}}) = \int_0^1 \mathcal{X}_{\Delta_m^{(k)}}(t) \cdot \overline{\psi_i}(t) dt = \int_{\Delta_m^{(k)}} \overline{\psi_i}(t) dt. \quad (8)$$

1) Если  $i \geq a^m$ , то  $i = a^m + j$ ,  $0 < j < a^m$ , следовательно из (3.5) имеем

$$\overline{\psi_i}(t) = \overline{\varphi_m}(t) \cdot \overline{\psi_j}(t). \quad (9)$$

Учитывая, что каждом интервале  $\Delta_m^{(k)}$ ,  $0 \leq k < a^m$

$$\overline{\psi_j}(t) = \mathfrak{Z} = \text{const} \in \Omega_a \text{ и } |\mathfrak{Z}| = 1,$$

то из (4) и (6) получим

$$a_i(\mathcal{X}_{\Delta_m^{(k)}}) = \mathfrak{Z} \cdot \int_{\Delta_m^{(k)}} \overline{\varphi_m}(t) dt = \mathfrak{Z} \cdot \sum_{s=0}^{a-1} \int_{\Delta_{m+1}^{(s)}} \omega_a^s dt = \mathfrak{Z} \cdot \frac{1}{a^{m+1}} \cdot \sum_{s=0}^{a-1} \omega_a^s = 0. \quad (10)$$

Если  $0 \leq i < a^m$ , то  $\overline{\psi_j}(t) = \mathfrak{Z} = \text{const} \in \Omega_a$ , следовательно,

$$a_i(\mathcal{X}_{\Delta_m^{(k)}}) = \mathfrak{Z} \cdot |\Delta_m^{(k)}| = \frac{\mathfrak{Z}}{a^m}. \quad (11)$$

Таким образом условия 1) и 3) Леммы 1 выполнены. Докажем условия 2) и 4). Из Определения 2.1.2 и (2.54) имеем

$$b_i(I_m^{(k)}) = \int_0^1 I_m^{(k)}(t) \cdot \overline{\psi_i}(t) dt =$$

$$= \int_0^1 \psi_0(t) \cdot \overline{\psi_i}(t) dt - a^m \cdot \int_0^1 \chi_{\Delta_m^{(k)}}(t) \cdot \overline{\psi_i}(t) dt = I_1 - a^m \cdot I_2. \quad (12)$$

Так как система  $\Psi_a$  является ортонормированной системой на  $[0,1)$ , то имеем

$$I_1 = \begin{cases} 0, & \text{при } i > a^m, \\ 0, & \text{при } i = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Из условий (10), (11) получим

$$I_2 = \begin{cases} 0, & \text{при } i > a^m, \\ \frac{1}{a^m}, & \text{при } i = 0, \\ \frac{s}{a^m}, & \text{при } 1 \leq i < a^m. \end{cases} \quad (14)$$

Из условий (13), (14) получим условие 4) Леммы .

**Лемма 1 доказана.**

**Лемма 2.** Для любых данных чисел  $\gamma \neq 0$ ,  $N_0 \in \mathbf{N}$ ,  $\varepsilon \in (0,1)$  и интервала ранга  $a$  вида

$\Delta_m^{(i)} = \left[ \frac{i-1}{2^m}, \frac{i}{2^m} \right]$ ,  $1 \leq i \leq 2^m$ , существуют измеримое множество  $E \subset \Delta$  и полином  $P(x)$

по системе  $\Psi_a$  вида

$$P(x) = \sum_{k=N_0}^N c_k \psi_k(x)$$

удовлетворяющие условиям:

$$|E| > |\Delta| \cdot (1 - \varepsilon)$$

$$P(x) = \begin{cases} \gamma, & \text{при } x \in E, \\ 0, & \text{вне } \Delta. \end{cases}$$

$$\left[ \sum_{k=N_0}^N c_k^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq a \cdot |\gamma| \cdot \sqrt{\frac{|\Delta|}{\varepsilon}}$$

**Доказательство.** Положим

$$v_0 = \left[ \log_a \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1, \quad s = [\log_a N_0] + m \quad (15)$$

Определим коэффициенты  $c_n, a_i, b_j$  и полином  $P(x)$  следующим образом:

$$P(x) = \gamma \cdot \chi_{\Delta_m^{(k)}}(x) \cdot I_{v_0}^{(1)}(a^s x), \quad x \in [0, 1], \quad (16)$$

$$c_n = c_n(P) = \int_0^1 P(x) \overline{\psi}_n(x) dx, \quad \forall n \geq 0,$$

$$a_i = a_i(\chi_{\Delta_m^{(k)}}), \quad 0 \leq i < a^m, \quad b_j = b_j(I_{v_0}^{(1)}), \quad 1 \leq j < a^{v_0}.$$

Применяя Лемму 1 и учитывая (3) для  $P(x)$  получим

$$\begin{aligned} P(x) &= \gamma \cdot \sum_{i=0}^{a^m-1} a_i \psi_i(x) \cdot \sum_{j=1}^{a^{v_0}-1} b_j \psi_j(a^s x) = \\ &= \gamma \cdot \sum_{j=1}^{a^{v_0}-1} b_j \cdot \sum_{i=0}^{a^m-1} a_i \psi_{j \cdot a^s + i}(x) = \sum_{k=N_0}^N c_k \psi_k(x), \end{aligned}$$

где

$$c_k = c_k(P) = \begin{cases} -\frac{K \cdot \gamma}{a^m} \text{ или } 0, & \text{при } k \in [N_0, N], \\ 0, & \text{при } k \notin [N_0, N], \end{cases} \quad (17)$$

$$K \in \Omega_a, \quad |K| = 1, \quad N = a^{s+v_0} + a^m - a^s - 1. \quad (18)$$

Положим

$$E = \{x \in \Delta : P(x) = \gamma\}.$$

Из (6), (7) и (16) имеем

$$|E| = a^{-m}(1 - a^{-v_0}) > (1 - \varepsilon)|\Delta|,$$

$$P(x) = \begin{cases} \gamma, & \text{при } x \in E, \\ \gamma(1 - a^{-v_0}), & \text{при } x \in \Delta \setminus E, \\ 0, & \text{при } x \notin \Delta. \end{cases}$$

Отсюда, и из (15) имеем

$$\int_0^1 |P(x)| dx = 2 \cdot |\gamma| |\Delta| \cdot (1 - a^{-v_0})$$

Учитывая соотношения (15), (17) и (18) получим



$$\begin{aligned} \max_{N_0 \leq m \leq N} \int_0^1 \left| \sum_{k=N_0}^m c_k \psi_k(x) \right| dx &< \left[ \int_0^1 |P(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[ \sum_{k=N_0}^N c_k^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= |\gamma| \cdot |\Delta| \cdot \sqrt{a^{v_0+s} + a^m} = |\gamma| \cdot \sqrt{|\Delta|} \cdot \sqrt{a^{v_0} + 1} < \\ &< |\gamma| \cdot \sqrt{|\Delta|} \cdot \sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} < a \cdot |\gamma| \cdot \sqrt{\frac{|\Delta|}{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

**Лемма 2 доказана.**

**Лемма 3.** Пусть  $\omega(t)$  некоторая непрерывная функция, неубывающая на  $[0, \infty)$  и  $\omega(+0) = 0$ . Тогда для любых чисел  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $N_0 > 2$  и ступенчатой функции

$$f(x) = \sum_{s=1}^q \gamma_s \cdot \chi_{\Delta_s}(x), \quad (19)$$

где  $\Delta_s$  интервалы вида  $\Delta_m^{(i)} = \left[ \frac{i-1}{2^m}, \frac{i}{2^m} \right]$ ,  $1 \leq i \leq 2^m$ , существуют измеримое множество  $E \subset [0, 1]$  и полином  $P(x)$  вида

$$P(x) = \sum_{k=N_0}^N c_k W_k(x)$$

которые удовлетворяют следующим условиям:

1.  $P(x) = f(x)$  на  $E$ ,
2.  $|E| > 1 - \varepsilon$
3.  $0 < \sum_{k=N_0}^N |c_k|^2 \cdot \omega(|c_k|) < \varepsilon$

$$4. \max_{N_0 \leq m < N} \left[ \int_e \left| \sum_{k=N_0}^m c_k \psi_k(x) \right| dx \right] < \varepsilon + \int_e |f(x)| dx.$$

для любого измеримого подмножества  $e$  из  $E$ .

**Доказательство.** Пусть  $0 < \varepsilon < 1$  любое число. Тогда для любого положительного  $\eta$ , удовлетворяющая условию,

$$\eta < \frac{\varepsilon^2}{a^2} \cdot \left( \int_0^1 f^2(x) dx \right)^{-1},$$

по определению функции  $\omega(t)$ , существует положительное число  $\delta < \varepsilon$  такого, что для любого  $t$ ,  $0 < t < \delta$  имеем

$$\omega(t) < \omega(\delta) < \eta. \quad (20)$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$a \cdot |\gamma_s| \cdot \sqrt{\frac{|\Delta_s|}{\varepsilon}} < \delta, \quad s = 1, 2, \dots, q. \quad (21)$$

Последовательно применяя Лемму 2, можно определить множества  $E_s \in \Delta_s$  и полиномы  $P_s(x)$  вида

$$P_s(x) = \sum_{k=N_{s-1}}^{N_s-1} c_k^{(s)} \psi_k(x), \quad s = 1, 2, \dots, q \quad (22)$$

которые удовлетворяют условиям:

$$|E_s| > |\Delta_s| \cdot (1 - \varepsilon), \quad (23)$$

$$P_s(x) = \begin{cases} \gamma_s, & x \in E_s \subset \Delta_s, \\ 0, & x \notin \Delta_s, \end{cases} \quad s = 1, 2, \dots, q. \quad (24)$$

$$\left( \sum_{k=N_{s-1}}^{N_s-1} |c_k^{(s)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq a \cdot |\gamma_s| \cdot \sqrt{\frac{|\Delta_s|}{\varepsilon}}, \quad s = 1, 2, \dots, q. \quad (25)$$

Определим множество  $E$  и полином  $P(x)$  следующим образом:

$$E = \bigcup_{s=1}^q E_s, \quad (26)$$

$$P(x) = \sum_{k=N_0}^N c_k \psi_k(x) = \sum_{s=1}^q \left[ \sum_{k=N_{s-1}}^{N_s-1} c_k^{(s)} \psi_k(x) \right], \quad (27)$$

где

$$c_k = c_k^{(s)} \quad \text{при} \quad N_{s-1} \leq k < N_s, \quad s = 1, 2, \dots, q, \quad N = N_q - 1. \quad (28)$$

Из (19), (23), (24), (26) и (27) получаем

$$P(x) = f(x) \quad \text{на} \quad E.$$

$$|E| > 1 - \varepsilon.$$

Учитывая соотношения (21), (25), (28) для любого  $k \in [N_0, N]$  имеем

$$|c_k| \leq \max_{1 \leq s \leq q} \left[ a \cdot |\gamma_s| \cdot \sqrt{\frac{|\Delta_s|}{\varepsilon}} \right] < \delta. \quad (29)$$

Отсюда и из (20) следует

$$\omega(|c_k|) < \omega(\delta) < \eta, \quad \forall k \in [N_0, N].$$

И учитывая (21) и (25) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=N_0}^N |c_k|^2 \cdot \omega(|c_k|) &< \eta \cdot \sum_{s=1}^q \left[ \sum_{k=N_{s-1}}^{N_s-1} |c_k^{(s)}|^2 \right] < \\ &< \eta \cdot \frac{a}{\varepsilon} \cdot \left[ \int_0^1 f^2(x) dx \right] < \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом условия 1) - 3) Леммы 3 выполнены. Проверим, теперь выполнение условие 4).

Пусть  $N_0 \leq m < N$ , тогда для некоторого  $s_0$ ,  $1 \leq s_0 \leq q$ ,  $(N_{s_0} \leq m < N_{s_0+1})$  следует (см. (27) и (28))

$$\sum_{k=N_0}^m c_k \psi_k(x) = \sum_{s=1}^{s_0} \left[ \sum_{k=N_{s-1}}^{N_s-1} c_k^{(s)} \psi_k(x) \right] + \sum_{k=N_{s_0}}^m c_k^{(s_0)} \psi_k(x) \quad (30)$$

Учитывая выбор  $\delta$  и то, что  $P(x) = f(x)$  на  $E$ , то из соотношений (21), (25), (27) и (30), для любого измеримого множества  $e \subset E$  имеем

$$\begin{aligned} \int_e \left| \sum_{k=N_0}^m c_k \psi_k(x) \right| dx &= \int_e \left| \sum_{s=1}^{s_0} \left( \sum_{k=N_{s-1}}^{N_s-1} c_k^{(s)} \psi_k(x) \right) \right| dx + \\ &+ \int_0^1 \left| \sum_{k=N_{s_0}}^m c_k^{(s_0)} \psi_k(x) \right| dx \leq \int_e |f(x)| dx \\ &+ a \cdot |\gamma_{s_0+1}| \cdot \sqrt{\frac{|\Delta_{s_0+1}|}{\varepsilon}} < \int_e |f(x)| dx + \varepsilon. \end{aligned}$$

### 3 ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

**Доказательство Теоремы 2.** Пусть  $\omega(t)$  некоторая непрерывная функция, неубывающая на  $[0, \infty)$  и  $\omega(+0) = 0$ . Если обозначим через

$$\{f_s(x)\}_{s=1}^{\infty}, \quad x \in [0, 1] \quad (31)$$

последовательность всех ступенчатых функций с рациональными значениями и конечными точками интервалов постоянства. Последовательно применяя Лемму 3, можем определить последовательности множеств  $\{E_s\}_{s=1}^{\infty}$  и полиномов

$$P_s(x) = \sum_{k=N_{s-1}}^{N_s-1} c_k^{(s)} \psi_k(x), \quad 1 = N_0 < N_1 < \dots < N_s < \dots, \quad (32)$$

удовлетворяющие условиям:

$$|E_s| > 1 - 2^{-2(s+1)}, \quad E_s \subset [0,1), \quad (33)$$

$$P_s(x) = f_s(x), \quad x \in E_s, \quad (34)$$

$$0 < \sum_{k=N_{s-1}}^{N_s-1} |c_k^{(s)}| \cdot \omega(|c_k^{(s)}|) < 2^{-2s}, \quad (35)$$

$$\max_{N_{s-1} \leq p < N_s} \left[ \int_e \left| \sum_{k=N_{s-1}}^p c_k^{(s)} \psi_k(x) \right| dx \right] \leq 2^{-2(s+1)} + \int_e |f_s(x)| dx, \quad (36)$$

для любого измеримого подмножества  $e$  из  $E_s$ .

Пусть  $\varepsilon$  любое положительное число.

Положим

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_n = \bigcap_{s=n}^{\infty} E_s, \quad n = 1, 2, \dots, \\ E = \Omega_{n_0} = \bigcap_{s=n_0}^{\infty} E_s, \quad n_0 = [\log_{1/2} \varepsilon] + 1, \\ B = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} \Omega_n = \Omega_{n_0} \cup \left[ \bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} \Omega_n \setminus \Omega_{n-1} \right]. \end{array} \right. \quad (37)$$

Очевидно, что (см. (33))  $|B| = 1$  и  $|E| > 1 - \varepsilon$ .

Определим функцию  $\mu(x)$  следующим образом:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in E \cup ([0,1) \setminus B), \\ \mu_n, & \text{при } x \in \Omega_n \setminus \Omega_{n-1}, \quad n \geq n_0 + 1, \end{cases} \quad (38)$$

где

$$\begin{cases} \mu_n = \left[ 2^{2n} \prod_{s=1}^n h_s \right]^{-1}, \\ h_s = \|f_s(x)\|_C + \max_{N_{s-1} \leq m < N_s} \left\| \sum_{k=N_{s-1}}^p c_k^{(s)} \psi_k(x) \right\|_C + 1. \end{cases} \quad (39)$$

где  $\|g(x)\|_C = \max_{x \in [0,1]} |g(x)|$ .

Из (35), (37) - (39) получим что

(а)  $0 < \mu(x) \leq 1$ ,  $\mu(x)$ - измеримая функция со свойством и  $|x \in [0,1]: \mu(x) \neq 1| < \varepsilon$ .

Учитывая соотношения (37)- (39) для всех  $s \geq n_0$  и  $p \in [N_{s-1}, N_s)$  получим

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1) \setminus \Omega_s} \left| \sum_{k=N_{s-1}}^p c_k^{(s)} \psi_k(x) \right| \mu(x) dx = \\ & = \sum_{n=s+1}^{\infty} \left[ \int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} \left| \sum_{k=N_{s-1}}^p c_k^{(s)} \psi_k(x) \right| \mu_n dx \right] \leq \\ & \leq \sum_{n=s+1}^{\infty} 2^{-2n} \left[ \int_0^1 \left| \sum_{k=N_{s-1}}^p c_k^{(s)} \psi_k(x) \right| \cdot h_s^{-1} dx \right] < \frac{1}{3} \cdot 2^{-2s}. \end{aligned} \quad (40)$$

В силу условий (34), (37)- (39) для всех  $s \geq n_0$  имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |P_s(x) - f_s(x)| \mu(x) dx = \int_{\Omega_s} |P_s(x) - f_s(x)| \mu(x) dx + \\ & + \int_{[0,1) \setminus \Omega_s} |P_s(x) - f_s(x)| \mu(x) dx \leq 2^{-2(s+1)} + \\ & + \sum_{n=s+1}^{\infty} \int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} |P_s(x) - f_s(x)| \mu_n dx < 2^{-2(s+1)} + \\ & + \sum_{n=s+1}^{\infty} 2^{-4s} \int_0^1 \left( \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{N_s-1} c_k^{(s)} \psi_k(x) \right| + |f_s(x)| \right) \cdot h_s^{-1} dx < \\ & < 2^{-2(s+1)} + 2^{-4s} < 2^{-2s}. \end{aligned} \quad (41)$$

Учитывая (а), (36) - (40) для всех  $p \in [N_{s-1}, N_s)$  и  $s \geq n_0 + 1$  получим

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \left| \sum_{k=N_{s-1}}^p c_k^{(s)} \psi_k(x) \right| \mu(x) dx = \int_{\Omega_s} \left| \sum_{k=N_{s-1}}^p c_k^{(s)} \psi_k(x) \right| \mu(x) dx + \\
 & + \int_{[0,1] \setminus \Omega_s} \left| \sum_{k=N_{s-1}}^p c_k^{(s)} \psi_k(x) \right| \mu(x) dx \leq \\
 & \leq \sum_{n=n_0+1}^s \left[ \int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} \left| \sum_{k=N_{s-1}}^p c_k^{(s)} \psi_k(x) \right| dx \right] \mu_n + \frac{1}{3} \cdot 2^{-2s} < \\
 & < \sum_{n=n_0+1}^s \left( 2^{-2(s+1)} + \int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} |f_s(x)| dx \right) \mu_n + \frac{1}{3} \cdot 2^{-2s} = \\
 & = 2^{-2(s+1)} \cdot \sum_{n=n_0+1}^s \mu_n + \int_{\Omega_s} |f_s(x)| \mu(x) dx + \frac{1}{3} \cdot 2^{-2s} \leq \\
 & \leq \int_0^1 |f_s(x)| \mu(x) dx + 2^{-2s}. \tag{42}
 \end{aligned}$$

Пусть  $f(x) \in L^1_{\mu}[0,1)$ , т.е.  $\int_0^1 |f(x)| \mu(x) dx < \infty$ .

Нетрудно видеть, что можно выбрать функцию  $f_{v_1}(x)$  из последовательности (31) такую, что

$$\int_0^1 |f(x) - f_{v_1}(x)| \mu(x) dx < 2^{-2}, \quad v_1 \geq n_0 + 1. \tag{43}$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^1 |f_{v_1}(x)| \mu(x) dx < 2^{-2} + \int_0^1 |f(x)| \mu(x) dx. \tag{44}$$

Из (41) и (439) следует

$$\int_0^1 |f(x) - P_{v_1}(x)| \mu(x) dx \leq 2 \cdot 2^{-2}, \tag{45}$$

Предположим, что уже определены числа  $v_1 < v_2 < \dots < v_{q-1}$  таким образом, что удовлетворяются следующие условия:

$$\int_0^1 \left| f(x) - \sum_{s=1}^j P_{v_s}(x) \right| \mu(x) dx < 2 \cdot 2^{-2j}, \quad 1 \leq j \leq q-1, \quad (46)$$

Теперь выберем функцию  $f_{v_q}(x)$  из последовательности (17) так, что

$$\int_0^1 \left| \left( f(x) - \sum_{s=1}^{q-1} P_{v_s}(x) \right) - f_{v_q}(x) \right| \mu(x) dx < 2^{-2q}, \quad v_q > v_{q-1}. \quad (47)$$

Отсюда и из (46) получим

$$\int_0^1 |f_{v_q}(x)| \mu(x) dx < 9 \cdot 2^{-2q}. \quad (48)$$

Из условий (41), (42) и (48) имеем

$$\int_0^1 |f_{v_q}(x) - P_{v_q}(x)| \mu(x) dx < 2^{-2v_q}, \quad (49)$$

где

$$P_{v_q}(x) = \sum_{k=N_{v_q-1}}^{N_{v_q}-1} c_k^{(v_q)} \psi_k(x).$$

$$\max_{N_{v_q-1} \leq p < N_{v_q}} \int_0^1 \left| \sum_{k=N_{v_q-1}}^p c_k^{(v_q)} \psi_k(x) \right| \mu(x) dx < 10 \cdot 2^{-2q}. \quad (50)$$

Учитывая соотношения (47) и (49) получим

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left| f(x) - \sum_{s=1}^q P_{v_s}(x) \right| \mu(x) dx \leq \\ & \leq \int_0^1 \left| \left( f(x) - \sum_{s=1}^{q-1} P_{v_s}(x) \right) - f_{v_q}(x) \right| \mu(x) dx + \\ & + \int_0^1 |f_{v_q}(x) - P_{v_q}(x)| \mu(x) dx < 2 \cdot 2^{-2q}. \end{aligned} \quad (51)$$

Таким образом мы можем, по индукции определить последовательность полиномов

$$P_{V_q}(x) = \sum_{k=N_{V_{q-1}}}^{N_{V_q}-1} c_k^{(v_q)} \psi_k(x), \quad N_{V_{q-1}} > N_{V_{q-1}} \quad q=1,2,\dots, \quad (52)$$

удовлетворяющие условиям (50) и (51) для всех  $q \geq 1$ .

Положим

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi_k(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \left[ \sum_{k=N_{V_{q-1}}}^{N_{V_q}-1} c_k^{(v_q)} \psi_k(x) \right], \quad (53)$$

$$c_k = \begin{cases} c_k^{(v_s)}, & \text{при } N_{V_{s-1}} \leq k < N_{V_s}, \quad s=1,2,\dots \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (54)$$

Из условий (35), (53) и (54) следует, что

$$0 < \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \cdot \omega(|c_k|) < \infty.$$

Теперь покажем, что ряд (39) сходится к  $f(x)$  в метрике  $L_{\mu}^1[0,1)$ . Для любого натурального  $p$ , существует  $q$  такая, что  $p \in [N_{V_{q-1}}, N_{V_q})$ . Тогда из соотношений (51) - (54) получим

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left| \sum_{k=0}^{M_V} c_k \psi_k(x) - f(x) \right| \cdot \mu(x) dx \leq \\ & \leq \int_0^1 \left| \sum_{s=1}^{q-1} P_{V_s}(x) - f(x) \right| \cdot \mu(x) dx + \int_0^1 \left| \sum_{k=N_{V_{q-1}}}^p c_k^{(v_q)} \psi_k(x) \right| \cdot \mu(x) dx < \\ & < 2^{-2(q-1)} + 10 \cdot 2^{-2q} = 18 \cdot 2^{-2q}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**Теорема 2 доказана.**

#### 4 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в статье доказан, что для любого  $\varepsilon > 0$  можно построить весовое пространство  $L_{\mu}^1[0,1)$ , любая функция которой можно представить рядом, с «хорошими» коэффициентами, по обобщенной системе Уолша, в смысле сходимости по метрике  $L_{\mu}^1[0,1)$ . Отсюда, в частности, следует существование нуль-рядов в  $L_{\mu}^1[0,1)$ , по обобщенной системе Уолша.



**REFERENCES**

- [1] G. Cantor, “Über einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz”, *Crelles für Math.*, **72**, 130 – 138, (1870).
- [2] W. H. Young, “A note on trigonometric series”, *Mess of Math.*, **38**, 44-48, (1909).
- [3] Menshov D.E., “Sur l’unicité du développement trigonometrique”, *C.R. de l’Acqad. des Sci. a Paris*, **163**, 433- 436, (1916).
- [4] Talalyan A.A., “O sxodimosti ortogonalnix ryadov”, *Dokladi Akad. Nauk Arm. SSR*, **110**, 510-516, (1956).
- [5] Kashin B.S., “Ob odnoy polnoy ortonormirovannoj sisteme”, *Mat. Sbornik*, **99**, 356-365, (1976)
- [6] Shneyder A.A., “O edinstvennosti razlogonii po sisteme Uolsha”, *Mat. Sbornik*, **24**, 279-300, (1949).
- [7] Episkoposian S.A., “On the existence of universal series by trigonometric system”, *Journal of Functional Analysis*, **230**, 169 – 189, (2006).
- [8] Episkoposian S.A., “On the existence of universal series by Walsh system”, *Izvestiya Natsionalnoi Akademii Nauk Armenii, English trans. in: Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, **38**, **4**, 25 – 40, (2003).
- [9] Chrestenson H.E., “A class of generalized Walsh functions”, *Pacific Journal Mathematics*, **45**, 17 – 31, (1955).
- [10] Paley R., “A remarkable system of orthogonal functions”, *Proc. London Math. Soc.*, **34**, 241-279, (1932).
- [11] Fine J., “The generalized Walsh-functions”, *Trans. AMS*, **69**, 66 – 67, (1950).
- [12] Watari C., “On generalized Walsh-Fourier series”, *Toh. Math. J.*, **10**, 211–241, (1958).
- [13] Vilenkin N.Ya., “Ob odnom klasse polnix ortogonalnix sistem”, *Izvestiya Akad. Nauk SSSR, ser. mat.*, **11**, 363 – 400, (1947).
- [14] Episkoposian S. A., Grigorian M.G., “ $L^p$  - convergence of greedy algorithm by generalized Walsh system”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **389**, 1374-1379, (2012).
- [15] Episkoposian S.A., “Uniformly convergence of greedy algorithm by generalized Walsh system”, *Siberian Mathematical Journal*, **54**, **5**, 810-816, (2013).

Поступила в редакцию 2.02.2015