MATHEMATICA MONTISNIGRI
Vol XXXII (2015) 93-118

# МОДИФИКАЦИЯ В РАМКАХ СТАТИСТИКИ ТСАЛЛИСА КРИТЕРИЕВ ГРАВИТАЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ АСТРОФИЗИЧЕСКИХ ДИСКОВ С ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

**А.В. КОЛЕСНИЧЕНКО**

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
Москва, Россия
e-mail: kolesn@keldysh.ru, web page: http:.keldysh.ru/kolesnichenko/person.htm

**Ключевые слова:** Неаддитивная статистика, астрофизические диски, гравитационная неустойчивость

**Аннотация.** В работе, в отличие от ряда классических исследований, в которых критерии гравитационной неустойчивости астрофизических дисков выводятся в рамках традиционной кинетики или гидродинамики, предлагается рассматривать совокупность рыхлых газо-пылевых кластеров аккреционного протопланетного диска, как особый тип сплошной среды − фрактальной среды, в фазовом пространстве скоростей которой существуют точки и области, не заполненные её составляющими. В рамках формализма неаддитивной статистики Тсаллиса, предназначенной для описания поведения аномальных систем − систем с сильным гравитационным взаимодействием отдельных её частей и фрактальным характером фазового пространства, на основе выведенных ранее модифицированных гидродинамических уравнений Навье-Стокса (так называемых уравнений $q$-гидродинамики) получены при учёте диссипативных эффектов линеаризованные уравнения колебаний твёрдотельно вращающегося диска и дан вывод дисперсионного уравнения в ВКБ-приближении. Проведен анализ осесимметричных колебаний астрофизического дифференциально вращающегося газопылевого космического объекта и получены модифицированные критерии гравитационной неустойчивости Джинса и Тумре для дисков с фрактальной структурой фазового пространства.

# MODIFICATION IN FRAMEWORK OF TSALLIS STATISTICS OF GRAVITATIONAL INSTABILITY CRITERIONS OF ASTROPHYSICAL DISKS WITH FRACTAL STRUCTURE OF PHASE SPACE

**A.V. KOLESNICHENKO**

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Science
e-mail: kolesn@keldysh.ru, web page: http:.keldysh.ru/kolesnichenko/person.htm

**Summary.** Unlike classical studies in which the gravitational instability criterions for astrophysical disks are derived in the framework of traditional kinetics or hydrodynamics, we propose to totality of fluffy dust clusters of various astrophysical objects, in particular, pro-

**2010 Mathematics Subject Classification:** 85A35, 91B50, 82C40.
**Key words and Phrases:** Non-additive Statistics, Astrophysical Disks, Gravitational Instability

toplanetary subdisks, as a special type of continuous medium, i.e., fractal medium for which there are points and areas not filled with its components. Within the deformed Tsallis statistics formalism, which is intended to describe the behavior of anomalous systems with strong gravitational interaction and fractal nature of phase space, we derive, on the basis of the modified hydrodynamic equations of Navier-Stokes (the so-called equations *q*- hydrodynamics) the linearized equations of oscillations a solid-state - rotating disk and the conclusion of the dispersing equation in VKB-approach is given. Considering the linearization of the q-hydrodynamics equations for viscosity solid-state rotating clouds we investigate the instability of an infinitely homogeneous medium to obtain a simplified version of the modified gravitational instability Jeans and Toomre criterions for an astrophysical disk with fractal structure.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема образования планет в системе солнечно-подобного диска напрямую связана с ранней стадией его формирования и эволюции. По современным представлениям планеты возникают после потери гравитационной устойчивости субдиском, образованным в результате дифференциального вращения газопылевого вещества протопланетного облака по орбите вокруг звезды и процессов аккреции при оседании его пылевой составляющей к экваториальной плоскости, перпендикулярной оси вращения диска. При сильном уплощении пылевой составляющей образовавшегося субдиска, когда плотность вещества в слое достигает некоторого критического значения, субдиск становится гравитационно-неустойчивым и распадается на многочисленные пылевые сгущения[2-7]. В областях с высокой плотностью этих сгущений последующая эволюция приводит к возникновению локальных дискретных центров уплотнения, т.е. к образованию роя первичных уединённых газопылевых агломератов[8], служащих основой зародышей изначально рыхлых (*fluffy*) прото-планетезималей, из которых происходит образование твёрдотельных планетезималей с большой начальной массой, а затем, на заключительной стадии процесса эволюции вещества диска, путём объединения планетезималей происходит формирование планет. К сожалению, несмотря на колоссальный прогресс в изучении внеземного вещества, получении данных наблюдений околозвёздных аккреционных дисков, открытии экзопланет, совершенствовании методов математического моделирования, астрофизики все ещё далеки от решения многих ключевых проблем указанного выше сценария[9].

По-видимому, прогресс в объяснении известной изощрённости фактической реализации приведенного сценария может быть достигнут на пути расширения арсенала теоретических подходов к моделированию различных проблем космогонии, в частности, эволюции астрофизических дисков. Далее мы рассмотрим один из таких подходов, связанный с адекватным моделированием сильного гравитационного взаимодействия между отдельными частями дисковой среды, которое проявляется специфическим образом в результате длительного процесса эволюции[10-13]. Как теперь стало понятно, астрофизические диски относятся в общем случае к числу, так называемых, аномальных систем, признаком которых является несводимость всей системы к простой сумме её частей[14]. Именно сильное гравитационное взаимодействие является причиной термодинамической неаддитивности (неэкстенсивности) дисковой среды, когда, например, её энтропия не является аддитивной величиной. По этой причине моделирование эволюции дискового вещества на основе классической кинетики и статистики Гиббса-

Больцмана не является в общем случае вполне адекватным[i]). Другими словами, дисковая система относится к числу сложных (аномальных) систем, для которых характерна слабая хаотизация фазового пространства, когда традиционное экспоненциально быстрое перемешивание приобретает степенной характер. В результате процесс самоорганизации системы может протекать спонтанным образом; при этом достаточно малого внешнего (или внутреннего) воздействия, чтобы коренным образом изменить поведение системы (такое поведение известно как самоорганизуемая критичность[15]). Статистическая теория сложных систем, обладающих произвольным фазовым пространством (пространством скоростей с иерархической структурой), в настоящее время наиболее полно развита для самоподобных систем, когда разброс вероятности скоростей имеет одинаковую форму на разных масштабах. Такой теорией (которой мы далее воспользуемся) является активно развиваемая в последнее время неэкстенсивная статистика (термодинамика) Тсаллиса[16-18], предназначенная для описания поведения аномальных систем – систем с сильным силовым взаимодействием и сильными корреляциями отдельных её частей, а также фрактальным характером фазового пространства.

Другая немаловажная корректировка известных моделей ранней эволюции протопланетного диска может быть связана с более углублённым пониманием тех реальных процессов, которые сопровождают объединение пылевых частиц субмикронного и микронного размеров при взаимных столкновениях в твёрдотельные агрегаты[19-22]. В связи с этим важно отметить, что до последнего времени в большинстве разработанных космогонических моделей протопланетного диска изначально принималась компактная структура растущих пылевых кластеров. Однако, как теперь стало ясно, подобные пылевые образования могут иметь весьма пушистую структуру и чрезвычайно низкую объёмную плотность[23-30]. Для таких ворсистых агрегатов, имеющих по сравнению с плотными пылевыми частицами относительно большие геометрические поперечные сечения, меняется весь путь эволюции в исходной газопылевой среде, т.е. путь от пылевых частиц через пушистые агрегаты к компактным планетезималям[31,32]. Вполне очевидно, что для адекватного описания эволюции подобных астрофизических протопланетных дисков и, в конечном счёте, механизма образования прото- планетезималей в них, необходимо, вообще говоря, привлекать к рассмотрению фрактальные свойства дисковых сред. При таком подходе, моделирование эволюции дисков, фазовое пространство которых обладает нецелой массовой (фрактальной) размерностью $D_f$, должно проводиться в рамках обобщённых гидродинамических уравнений, которые являются в общем случае следствием модели среды в дробно-интегральной форме[33,34].

В связи с этим, далее мы будем рассматривать вещество астрофизического диска,

[i]) Важно ясно себе представлять, что в основе статистики Больцмана-Гиббса[35] лежит предположение о полном перемешивании потока «фазовых точек» в фазовом пространстве (гипотеза молекулярного хаоса). Это означает, что фазовое пространство не содержит запрещённых состояний и обладает обычными свойствами непрерывности, гладкости, евклидовости. При этом гипотеза перемешивания, дополненная предположением о бесконечном числе степеней свободы, приводит к экспоненциальному распределению вероятности состояний Больцмана-Гиббса (из которого следует, в частности, свойство аддитивности экстенсивных термодинамических переменных − внутренней энергии, энтропии и т.п.), или, в случае кинетической теории, к максвелловскому распределению скоростей.

как особый тип сплошной среды − фрактальной среды[ii)], в фазовом пространстве которой существуют точки и области, не заполненные её составляющими. В рамках формализма деформированной статистики Тсаллиса ранее нами были получены обобщённые гидродинамические уравнения Навье-Стокса для термодинамически аномальных сред[1], на основе которых в данной работе предложен анализ гравитационной неустойчивости самогравитирующих космических объектов. В качестве примера получены модифицированные варианты критериев Джинса и Тумре для вращающихся фрактальных астрофизических дисков в случае пренебрежения влиянием всех факторов, кроме самогравитации и теплового (случайного) движения частиц. Показано, что критические значения длины возмущающей волны явно зависят от энтропийного индекса $q$ и параметра фрактальной размерности $\mathrm{D_f}$ фазового пространства скоростей, которые, являясь здесь свободными параметрами, должны определяться в каждом конкретном случае эмпирическим путём из статистических или экспериментальных данных.

## 2. БАЗОВЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ФОРМАЛИЗМА ДЕФОРМИРОВАННОЙ СТАТИСТИКИ КУРАДО-ТСАЛЛИСА

Хотя основы статистической теории неаддитивных систем были заложены К. Тсаллисом ещё в 1988 году и последующие многочисленные исследования зарубежными авторами динамического поведения термодинамически аномальных систем представляют значительный общетеоретический и практический интерес, в отечественной литературе по неизвестным причинам этот раздел статистической механики и термодинамики пока не нашёл широкого распространения и для большинства исследователей все ещё остаётся лишь неким математическим трюком. Вместе с тем, возникают многочисленные новые физические проблемы статистической теории сложных систем[36], требующие своего решения[iii)]. Среди них важным, по нашему мнению, является гидродинамический и термодинамический подход к моделированию самогравитирующих космических систем, когда соответствующее фазовое пространство скоростей обладает фрактальной структурой. В связи со сказанным автор считает уместным привести некоторые ключевые понятия статистики (термодинамики) Тсаллиса, которые использованы далее при конструировании энтропийной модели фрактального астрофизического диска.

Деформированная статистическая механика сложных систем, подобно статистике простых физических систем, имеет дело с вероятностными закономерностями, характеризующими систему большого числа «частиц» (ведущих себя случайным образом объектов, обладающих внутренней энергией) и проявляющимися в «термодинамически» равновесных и неравновесных состояниях. Наиболее важное проявление подобных за-

---

[ii)] Фрактальными средами являются среды с нецелой массовой размерностью (являющейся физическим аналогом размерности Хаусдорфа, не требующей, однако, перехода к пределу бесконечно малых диаметров покрывающих множеств).

[iii)] Заинтересованных читателей можно отослать к сайту http:/tsallis.cat.cbpf.br/ biblio.htm, на котором находится полная, весьма обширная и постоянно обновляющаяся библиография по данной проблеме.

кономерностей в системе дискретных частиц состоит в их распределении по различным состояниям $i$, которые характеризуются дискретным распределением $f_i$. К. Тсаллис в работе [16] предложил для сложных статистических систем обобщить классическую формулу Больцмана-Гиббса-Шеннона для энтропии

$$\mathrm{S_B} = -\mathrm{k_B} \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{W}} f_i \ln f_i, \tag{1}$$

(здесь $\mathrm{k_B}$ − постоянная Больцмана; $\mathrm{W}$ − статистический вес, определяющий число дискретных состояний $i$) определением

$$\mathrm{S_q} = \frac{\mathrm{k_B}}{q-1} \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{W}} f_i (1 - f_i^{\,q-1}), \qquad (\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{W}} f_i = 1), \tag{2}$$

где энтропийный индекс (параметр деформации) $q$ представляет собой вещественное число, принадлежащее интервалу $(0,\infty]$. Такая деформация логарифмической функции энтропии позволяет объяснить важную особенность поведения сложных систем (термодинамически аномальных систем с дальнодействующими взаимодействиями), когда вероятность реализации больших значений энергии состояний убывает (при $q > 1$), не экспоненциально быстро, а степенным образом[iv)]. Благодаря этому статистика Тсаллиса может описывать события практически недостижимые в простых системах. Легко показать, что в пределе слабой связи ($q \to 1$) энтропия Тсаллиса (2) переходит в стандартную формулу Больцмана-Гиббса-Шеннона.

Действительно, в пределе $q \to 1$ имеем: $f_i^{\,q-1} \equiv \exp\{(q-1)\ln f_i\} \to 1 + (q-1)\ln f_i$, и энтропия $\mathrm{S}_q$ сводится к форме

$$\mathrm{S_1} = \lim_{q\to 1} \frac{\mathrm{k_B}}{q-1} \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{W}} f_i (1 - f_i^{\,q-1}) = -\mathrm{k_B} \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{W}} f_i \ln f_i = \mathrm{S_B}. \tag{3}$$

Характерной особенностью $q$-энтропии является её неаддитивный характер

$$\mathrm{S}_q(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \mathrm{S}_q(\mathcal{A}) + \mathrm{S}_q(\mathcal{B}) + \mathrm{k_B^{-1}}(1-q)\mathrm{S}_q(\mathcal{A})\mathrm{S}_q(\mathcal{B}), \tag{4}$$

где $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ − две независимые подсистемы, для которых полная вероятность составной системы $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ подчиняется условию мультипликативности $p_{ij}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = p_i(\mathcal{A}) p_j(\mathcal{B})$. Его подстановка в формулу $\sum_{\mathrm{i}} f_i^{\,q} = 1 + \mathrm{S}_q(1-q)/\mathrm{k_B}$ даёт связь (4).

---

[iv)] Например, для полностью развитой турбулентности спектральное распределение энергии, отвечающее «закону пяти третей» $E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}$, спадает при больших волновых числах $k$ по степенному закону. По этой причине применение статистики Тсаллиса к этому распределению оказалось вполне успешным[37,38].

Таким образом, параметр $q$ − это мера неаддитивности системы, характеризующая целый класс различных термодинамик, соответствующих тем или иным термодинамически аномальным системам. Согласно гипотезе Тсаллиса этот параметр характеризует некоторые дополнительные степени свободы, присущие сложным системам, и должен определяться в каждом конкретном случае. Величина $q$ ничем не ограничена и может принимать значения от нуля до бесконечности, однако некоторые ограничения (как мы увидим далее) могут возникнуть в той или иной конкретной задаче; случаи $q<1$, $q=1$ и $q>1$ соответственно соотносятся с супераддитивностью, аддитивностью и субаддитивностью системы.

Взвешенное среднее значение $\boldsymbol{E}_q(\phi)\equiv\langle\phi\rangle_q$ (по различным вероятностям реализации статистических состояний $i$) дискретной случайной физической величины $\phi_i$ в статистике Курадо-Тсаллиса[17], которой мы далее воспользуемся, определяется формулой

$$\langle\phi\rangle_q=\sum_{i=1}^{\mathrm{W}}\phi_i f_i^{\,q}\,, \qquad (5)$$

которая при $q=1$ отвечает стандартному определению среднего значения.

Заметим, что $q$-энтропия может быть представлена в «классической форме» (1)

$$\mathrm{S_q}=-\mathrm{k_B}\sum_{i=1}^{\mathrm{W}} f_i^{\,q}\ln_q f_i\,, \qquad (6)$$

если использовать так называемый деформированный логарифм

$$\ln_q x\equiv(x^{1-q}-1)/(1-q)\,,\quad (\ln_1 x=\ln x), \qquad (7)$$

обратная функция к которому представляет собой «экспоненту» Тсаллиса

$$\exp_q x\equiv[1+(1-q)x]_+^{1/(1-q)}\,,\ (\exp_1 x=\exp x); \qquad (8)$$

(здесь выражение, стоящее в квадратных скобках, либо положительно, либо равно нулю, $[\mathrm{y}]_+\equiv\max(y,0)$; при этом имеет место равенство $\exp_q(\ln_q x)=\ln_q(\exp_q x)=\mathrm{x}$). Тогда энтропия Тсаллиса $\mathrm{S_q}$, будучи мерой беспорядка сложной статистической системы, представляет среднее по статистическому ансамблю микроскопической $q$-энтропии $\mathrm{s_q}(f_i)$, определяемой выражением $\mathrm{s}_q(f_i)=\mathrm{k_B}(1-f_i^{\,q-1})/(1-q)=-\mathrm{k_B}\ln_q f_i$:

$$\mathrm{S}_q\equiv\langle s_q(f_i)\rangle_q=\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{W}} f_i^{\,q}s_q(f_i)=-\mathrm{k_B}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{W}} f_i^{\,q}\ln_q f_i=-\mathrm{k_B}\langle\ln_q f_i\rangle_q\,. \qquad (9)$$

**2.1. Принцип максимума энтропии**

В данной работе используем наиболее простой способ определения равновесной функции распределения $f_{\mathrm{i}}$ для сложной системы, основанный на теории информации. Проиллюстрируем его на примере физической дискретной системы, элементы которой обладают запасом внутренней энергии. Равновесная функция распределения для дискретных физических систем в статистике Тсаллиса может быть определена, как и в классическом случае, из экстремума (максимума − при $q>1$ и минимума − при $q<1$) $q$-энтропии при выполнении дополнительных условий: постоянства нормировки $\sum_{\mathrm{i}} f_{\mathrm{i}}=1$ и постоянства энергии системы $\mathscr{E}_{\mathrm{q}}=\langle\varepsilon_i\rangle_q\equiv\sum_i f_{\mathrm{i}}^{\mathrm{q}}\varepsilon_i=\mathrm{const}$ (здесь $\varepsilon_i$ − энергия $i$-го состояния).

Следуя методу множителей Лагранжа, найдём абсолютный экстремум лагранжиана

$$\mathscr{L}_{\mathrm{q}}(f,\alpha)\equiv-\mathrm{k_B}\langle\ln_q f_i\rangle_{\mathrm{q}}+\alpha_1\left(\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{W}} f_i-1\right)+\alpha_2\left(\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{W}} f_{\mathrm{i}}^{\mathrm{q}}\varepsilon_i-\mathscr{E}_{\mathrm{q}}\right). \qquad (10)$$

Тогда дифференцирование $\mathscr{L}_{\mathrm{q}}$ по $f_i$ приводит к следующему обобщённому равновесному распределению Больцмана

$$f_i^{(eq)}=\mathrm{Z}_q^{-1}\left[1+(1-q)\frac{\varepsilon_i}{\mathrm{k_B}T}\right]^{1/(1-q)}\equiv\mathrm{Z}_q^{-1}\exp_q\left\{-\frac{\varepsilon_i}{\mathrm{k_B}T}\right\}. \qquad (11)$$

Здесь

$$\mathrm{Z}_q\equiv\left(\frac{1}{q}-\frac{1-q}{\mathrm{k_B}q}\alpha_1\right)^{1/(1-q)}=\sum_{i=1}^{W}\exp_q\left\{-\frac{\varepsilon_i}{\mathrm{k_B}T}\right\} \quad \text{и} \quad T\equiv\frac{1}{\alpha_2} \qquad (12)$$

− соответственно обобщённая статистическая сумма, определяемая из условия нормировки (2), и модуль распределения, играющий роль температуры, определяющей интенсивность беспорядочного движения элементов системы; постоянные лагранжевы множители $\alpha_1$ и $\alpha_2$ определяются из уравнений (11).

При условии $1-(1-q)\varepsilon_i/\mathrm{k_B}T>0$ и $q=1$ из (11) и (12) следует каноническое распределение Гиббса

$$p_i^{(eq)}=\mathrm{Z}^{-1}(T)\exp\{-\varepsilon_i/\mathrm{k_B}T\},\quad \mathrm{Z(T)}=\sum_{i=1}^{W}\exp\{-\varepsilon_i/\mathrm{k_B}T\}$$

для аддитивных систем, находящихся в термостате с абсолютной температурой $T$. Легко видеть, что поведение распределения (11) при больших значениях энергии $\varepsilon_i$ отличается от канонического: в частности, при $q>1$ имеет место степенное (закон Парето, $p_i^{(eq)} = C\varepsilon_{\rm i}^{-\tau}$), а не экспоненциальное падение в ростом энергии. Переход от экспоненциального распределения к степенному обеспечивается деформированием логарифмической и экспоненциальной функции согласно равенствам (7) и (8).

### 2.2. Обобщенное распределение Максвелла

Возникновение различных пространственных структур (в частности планетных колец) в астрофизических дисках связано с коллективными процессами, которые, как правило, изучаются в рамках гидродинамической модели, где сталкивающиеся частицы (например, полностью неупругие рыхлые шары метрового размера) описываются также, как и обычный молекулярный газ. При этом учитывается гравитационное поле таких «частиц», которое играет первостепенную роль в процессах разрушения крупных тел и движения мелких обломков. Учитывая сказанное, далее будем рассматривать аномальную дисковую систему с непрерывным распределением «частиц» $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c},t)$ по пространству скоростей и физическому пространству. Элемент объёма фазового пространства диска (с нецелой, в общем случае, фрактальной размерностью $\mathrm{D_f}$) далее будем обозначать через $d\boldsymbol{z} \equiv d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{c}$.

Будем считать, что когда области интегрирования специально не указываются, используемые интегралы охватывают всю рассматриваемую геометрическую область и все пространство скоростей соответственно. Энтропия Тсаллиса в этом случае определяется выражением[17]

$$\mathrm{S_q} = \mathrm{k}_B \frac{1-\int [f(\boldsymbol{z})]^q \mathrm{d}\boldsymbol{z}}{q-1} \quad , \qquad \left(\int f(\boldsymbol{z})\mathrm{d}\boldsymbol{z} = 1\right), \tag{13}$$

где интегрирование производится по всему фазовому (в общем случае фрактальному) объёму. Используя обозначение

$$\langle \phi^{\mathrm{k}} \rangle_q \equiv \int \phi^k(\boldsymbol{z})[f(\boldsymbol{z})]^q \mathrm{d}\boldsymbol{z} \tag{14}$$

для средней величины параметра системы $\phi^k(\boldsymbol{z})$, найдём равновесное распределение для функции $f(\boldsymbol{z})$, исходя из изложенного выше принципа экстремума $q$-энтропии (13) при выполнении дополнительных условий (законов сохранения)

$$\langle \phi^k \rangle_q = \mathrm{const}, \qquad (k = 1,2,\ldots n)$$

(здесь индекс $k$ относится к набору макроскопических величин, полностью характеризующих состояние макроскопической системы). В результате получим

$$f^{(eq)}(\boldsymbol{z}) = \left[q - \mathrm{k_B^{-1}}\, q(1-q)\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \phi^k(\boldsymbol{z})\right]^{1/(1-q)} \equiv q^{1/(1-q)} \exp_q\left\{-\mathrm{k_B^{-1}}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\phi^k(\boldsymbol{z})\right\}, \tag{15}$$

где постоянные множители Лагранжа $\alpha_k$ определяются из уравнений

$$\langle \phi^k \rangle_q \equiv \int \phi^k(\boldsymbol{z}) \left[ q - \mathrm{k}_\mathrm{B}^{-1} q(1-q) \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi^k(\boldsymbol{z}) \right]^{\frac{q}{1-q}} \mathrm{d}\boldsymbol{z} = \mathrm{const}\,, \quad (k=1,2,\ldots n). \qquad (16)$$

Предполагая, что нет внешних сил, могущих приводить к нарушению равновесия, и считая, что при равновесии распределение частиц среды пространственно однородно, рассмотрим, к каким следствиям приводит принцип экстремума $q$-энтропии в такой макроскопической системе. Имея далее в виду постоянство средней массовой плотности

$$\rho_\mathrm{q} \equiv \int m[\,f(\boldsymbol{z})]^q \mathrm{d}\boldsymbol{z} / (\int d\boldsymbol{r}),$$

средней (на единицу массы) гидродинамической скорости

$$\boldsymbol{u}_q \equiv \int m\boldsymbol{c}[\,f(\boldsymbol{z})]^q \mathrm{d}\boldsymbol{z} / (\rho_\mathrm{q} \int d\boldsymbol{r})$$

и средней (на единицу массы) кинетической энергии

$$\varepsilon_q = \int (mc^2/2)[\,f(\boldsymbol{z})]^q \mathrm{d}\boldsymbol{z} / (\rho_\mathrm{q} \int d\boldsymbol{r})$$

(здесь $m$ − масса одной частицы рассматриваемого класса объектов; $\rho_\mathrm{q}\mathcal{V} = \mathcal{M}_\mathrm{q}$ − полная масса дисковой системы; $\mathcal{V} = \int d\boldsymbol{r}$ − геометрический объём дисковой системы), распределение (15) запишем в виде

$$f^{(\mathrm{eq})}(\boldsymbol{c}) = q^{1/(1-q)} \exp_q \left[ -\mathrm{k}_\mathrm{B}^{-1} \left( m\alpha_1 + m\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{\alpha}_2 + mc^2 \alpha_3 \right) \right],$$

где $\alpha_k$ − постоянные множители. Отсюда следует равновесное $q$-распределение частиц сложной системы

$$f^{(eq)}(\boldsymbol{c}) = \mathrm{Z}(q) \exp_q \left( -\frac{m}{2\mathrm{k}_\mathrm{B} T_q} |\,\boldsymbol{c} - \boldsymbol{U}|^2 \right), \qquad (17)$$

где вместо постоянных $\alpha_k$ введены комбинации лагранжевых множителей:

$$\mathrm{Z}(q) \equiv (q\alpha_3 T_\mathrm{q})^{1/(1-q)}, \quad T_\mathrm{q} \equiv \frac{1}{\alpha_3} \left[ 1 - \mathrm{k}_\mathrm{B}^{-1} m(1-q) \left( \alpha_1 - \boldsymbol{\alpha}_2^2 / 2\alpha_3 \right) \right],$$

$$\boldsymbol{U} \equiv -\frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\alpha_3}. \qquad (18)$$

Для нахождения параметров $\mathrm{Z}(q)$, $T_q$ и $\boldsymbol{U}$ необходимо вычислить следующие три интеграла на фрактале в пространстве мгновенных скоростей с нецелой размерностью $\mathrm{D_f}$:

$$\begin{pmatrix} \rho_\mathrm{q} = const \\ \rho_\mathrm{q}\boldsymbol{u}_\mathrm{q} = const \\ \rho_\mathrm{q}\varepsilon_\mathrm{q} = const \end{pmatrix} = mZ^q \int d^{\mathrm{D_f}}\boldsymbol{c} \left[ 1-(1-q)\frac{m}{2\mathrm{k_B}T_q}\left|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{U}\right|^2 \right]^{q/(1-q)} \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{c} \\ c^2/2 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Вводя обозначения:

$$\boldsymbol{w} \equiv \sqrt{m/2k_\mathrm{B}|\Theta|}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{U}), \quad \Theta \equiv T_q/(q-1), \quad \operatorname{sgn}\Theta = \begin{cases} 1, & \Theta > 0 \\ 0, & \Theta = 0 \\ -1, & \Theta < 0 \end{cases}, \quad (20)$$

перепишем сначала интегралы (19) в виде

$$\begin{pmatrix} \rho_\mathrm{q} \\ \rho_\mathrm{q}\boldsymbol{u}_\mathrm{q} \\ \rho_\mathrm{q}\varepsilon_\mathrm{q} \end{pmatrix} = mZ^q \left(\frac{2k_\mathrm{B}|\Theta|}{m}\right)^{\frac{\mathrm{D_f}}{2}} \int d^{\mathrm{D_f}}\boldsymbol{w} \left[ 1+w^2 \operatorname{sgn}\Theta \right]^{\frac{q}{1-q}} \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{U}+\boldsymbol{w}\sqrt{2\mathrm{k_B}|\Theta|/\mathrm{m}} \\ \frac{U^2}{2}+\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{w}\sqrt{2\mathrm{k_B}|\Theta|/\mathrm{m}}+(2\mathrm{k_B}|\Theta|/\mathrm{m})\,w^2 \end{pmatrix}. (21)$$

По поводу интегрирования по $\boldsymbol{w}$ в пространстве скоростей с нецелой фрактальной размерностью $\mathrm{D_f}$ заметим следующее: известно, что если фрактальная область интегрирования по $\boldsymbol{w}$ сферически симметрична (что, как правило, можно предположить[33], то $\mathrm{D_f}$-мерное интегрирование сводится к обычному интегрированию в соответствии с формулой[39]

$$\int f(\boldsymbol{w})\mathrm{d}^{\mathrm{D_f}}\boldsymbol{w} = \frac{2\pi^{\mathrm{D_f}/2}}{\Gamma(\mathrm{D_f}/2)}\int_0^\infty f(\boldsymbol{w})|\boldsymbol{w}|^{\mathrm{D_f}-1}d|\boldsymbol{w}| = \frac{\pi^{\mathrm{D_f}/2}}{\Gamma(\mathrm{D_f}/2)}\int_0^\infty f(\mathrm{x})x^{\mathrm{D_f}/2-1}dx, \quad (22)$$

где $x \equiv w^2$; $\Gamma(\mathrm{x})$ − гамма функция. С учётом (22) интегралы (21) принимают вид:

$$\begin{pmatrix} \rho_\mathrm{q} \\ \rho_\mathrm{q}\boldsymbol{u}_\mathrm{q} \\ \rho_\mathrm{q}\varepsilon_\mathrm{q} \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{m}Z^q}{\Gamma(\mathrm{D_f}/2)}\left(\frac{2\pi\,\mathrm{k_B}}{m|\Theta|}\right)^{\mathrm{D_f}/2} \int dx\, x^{\mathrm{D_f}/2-1}(1+\operatorname{sgn}\Theta\, x)^{q/(1-q)} \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{U} \\ \frac{U^2}{2}+\mathrm{k_B}\,x/m|\Theta| \end{pmatrix},$$

где пределы интегрирования определяются в зависимости от значения функции $\operatorname{sgn}\Theta$: если $\operatorname{sgn}\Theta = 1$, то − подынтегральная функция определена для $0 \le \mathrm{x} < \infty$; если

$\operatorname{sgn}\Theta = -1$, то подынтегральная функция определена только для $0 \le \mathrm{x} \le 1$. В результате будем иметь

$$\begin{pmatrix} \rho_{\mathrm{q}} \\ \rho_{\mathrm{q}} \boldsymbol{u}_{\mathrm{q}} \\ \rho_{\mathrm{q}} \varepsilon_{\mathrm{q}} \end{pmatrix} = \frac{m\mathrm{Z}^{q}}{\Gamma(\mathrm{D_f}/2)} \left( \frac{2\pi \mathrm{k_B} |\Theta|}{m} \right)^{\mathrm{D_f}/2} \begin{cases} \int\limits_0^\infty dx\, x^{\frac{\mathrm{D_f}}{2}-1} (1+x)^{\frac{q}{1-q}} \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{U} \\ \frac{U^2}{2} + \frac{\mathrm{k_B}|\Theta|}{m}\mathrm{x} \end{pmatrix}, & \operatorname{sgn}\Theta = +1; \\ \int\limits_0^1 dx\, x^{\frac{\mathrm{D_f}}{2}-1} (1-x)^{\frac{q}{1-q}} \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{U} \\ \frac{U^2}{2} + \frac{\mathrm{k_B}|\Theta|}{m}\mathrm{x} \end{pmatrix}, & \operatorname{sgn}\Theta = -1; \end{cases} =$$

$$= m\mathrm{Z}^{q} \left( \frac{2\pi \mathrm{k_B} \mathrm{T_q}}{m} \right)^{\mathrm{D_f}/2} \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\frac{q}{q-1} - \frac{\mathrm{D_f}}{2})}{|q-1|^{\mathrm{D_f}/2}\, \Gamma(\frac{q}{q-1})} \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{U} \\ \frac{U^2}{2} + \frac{\mathrm{D_f} \mathrm{k}_B T_q/2m}{1-(q-1)\frac{\mathrm{D_f}}{2}} \end{pmatrix}, & \textit{когда} \quad q > 1; \\ \dfrac{\Gamma(\frac{1}{1-q})}{|q-1|^{\mathrm{D_f}/2}\, \Gamma(\frac{1}{1-q} + \frac{D}{2})} \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{U} \\ \frac{U^2}{2} + \frac{\mathrm{D_f}\, \mathrm{k}_B T_q/2m}{1-(q-1)\frac{\mathrm{D_f}}{2}} \end{pmatrix}, & \textit{когда} \quad q < 1. \end{cases} \tag{23}$$

Первое соотношение (23) позволяет выразить обобщённый статистический интеграл $\mathrm{Z}(q)$ через среднюю массовую плотность системы $\rho_{\mathrm{q}}$:

$$\mathrm{Z}(q) \equiv \left\{ q \left[ 1 - (1-q) \frac{m}{\mathrm{k_B}} \left( \alpha_1 - \frac{\boldsymbol{\alpha}_2^2}{2\alpha_3} \right) \right] \right\}^{\frac{1}{1-q}} = \left\{ \frac{\rho_{\mathrm{q}}}{m} \left( \frac{m}{2\pi \mathrm{k_B} T_{\mathrm{q}}} \right)^{\frac{\mathrm{D_f}}{2}} \varsigma(q, \mathrm{D_f}) \right\}^{\frac{1}{q}}, \tag{24}$$

где множитель

$$\varsigma(q, \mathrm{D_f}) \equiv \begin{cases} \dfrac{|q-1|^{\mathrm{D_f}/2}\, \Gamma[q/(q-1)]}{\Gamma[q/(q-1) - \mathrm{D_f}/2]}, & \textit{когда} \quad q > 1; \\ \dfrac{|q-1|^{\mathrm{D_f}/2}\, \Gamma[1/(1-q) + \mathrm{D_f}/2]}{\Gamma[1/(1-q)]}, & \textit{когда} \quad q < 1. \end{cases} \tag{25}$$

Второе соотношение (23) связывает параметр $\boldsymbol{U}$ со средней гидродинамической скоростью системы

$$\boldsymbol{u}_q = \boldsymbol{U}, \tag{26}$$

а третье соотношение, сводящееся к виду

$$\varepsilon_{\mathrm{q}} \equiv \frac{u_q^2}{2} + \varepsilon_{\mathrm{q}}^{\mathrm{int}} = \frac{u_q^2}{2} + \frac{\mathrm{D_f}\,\mathrm{k_B}\,T_q}{2m}\left[1+(1-q)\,\mathrm{D_f}/2\right]^{-1}, \qquad (27)$$

(где $\varepsilon^{\mathrm{int}} \equiv \frac{\mathrm{D_f}\,\mathrm{k_B}\,T_q}{2m}\left[1+(1-q)\,\mathrm{D_f}/2\right]^{-1} = \frac{\mathrm{D_f}\,\mathrm{k_B}\,T}{2m}$ – «обычная» внутренняя энергия на единицу массы системы), связывает определённый формулой (18) параметр $T_q$ с «термодинамической» температурой $T$ системы:

$$T_q = T\left[1-(q-1)\,\mathrm{D_f}/2\right]. \qquad (28)$$

Поскольку определение температуры в неаддитивной статистике достаточно произвольно, то далее мы будем интерпретировать параметр $T_q$ как обобщённую «температуру». Эта температура, в корне отличаясь от термодинамически определённой величины, характеризует интенсивность хаотизации (беспорядочного движения) объектов сложной системы. Заметим, что если мы хотим сохранить обычные представления об обобщённой температуре $T_q$, то тогда выражение (28) накладывает жёсткое ограничение на величину $q$: поскольку в этом случае $1-\mathrm{D_f}(q-1)/2>0$, и, следовательно, энтропийный индекс удовлетворяет неравенству $q<1+2/\mathrm{D_f}$.

Итак, распределение функции $f(\boldsymbol{c})$ по скоростям для глобального равновесия сложной однородной дисковой системы (17) принимает следующий вид обобщённого распределения Максвелла:

$$f_q^{(eq)}(\boldsymbol{c},\rho_{\mathrm{q}},T_{\mathrm{q}},\boldsymbol{U}_{\mathrm{q}}) = \varsigma(q,\mathrm{D_f})\,\frac{\rho_{\mathrm{q}}}{m}\left(\frac{m}{2\pi\,\mathrm{k_B}\,T_{\mathrm{q}}}\right)^{\mathrm{D_f}/2} \exp_q\left(-\frac{m}{2\,\mathrm{k_B}\,T_q}\left|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{U}_{\mathrm{q}}\right|^2\right). \qquad (29)$$

Заметим, что параметры $\rho_{\mathrm{q}}$, $T_{\mathrm{q}}$ и $\boldsymbol{U}_{\mathrm{q}}$ в этом выражении постоянны, т.е. не зависят от пространственной координаты $\boldsymbol{r}$ и времени $t$.

## 3. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ $q$ -ГИДРОДИНАМИКИ

Энтропия Тсаллиса (13) влечёт за собой не только обобщение статистической физики и термодинамики, но и обобщение физической кинетики и гидродинамики[1]. Будем далее предполагать, что для любых неоднородных систем, находящихся в термодинамическом равновесии, обобщённая *локальная* функция распределения по скоростям имеет *локально-максвелловский* вид $f_q^{(0)}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{r},t)$, т.е. такую же функциональную форму (29), как и для случая глобального равновесия сложной системы, но с гидродинамическими параметрами $n_{\mathrm{q}}(\boldsymbol{r},\mathrm{t})$, $T_{\mathrm{q}}(\boldsymbol{r},\mathrm{t})$ и $\boldsymbol{u}_{\mathrm{q}}(\boldsymbol{r},t)$, зависящими от координаты $\boldsymbol{r}$ и времени $t$:

$$f_q^{(0)}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{r},t)=\varsigma(q,\mathrm{D_f})n_{\mathrm{q}}(\boldsymbol{r},t)\left(\frac{m}{2\pi \mathrm{k_B}T_q(\boldsymbol{r},t)}\right)^{\mathrm{D_f}/2}\exp_q\left(-\frac{m}{2\mathrm{k_B}\,T_q(\boldsymbol{r},t)}\left|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}_{\mathrm{q}}(\boldsymbol{r},t)\right|^2\right), \quad (30)$$

где $T_q(\boldsymbol{r},t)=m\left[2\varepsilon_q(\boldsymbol{r},t)-u_q^2(\boldsymbol{r},t)\right]\left[1+(1-q)\frac{\mathrm{D_f}}{2}\right]/\,\mathrm{D_f}\,\mathrm{k_B}\,n_q(\boldsymbol{r},t)$, $n_{\mathrm{q}}(\boldsymbol{r},t)=$ $=\rho_{\mathrm{q}}(\boldsymbol{r},t)\,/\,m-$ локальная плотность числа частиц. Возможность введения локально-равновесного распределения связана с тем, что существуют в общем случае два масштаба времени релаксации, различного порядка величин[40]: время релаксации $\tau_r$ для установления статистического равновесия в системе, зависящее от её полного объёма $\mathcal{V}=\int d\boldsymbol{r}$, и другое, значительно меньшее время релаксации $\tau<<\tau_r$, которое определяет время установления равновесия в макроскопически малом (но содержащем большое число элементов) объёме системы и не зависит от полного объёма системы. Локально-равновесное состояние устанавливается сначала за время $\tau$ в малых объёмах, а затем медленно стремится к распределению (29), с характерным временем $\tau_r$. Для того чтобы вновь введённые параметры $n_q, T_q$ и $\boldsymbol{u}_q$ действительно имели смысл локальной числовой плотности, обобщённой температуры и средней массовой скорости, они должны подчиняться следующим стандартным условиям:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{n_q}(\boldsymbol{r},t) \\ n_{\mathrm{q}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{q}}(\boldsymbol{r},t) \\ n_{\mathrm{q}}\varepsilon_{\mathrm{q}}(\boldsymbol{r},t)\end{pmatrix}=\int d^{\mathrm{D_f}}\boldsymbol{c}[f(\boldsymbol{c},\boldsymbol{r},t)]^q\begin{pmatrix}1\\ \boldsymbol{c}\\ c^2/2\end{pmatrix}=\int d^{\mathrm{D_f}}\boldsymbol{c}[f^{(0)}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{r},t)]^q\begin{pmatrix}1\\ \boldsymbol{c}\\ c^2/2\end{pmatrix}. \quad (31)$$

Кинетическое конструирование гидродинамической системы уравнений для сложной системы проведено в работе[1] методом моментов на основе модифицированного кинетического уравнения с интегралом столкновений в форме Бхатнагара-Гросса-Крука (БГК)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{c}\cdot\nabla_r+\nabla\varPhi_q\cdot\nabla_c\right)[f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c},t)]^q=-\frac{1}{\tau}\left\{[f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c},t)]^q-[f^{(0)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c},t)]^q\right\}\equiv\Im(f^q), \quad (32)$$

в котором $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=-\nabla\varPhi_q(\boldsymbol{r})$ − не зависящая от скорости внешняя сила (на единицу массы); $G-$ гравитационная постоянная; $\varPhi_q(\boldsymbol{r})\equiv-G\int\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}[f(\boldsymbol{r}')]^q\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$ − гравитационный потенциал (астрофизического диска), удовлетворяющий уравнению Пуассона $\nabla^2\varPhi_q(\boldsymbol{r})=4\pi G\rho_q(\boldsymbol{r})$ ; $\tau$ − положительный параметр, который интерпретируется далее как характерное время релаксации функции распределения $f$ к локально-максвелловскому распределению $f^{(0)}$, определяемому формулой (30); $\Im(f^q)$ − интеграл столкновений в БГК-приближении. Заметим, что параметр сглаживания $\tau$ (связанный с максвелловским временем релаксации) совпадает по порядку величины со средним временем свободного пробега частиц в системе.

В результате была получена система моментных уравнений $q$-гидродинамики, которая в приближении второго порядка имеет следующий вид (далее в энтропийный индекс $q$ у всех гидродинамических величин, за исключением температуры $T_q$, опущен):

$$\partial\rho/\partial t + \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{u}) = 0, \tag{33}$$

$$\partial\boldsymbol{u}/\partial t + (\boldsymbol{u} + \mathrm{grad})\boldsymbol{u} = -\rho^{-1}\mathrm{grad}\, p - \mathrm{grad}\,\Phi + \rho^{-1}\,\mathrm{Div}\boldsymbol{\tau}\ , \tag{34}$$

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho, \tag{35}$$

$$\rho(\partial\varepsilon^{\mathrm{int}}/\partial t + \boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad}\varepsilon^{\mathrm{int}}) + p\,\mathrm{div}\boldsymbol{u} = -\mathrm{div}\boldsymbol{J} - \boldsymbol{\tau} : \mathrm{grad}\boldsymbol{u}. \tag{36}$$

Здесь

$$\varepsilon^{\mathrm{int}}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mathrm{D_f}}{2}\frac{p}{\rho} = \frac{\mathrm{D_f}\,\mathrm{k_B}\,T_q(\boldsymbol{r},t)}{2m}\left[1+(1-q)\mathrm{D_f}/2\right]^{-1}, \quad (\varepsilon_{\mathrm{q}}^{\mathrm{int}} = \varepsilon_q - \left|u_{\mathrm{q}}\right|^2/2) \tag{37}$$

− внутренняя энергия (на единицу массы) рассматриваемой аномальной системы;

$$\tau_{ik}(\boldsymbol{r},t) = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\mathrm{div}\boldsymbol{u}\right) + \mu_\theta\delta_{ik}\mathrm{div}\boldsymbol{u} \tag{38}$$

− тензор вязких напряжений в $q$-гидродинамике;

$$\mu(\boldsymbol{r},t) \equiv \tau\, p \equiv \tau\frac{\mathrm{k_B}\,\rho}{m}T_q[1+(1-q)\,\mathrm{D_f}/2]^{-1} \tag{39}$$

− коэффициент сдвиговой вязкости;

$$\mu_\theta(\boldsymbol{r},t) = \tau\frac{2\left(\mathrm{D_f}-3\right)}{3\mathrm{D_f}}p = \tau\frac{2\left(\mathrm{D_f}-3\right)}{3\mathrm{D_f}[1+(1-q)\,\mathrm{D_f}/2]}\frac{\mathrm{k_B}\,\rho}{m}T_q \tag{40}$$

− коэффициент объёмной вязкости;

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) = -\lambda\nabla T_q + \zeta\nabla p \tag{41}$$

− вектор потока тепла в $q$-гидродинамике;

$$\zeta(\boldsymbol{r},t) = \frac{(1-\mathrm{q})m}{\mathrm{k_B}\,\rho}\lambda; \tag{42}$$

$$\lambda(\boldsymbol{x},t)=\tau\frac{\mathrm{k_B}}{m}\left(\frac{2+\mathrm{D_f}}{2+(1-q)(2+\mathrm{D_f})}\right)p= \\ =\tau\frac{\mathrm{k_B}}{m}\frac{1}{[1+(1-q)\frac{\mathrm{D_f}}{2}]}\left(\frac{\mathrm{k}_B\,\mathrm{n_q}T_q}{\frac{2}{2+\mathrm{D_f}}+(1-q)}\right) \tag{43}$$

− коэффициент теплопроводности.

Далее систему обобщённых гидродинамических уравнений Навье-Стокса для фрактальной среды (33)-(36), рассматриваемую совместно с уравнением состояния

$$p(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mathrm{k_B}}{m[1+(1-q)\,\mathrm{D_f}/2]}\rho T_q=\frac{2}{\mathrm{D_f}}\rho\,\varepsilon^{\mathrm{int}} \tag{44}$$

для гидростатического давления в аномальной системе (аналог − закона состояния в кинетической теории совершенных газов), положим в основу получения линеаризированных уравнений для колебаний дифференциально вращающегося астрофизического диска при наличии эффектов диссипации. На основе этих уравнений в качестве примера будет проведен упрощенный анализ осесимметричных колебаний дифференциально вращающегося диска и будут получены модифицированные критерии гравитационной неустойчивости фрактальной дисковой среды, обобщающие известные результаты Джинса и Тумре, полученные для осесимметричных возмущений радиально неоднородного диска. Заметим еще раз, что в рассматриваемой здесь модели фрактального диска имеются свободные параметры, которые в каждом конкретном случае должны определяться эмпирическим путём из экспериментальных астрофизических данных.

## 4. ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОГО АСТРОФИЗИЧЕСКОГО ДИСКА С ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ

### 4.1. Постановка задачи

В рамках уравнений $q$-гидродинамики поставим задачу изучения дисперсных свойств осесимметричных возмущений в плоскости тонкого радиально неоднородного астрофизического диска (предполагается, что толщина диска $2h$ везде мала по сравнению с радиальной координатой $\varpi$). Далее будем следовать традиционному подходу при исследовании устойчивости самогравитирующих дисковых систем, используя двумерные (зависящие от координат в плоскости диска) функции, такие как поверхностная плотность, двумерное поле скоростей, гравитационный потенциал в плоскости диска и т.д. Для этой цели используем проинтегрированные по $z$-координате (направленной вдоль оси вращения диска) уравнения (33)-(37) $q$-гидродинамики. Следует отметить, что система получаемых при этом двумерных уравнений оказывается близка по виду к ранее использовавшимся в астрофизике[41-43]. Однако имеются и существенные отличия, связанные с наличием эффективных коэффициентов переноса и численными значениями входящих в них свободных параметров $q$ и $\mathrm{D_f}$.

Ограничимся далее рассмотрением только осесимметричных движений дисковой среды, когда азимутальная скорость имеет вид $u_\varphi = \Omega\varpi$, где $\Omega(\varpi)$ − угловая скорость вращения диска вокруг оси Oz. Тогда, в невращающейся системе отсчета, проинтегрированные по $z$-координате уравнения (33)-(36) $q$-гидродинамики в цилиндрических координатах ($\varpi, \varphi, z$) принимают следующий вид:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{1}{\varpi}\frac{\partial}{\partial\varpi}(\varpi\sigma u_\varpi) = 0, \tag{45}$$

$$\begin{gathered}\sigma\left(\frac{Du_\varpi}{Dt} - \frac{u_\varphi^2}{\varpi}\right) = -\sigma\frac{\partial\Phi}{\partial\varpi} - \frac{\mathrm{k_B}}{m[1+(1-q)\,\mathrm{D_f}/2]}\frac{\partial(\sigma T_q)}{\partial\varpi} + \\ + \frac{4\mu}{3}\frac{\partial}{\partial\varpi}\left(\frac{1}{\varpi}\frac{\partial\varpi u_\varpi}{\partial\varpi}\right) + \frac{4}{3}\frac{\partial\mu}{\partial\varpi}\left(\frac{\partial u_\varpi}{\partial\varpi} - \frac{u_\varpi}{2\varpi}\right),\end{gathered} \tag{46}$$

$$\sigma\left(\frac{Du_\varphi}{Dt} + \frac{u_\varpi u_\varphi}{\varpi}\right) = \frac{1}{\varpi^2}\frac{\partial}{\partial\varpi}\left(\varpi^3\mu\frac{\partial}{\partial\varpi}\frac{u_\varphi}{\varpi}\right), \tag{47}$$

$$\begin{gathered}\sigma\left(\frac{D\varepsilon^{\mathrm{int}}}{Dt} + \frac{2\varepsilon_q^{\mathrm{int}}}{\mathrm{D_f}}\frac{1}{\varpi}\frac{\partial\varpi u_\varpi}{\partial\varpi}\right) = \frac{1}{\varpi}\frac{\partial}{\partial\varpi}\left(\lambda\varpi\frac{\partial T_q}{\partial\varpi}\right) - \frac{2}{\mathrm{D_f}}\frac{1}{\varpi}\frac{\partial}{\partial\varpi}\left(\zeta\varpi\frac{\partial\varepsilon_q^{\mathrm{int}}}{\partial\varpi}\right) + \\ \mu\left(\varpi\frac{\partial}{\partial\varpi}\frac{u_\varphi}{\varpi}\right)^2 + \frac{4}{3}\mu\left[\left(\frac{\partial u_\varpi}{\partial\varpi}\right)^2 + \left(\frac{u_\varpi}{\varpi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_\varpi}{\partial\varpi}\right)\frac{u_\varpi}{\varpi}\right].\end{gathered} \tag{48}$$

$$\frac{1}{\varpi}\frac{\partial}{\partial\varpi}\left(\varpi\frac{\partial\Phi}{\partial\varpi}\right) = 4\pi G\sigma. \tag{49}$$

Здесь $D/Dt = \partial/\partial t + u_\varpi\left(\partial/\partial\varpi\right)$ − оператор субстанциональной производной; $u_\varpi, u_\varphi$ − радиальная и азимутальная компоненты скорости дискового вещества;

$$\sigma = 2\int_0^h \rho dz, \qquad p = \frac{\mathrm{k_B}}{m[1+(1-q)\,\mathrm{D_f}/2]}\sigma T_q$$

− поверхностная плотность и плоское давление в гравитирующем диске; $h$ − полутолщина тонкого диска.

Рассмотрим теперь релаксацию возмущенного состояния космической дисковой системы, слабо отличающегося от стационарного состояния (заметим, что стационарное значение какой-либо гидродинамической величины может равняться нулю, как, например, в случае радиальной компоненты скорости). Пусть величины $\sigma^0$, $\boldsymbol{u}^0$, $T_q^0$ и $\Phi^0$ описывают некоторое стационарное решение системы (45)-(48). Для изучения динамики малых возмущений линеаризируем систему (45)-(48). Для этого представим входящие в эту систему переменные в виде суммы равновесных и возмущенных величин

$$\sigma = \sigma^0 + \sigma^1, \quad T_q = T_q^0 + T_q^1, \ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^0 + \boldsymbol{u}^1, \ \Phi = \Phi^0 + \Phi^1,$$

где $\sigma^1$, $\boldsymbol{u}^1$, $\Phi^1$, $T_q^1$ − суть малые возмущения гидродинамических параметров, слабо нарушающие невозмущённое состояние. Если при этом окажется, что с течением времени возмущения убывают и основное состояние восстанавливается, то можно говорить об устойчивости основного решения относительно малых возмущений. Отщепляя уравнения динамического равновесия между центробежной и гравитационной силами (с учетом давления), а также пренебрегая нелинейными членами (квадратичными по амплитуде) и всеми пространственными производными от стационарных величин (температуры, коэффициентов переноса) по сравнению с производными от возмущенных величин, получим следующую систему линеаризованных уравнений $q$-гидродинамики для колебаний вязкого твёрдотельно-вращающегося диска (когда $\partial\Omega / \partial\varpi = 0$):

$$\frac{\partial \sigma^1}{\partial \varpi} + \frac{\sigma^0 u_\varpi^1}{\varpi} + \sigma^0 \frac{\partial u_\varpi^1}{\partial \varpi} = 0, \tag{50}$$

$$\sigma^0 \left( \frac{\partial u_\varpi^1}{\partial t} - \frac{2u_\varphi^0 u_\varphi^1}{\varpi} \right) = -\sigma^0 \frac{\partial \Phi^1}{\partial \varpi} - a_q^2 \frac{\partial \sigma^1}{\partial \varpi} - \frac{\mathrm{k_B}}{m[1+(1-q)\,\mathrm{D_f}/2]} \sigma^0 \frac{\partial T_q^1}{\partial \varpi} + \frac{4\mu^0}{3} \frac{\partial^2 u_\varpi^1}{\partial \varpi^2}, \tag{51}$$

$$\sigma^0 \left( \frac{\partial u_\varphi^1}{\partial t} + u_\varpi^1 \frac{\partial u_\varphi^0}{\partial \varpi} + \frac{u_\varpi^1 u_\varphi^0}{\varpi} \right) = \mu^0 \frac{\partial^2 u_\varphi^1}{\partial \varpi^2}, \tag{52}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{k_B}}{m[1+(1-q)\,\mathrm{D_f}/2]} \sigma^0 \left[ \frac{\mathrm{D_f}}{2} \left( \frac{\partial T_q^0}{\partial t} + \frac{\partial T_q^1}{\partial t} \right) + T_q^0 \frac{\partial u_\varpi^1}{\partial \varpi} \right] = \lambda^0 \frac{\partial^2 T_q^1}{\partial \varpi^2} + \\ + \mu^0 \left[ \frac{\partial}{\partial \varpi} \left( \frac{u_\varphi^0}{\varpi} \right) + \frac{\partial u_\varphi^1}{\partial \varpi} + \frac{u_\varphi^1}{\varpi} \right]^2, \end{aligned} \tag{53}$$

$$\partial \hat{\Phi} / \partial \varpi = -i 2\pi G \hat{\sigma}. \tag{54}$$

Здесь

$$a_q \equiv \left( \partial p / \partial \sigma \right)_{T_q} = \sqrt{(\mathrm{k_B}/m) T_q \ /[1+(1-q)\,\mathrm{D_f}/2]} \tag{55}$$

− изотермическая скорость звука во фрактальной плоской среде. Уравнения (50)-(54) описывают развитие малых адиабатических возмущений во фрактальной среде на фоне основного решения в пространстве и времени. Эти уравнения являются линейными и однородными уравнениями в частных производных, следовательно, к ним применим метод нормальных колебаний (метод мод). Далее мы используем следующие выражения для возмущений:

$$\sigma = \sigma^0 + \hat{\sigma}\exp(-i\omega t + ik\varpi), \quad u_\varpi = \hat{u}_\varpi \exp(-i\omega t + ik\varpi),$$

$$u_\varphi = \Omega\varpi + \hat{u}_\varphi \exp(-i\omega t + ik\varpi), \quad T_q = T_q^0 + \hat{T}_q^0 \exp(-i\omega t + ik\varpi),$$

которые описывают монохроматические волны с угловой частотой $\omega$ и длиной волны $\lambda = 2\pi/\mathrm{k}$ ($\mathrm{k}-$ волновое число). Здесь $\Omega-$ угловая скорость вращения диска вокруг оси Oz; стационарные величины отмечены нуликом, а амплитуды возмущенных величин (фурье - коэффициенты) – знаком «$\wedge$». Величины $\omega$ и $\lambda$ могут быть комплексными. Ясно, что в случае $\omega^2 > 0$ имеет место устойчивость (если частота $\omega$ − действительное число, то это означает, что волна без изменений распространяется по диску − система устойчива); в случае $\omega^2 = 0$ имеет место нейтральность; для случая

$$\omega^2 < 0 \quad \begin{cases} \operatorname{Im}\omega > 0 & -\textit{сверхустойчивость}, \\ \operatorname{Im}\omega < 0 & -\textit{неустойчивость}. \end{cases} \tag{56}$$

Предполагая адиабатичность основного решения, подставим соотношения (55) в (50)-(54). В результате, с учетом неравенств $\sigma^1 << \sigma^0, \quad k\varpi >> 1$, получим следующую систему уравнений для фурье- коэффициентов:

$$-i\omega\hat{\sigma} + i\sigma^0 k\hat{u}_\varpi = 0, \tag{57}$$

$$\begin{gathered}\sigma^0\left(i\omega\hat{u}_\varpi + 2\hat{u}_\varphi\Omega\right) = -i\left(2\pi G\sigma^0 - ka_q^2\right)\hat{\sigma} + \\ +ik\frac{\mathrm{k_B}}{m[1+(1-q)\mathrm{D_f}/2]}\sigma^0\hat{T}_q + \frac{4\mu}{3}k^2\hat{u}_\varpi,\end{gathered} \tag{58}$$

$$-i\omega\hat{u}_\varphi + \frac{\kappa^2}{2\Omega}\hat{u}_\varpi = -\frac{\mu^0}{\sigma^0}k^2\hat{u}_\varphi, \tag{59}$$

$$\frac{\mathrm{k_B}}{m[1+(1-q)\mathrm{D_f}/2]}ik\left[-\frac{\mathrm{D_f}}{2}\hat{T}_q + T_q^0\hat{u}_\varpi\right] = -\lambda^0 k^2\hat{T}_q. \tag{60}$$

Здесь $\kappa^2=(2\Omega)^2\left(1+\dfrac{\varpi}{2\Omega}\dfrac{\partial\Omega}{\partial\varpi}\right)$, $\kappa$ – так называемая эпициклическая частота, для кеплеровского диска $\kappa^2=\Omega^2$; для твердотельного вращения $\kappa=2\Omega$. Система (57)-(60) получена здесь в так называемом в ВКБ- приближении (приближении Венцеля-Крамерса-Бриллюэна), когда длина волны предполагается меньше характерных масштабов изменения стационарных параметров диска. Именно это приближение позволило нам ранее использовать следующие неравенства:

$$k^2\hat{A}>>k\hat{A}/\varpi>>\hat{A}/\varpi^2,\quad k\varpi>>1,$$

и опустить соответствующие малые члены.

Приравнивая нулю определитель системы алгебраических уравнений (57)-(60), можно получить полное дисперсионное уравнение четвертого порядка по $\omega$, описывающее линейные колебания дифференциально- вращающегося диска *с учетом влияния давления* и эффектов диссипации на гравитационные возмущения. Вместе с тем следует отметить, что при нахождении критерия гравитационной устойчивости астрофизического диска и определении спектра колебаний в его плоскости учет диссипативных членов в первом приближении часто несущественен[44]. Однако в тех случаях, когда возмущения в плоскости диска обладают отрицательной энергией (что приводит к диссипативной неустойчивости даже в гравитационно- устойчивом диске[43,45]), учёт диссипативных членов может оказаться важным. Кроме этого, в рамках диссипативной модели может быть исследовано влияние мелкомасштабной турбулентности на устойчивость диска с турбулентной вязкостью[46].

Таким образом, далее мы будем пренебрегать диссипативными эффектами, отсылая заинтересованного читателя к монографии[43], в которой подробно рассматривается физика многочисленных неустойчивостей астрофизических дисков в классической постановке. В этом случае из системы уравнений (57)-(60) вытекает следующее дисперсионное *уравнение линейных колебаний самогравитирующего вращающегося диска с давлением*:

$$\omega^2=\left(1+\frac{2}{\mathrm{D_f}}\right)k^2a_q^2-2\pi G\sigma^0k+4\Omega^2\left(1+\frac{\varpi}{2\Omega}\frac{\partial\Omega}{\partial\varpi}\right),\qquad(61)$$

где $a_q=\sqrt{(\mathrm{k_B}/m)T_q\;/[1+(1-q)\mathrm{D_f}/2]}$. Исследуем это уравнение, выделяя из него отдельные ветки колебаний.

### 4.2. Критерий неустойчивости Джинса для фрактальной среды

В случае, когда самогравитация гораздо больше членов с вращением и давлением, соответствующее дисперсионное уравнение для однородной среды ($\sigma^0=\mathrm{const}$) принимает простой вид

$$\omega^2=a_q^2k^2-4\pi G\sigma^0k,\quad 0<q<1+\tfrac{2}{\mathrm{D_f}}.\qquad(62)$$

Для устойчивых волн с действительными частотами имеем $\omega^2 > 0$, тогда как при $\omega^2 = a_q^2 k^2 - 4\pi G\sigma^0 k < 0$ наступает неустойчивость Джинса. Эти два класса разделяет случай нейтральной устойчивости $\omega^2 = 0$, что соответствует модам с критической длиной волны

$$\lambda_{crit} = 2\pi / k_{crit}, \quad \lambda_{crit} = \sqrt{\pi a_q^2 / G\sigma^0} = \sqrt{\frac{2\pi\, \mathrm{k_B}\, T_q}{mG\sigma^0\,[2+(1-q)\,\mathrm{D_f}\,]}}\ . \qquad (63)$$

Здесь величина $\lambda_{crit}$ – это размер мельчайших «капель» среды, которые могут удерживаться вместе собственным гравитационным притяжением. Чем меньше размер капли, тем больше $k$, и для них, согласно (62), $\omega^2 > 0$. В этом случае частота является действительной величиной и, следовательно, плотность таких возмущений сохраняется конечной – такие возмущения устойчивы. С другой стороны, большие капли соответствуют случаю $\omega^2 < 0$, тогда плотность экспоненциально растёт со временем. Такие волны неустойчивы; коэффициент $\mathrm{i}\omega$ соответствует темпу роста возмущений плотности, и мы видим, что $\mathrm{i}\omega$ тем больше, чем меньше $k$. В пределе $k \to 0$, т.е. $\lambda \to \infty$, тогда темп роста равен $|\omega_\infty| = 2\sqrt{\pi G\sigma^0}$.

В литературе величину $\lambda_{crit}/2$ называют длиной Джинса, поскольку именно эта величина соответствует размеру области сжатия, тогда как полная длина $\lambda_{crit}$ содержит как сжатие, так и разрежение. В этом случае возможен другой вариант формулы (63)

$$\lambda_{crit}/2 = \sqrt{\frac{\pi\, \mathrm{k_B}\, T_q}{4mG\sigma^0}} \cdot \sqrt{\frac{1}{[1+(1-q)\,\mathrm{D_f}/2]}} = \lambda_{\mathrm{J}}[1+(1-q)\,\mathrm{D_f}/2]^{-1/2}\ . \qquad (64)$$

В результате модифицированный в рамках неэкстенсивной статистики Тсаллиса критерий неустойчивости Джинса для фрактальной среды будет выглядеть следующим образом: длина $\lambda_{\mathrm{q}}$ неустойчивой моды должна удовлетворять неравенству

$$\lambda_{\mathrm{q}} > \lambda_{\mathrm{J}}[1+(1-q)\,\mathrm{D_f}/2]^{-1/2} \equiv \varXi\, \lambda_{\mathrm{J}}, \quad 0 < q < 1 + \tfrac{2}{\mathrm{D_f}}, \qquad (65)$$

где фактор $\varXi \equiv [1+(1-q)\,\mathrm{D_f}/2]^{-1/2}$ в пределе слабой связи ($q \to 1$) равен $\varXi = 1$; в случае когда $0 < q < 1$, фактор $\varXi < 1$; если $1 < q < 1 + 2/\mathrm{D_f}$, фактор $\varXi > 1$. Заметим, что в случае трёхмерного фазового пространства ($\mathrm{D_f} = 3$) фактор $\varXi \equiv \sqrt{2/(5-3q)}$. Следовательно, если энтропийный индекс $q$ лежит в интервале $0 < q < 1$, то наименьший размер «капель» фрактального субдиска, которые могут удерживаться вместе их собственным гравитационным притяжением, уменьшается по сравнению с «обычной» длиной Джинса, $\lambda_{\mathrm{q}} > \Xi\ \lambda_{\mathrm{J}}\ (< \lambda_{\mathrm{J}})$; если $1 < q < 1 + 2/\mathrm{D_f}$, то из формулы (65) следует, что $\lambda_{\mathrm{q}} > \Xi\ \lambda_{\mathrm{J}}\ (> \lambda_{\mathrm{J}})$, т.е. для того чтобы капля была в состоянии преодолеть гравитационное притяжением фрактального субдиска, её наименьший размер должен быть больше по сравнению с размером в «обычной» дисковой среде. Заметим, что стандартная длина волны Джинса восстанавливается в предельном случае $q = 1$. Таким образом, учёт фрактальности среды может в зависимости от значения индекса деформации приводить как к возрастанию критической длины волны по сравнению с критической длиной Джинса, так и к её убыванию.

Связанная с $\lambda_{\mathrm{q}}$ критическая масса (масса, содержащаяся внутри сферы диаметром $\lambda_q$) определяется соотношением

$$M_{crit} = \tfrac{4\pi}{3}\rho^0(\lambda_{\mathrm{q}}/2)^3 = M_{\mathrm{J}}\Xi^3 = M_{\mathrm{J}}\left\{1/[1+(1-q)\,\mathrm{D_f}/2]\,\right\}^{3/2}, \quad (66)$$

где $M_{\mathrm{J}} = \tfrac{\pi}{6}\rho^0\lambda_{\mathrm{J}}{}^3$ – критическая масса Джинса. Точно так же мы видим, что при $0 < q < 1$ (когда фактор $\Xi < 1$) и при $1 < q < 1 + 2/\mathrm{D_f}$ (когда фактор $\Xi > 1$) критическая масса фрактальной среды уменьшается (увеличивается) на коэффициент $\left\{1/[1+(1-q)\,\mathrm{D_f}/2]\,\right\}^{3/2}$. Заметим, что возмущения с массой, превышающей критическую массу Джинса $M_{crit}$ могут расти, формируя гравитационно ограниченные пылевые структуры, в то время как возмущения с массой меньше $M_{crit}$ не растут и ведут себя как акустические волны.

### 4.3. Критерий неустойчивости Тумре для фрактального диска

Учёт вращения трансформирует плоский слой в собственно диск и делает устойчивыми крупномасштабные (длинноволновые, $L \sim 1/k$) осесимметричные возмущения. Если в дисперсионном уравнении (61) пренебречь хаотическим (тепловым или турбулентным) движением ($a_q = 0$), то условие неустойчивости диска $\omega^2 \le 0$ приводит к следующему ограничению на длину волны:

$$L \le \pi G\sigma^0/\kappa^2 \approx \pi G\sigma^0/2\Omega^2 \quad (67)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае классическое неравенство (67) (но с несколько другим численным коэффициентом) справедливо и для диска с фрактальным распределением скоростей. Хорошо известно, что вращение препятствует гравитационной неустойчивости диска, если его размеры больше определенного предела, тогда как тепловые (или турбулентные) движения приводят к устойчивости для тел с размерами меньше некоторого предела[2,3].

Из соотношения (61) отчётливо видна связь дисперсионного уравнения для этого случая с критерием гравитационной неустойчивости Джинса. Отличие заключается в присутствии членов, описывающих вращение, $\Omega, \kappa$. Уравнение (61) удобно записать в безразмерном виде:

$$\nu_g^2 = Q_g K^2 - 2K + 1, \tag{68}$$

где $K = k / k_0$, $k_0 \equiv \kappa^2 / \pi G \sigma^0$, $\nu_g = \omega / \kappa$ − безразмерная частота джинсовых колебаний;

$$\begin{aligned} Q_g &= \left(1 + \frac{2}{\mathrm{D_f}}\right) \frac{k_0^2 a_q^2}{\kappa^2} = \left(1 + \frac{2}{\mathrm{D_f}}\right) \frac{a_q^2 \kappa^2}{(\pi G \sigma^0)^2} = \\ &= \frac{\kappa^2}{(\pi G \sigma^0)^2} \left( \frac{2(2 + \mathrm{D_f})}{\mathrm{D_f}(2 + \mathrm{D_f} - q\,\mathrm{D_f})} \right) \frac{\mathrm{k_B}}{m} T_q \end{aligned} \tag{69}$$

− *модифицированное число устойчивости Тумре для вращающегося диска.* Решение уравнения (68) есть

$$K_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4Q_g(1 - \nu_g^2)}}{2Q_g}. \tag{70}$$

Отсюда видно, что $K$ будет действительной величиной при условии

$$\nu_g^2 \geq 1 - 1 / Q_g. \tag{71}$$

Если

$$\begin{aligned} Q_g &= \left(1 + \frac{2}{\mathrm{D_f}}\right) \frac{k_0^2 a_q^2}{\kappa^2} = \left(1 + \frac{2}{\mathrm{D_f}}\right) \frac{a_q^2 \kappa^2}{(\pi G \sigma^0)^2} = \\ &= \frac{4\Omega^2}{(\pi G \sigma^0)^2} \left( \frac{2(2 + \mathrm{D_f})}{\mathrm{D_f}(2 + \mathrm{D_f} - q\,\mathrm{D_f})} \right) \frac{\mathrm{k_B}}{m} \mathrm{T}_q < Q_{cr} \simeq 1, \end{aligned} \tag{72}$$

то, согласно Тумре, диск будет неустойчивым по отношению к радиальным возмущениям. Если $Q_g \geq 1$, то малые возмущения будут усиливаться до тех пор, пока не будет достигнуто устойчивое состояние. При $Q_g = 1$ уравнение (70) имеет два корня $K = 1 \pm \nu_g$, которые соответствуют двум различным модам возмущающей волны: длинноволновая мода, $\lambda / \lambda_0 = 1/1 - \nu_g$; коротковолновая мода, $\lambda / \lambda_0 = 1/1 + \nu_g$ (здесь $\lambda_0 = 2\pi / k_0 = 2\pi^2 G \sigma^0 / \kappa^2 \approx \pi^2 G \sigma^0 / 2\Omega^2$ − длина волны, которая соответствует радиальной протяженности «капель»).

Рассмотрим теперь диск, устойчивый для всех $L$ относительно возмущений с большими длинами волн (из-за вращения) и относительно возмущений с меньшими длинами волн (из-за хаотических (тепловых) скоростей молекул газа). Неустойчивость такого диска называется граничной. Условия $\nu_g^2 = 0, \quad d\nu_g^2 / dK = 0$ − определяют границу устойчивости (эта ветвь собственных возмущений описывает безразличное равновесие), при

$$K = 1, \quad Q_g = 1 = \left(1 + 2 / \mathrm{D_f}\right) k_0^2 a_q^2 \kappa^{-2}, \tag{73}$$

(где $a_q = \sqrt{\dfrac{\mathrm{k_B}}{m[1+(1-q)\frac{\mathrm{D_f}}{2}]} T_q}$ ) диск находится на границе устойчивости. Заметим, что в присутствии диссипации на этой ветви могут развиваться неустойчивости, приводящие к экспоненциальному росту возмущений, имеющих отрицательную энергию[44,47].

Итак, для фрактальных самогравитирующих космических объектов критические значения длины волны и массы явно зависят от энтропийного индекса $q$ и фрактальной размерности $\mathrm{D_f}$ фазового пространства скоростей, что позволяет при исследовании разнообразных динамических структур в астрофизических дисках, порожденных уникальными неустойчивостями, более обоснованно моделировать реально сложившуюся в природе ситуацию.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для адекватного моделирования роста пылевых агрегатов на ранней стадии эволюции протопланетного газопылевого облака – стадии образования рыхлых прото- планетезималей, необходимо, в общем случае, привлекать к рассмотрению фрактальные свойства дисковой среды[32,32,34]. В данной работе в рамках неэкстенсивной статистики Тсаллиса и связанных с ней обобщённых гидродинамических уравнений Навье-Стокса для фрактальной среды обсуждаются критерии гравитационной неустойчивости Джинса и Тумре, играющие, как известно, фундаментальную роль во всей расширяющейся Вселенной[48]. В случае пренебрежения влиянием всех факторов, кроме самогравитации и теплового (турбулентного) движения частиц, получены модифицированные формулы критериев Джинса и Тумре для фрактальных самогравитирующих космических объектов. Рассмотренный здесь подход к анализу гравитационной неустойчивости в плоскости астрофизических дисков в рамках статистики Тсаллиса легко может быть распространён на разнообразные ситуации, наиболее адекватно соответствующие природным космическим объектам[43], например, при исследовании динамики возмущений в неоднородных и неизотропных дисковых фрактальных средах, при исследовании гравитационных возмущений в плоскости диска с учетом диссипативных эффектов, при исследовании собственных частот колебаний в вертикально неоднородном диске с учетом магнитного поля и т.п.

## REFERENCES

[1] Kolesnichenko A.V., Chetverushkin B.N. Kinetic derivation of a quasi-hydrodinamic system of equations on the base of nonextensive statistics. *RJNAMM* (*Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*). **28**(6), 547-576 (2013).

[2] Toomre A. On the gravitational stability of a disk of stars. *Astrophys. J.,* **139**, 1217-1238 (1964).
[3] Safronov V.S. Evoliutciia doplanetnogo oblaka i obrazovanie Zemli i planet. *M.: Nauka*. 244 (1969).
[4] Goldrich P., Ward W.R. The formation of planetesimals. *Astrophys. J.*. **183**(3), 1051-1061 (1973).
[5] Nakamoto T., Nakagawa Y. Formation, early evolution, and gravitational stability of protoplanetary disks. *Astrophys. J.* **421**, 640-651 (1994).
[6] Guilera O. M., de El´ıa G. C., Brunini A., Santamar´ıa P. J. The role of planetesimal fragmentation on giant planet formation. *arXiv:1401.7738v1 [astro-ph.EP*], 15 p. (2014).
[7] Turner N. J., Fromang S., Gammie C., Klahr H., Lesur G., Wardle M., Bai X-N. Transport and Accretion in Planet-Forming Disks. *arXiv:1401.7306v1 [astro-ph.EP*], 24 p. (2014).
[8] Dominik C., Blum J.,Cuzzi J., Wurm G. Growth of dust as the initial step toward planet formation. *Protostars and Planets* V- Arizona Press, AZ, (2007).
[9] Wolf S., Malbet F., Alexander R., Berger J.-Ph., Creech-Eakman M., Duchêne G., Dutrey A., Mordasini C., Pantin E., Pont F., Pott J.-U.,.Tatulli E, Testi L. Circumstellar disks and planets Science cases for next-generation optical/infrared long base line Interferometers.*arXiv:1203.6271v1 [astro-ph.IM*], 83 p. (2012).
[10] Lima J.A. S.; Silva R.; Santos J. Jeans' gravitational instability and nonextensive kinetic theory.*Astronomy and Astrophysics*. **396**, 309-313 (2002).
[11] Sakagami M., Taruya A. Self-gravitating stellar systems and non-extensive thermostatistics.*Continuum Mechanics and Thermodynamics*. **16**(3), 279-292 (2004).
[12] Nobuyoshi K, Shigeo K; Takahiro K. Nonequilibrium process of self-gravitating N-body systems and quasi-equilibrium structure using normalized q-expectation values for Tsallis' generalized entropy. *Journal of Physics: Conference Series*.. **201**(1), 012009. (2010).
[13] de Freitas D.B., de Medeiros J.R. Nonextensivity in the solar neighborhood. *Europhysics Letters*. **97**(1), 19001. (2012).
[14] Olemckii A.I. Sinergetika slozhnykh sistem: Femenologiia i statisticheskaia teoriia. *M.: KRASAND,* 384 (2009).
[15] Bak P. Kak rabotaet priroda: Teoriia samoorganizovannoi kritichnosti.*M.: URSS: Knizhnyi dom «LIBKOM»,* 276. (2014).
[16] Tsallis C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. *J. Stat. Phys.* **52**. 479-487. (1988).
[17] Curado E.M.F., Tsallis C. Generalized statistical mechanics: connection with thermodynamics. *J. Phys*. A 24. P. L 69-72. (1991).
[18] Tsallis C., Mendes R.S., Plastino A.R. The role of constraints within generalized Nonextensive statistics. *Physica A*. 1998. V. 261. P. 534-554.
[19] Weidenschilling S.J. Dust to planetesimals: Settling and coagulation in the solar nebula. *Icarus.* **44**, 172-189(1980).
[20] Nakagawa Y., Nakazawa K., Hayashi C. Growth and sedimentation of dust grains in the primordial solar nebula. I*carus.* **45**, 517-528 (1981).
[21] Nakagawa Y., Hayashi C., Nakazawa K. Accumulation of planetesimals in the solar nebula. *Icarus.* **54**, 361-376 (1983).
[22] Nakagawa Y., Sekiya M. Hayashi C. Settling and growth of dust particles in a laminar phase of a low-mass Solar nebula. *Icarus.* **67,** 375-390 (1986).

[23] Blum J. Grain growth and coagulation/ *In ASP Conf. Ser. Vol.309, Astrophysics of Dust*, ed. A. N.Witt, G. C. Clayton and B. T. Draine (San Francisco: ASP). P. 369. (2004).
[24] Ormel C. W., Spaans M., Tielens A. G. G. M. Dust coagulation in protoplanetary disks: porosity matters. *Astron. Astrophys*. **461**, 215-236 (2007).
[25] Suyama T., Wada K., Tanaka H. Numerical simulation of density evolution of dust aggregates in protoplanetary disks. I. Head-on collisions. *Astroph. J*. **684,** 1310-1322 (2008).
[26] Suyama T., Wada K., Tanaka H., Okuzumi S. Geometrical cross sections of dust aggregates and a compression model for aggregate collisions. *arxiv:1205.1894vl [astro-ph. EP*]. 28 p. (2012).
[27] Wada K., Tanaka H., Suyama T., Kimura H., Yamamoto T. Simulation of dust aggregate collisions. ii. compression and disruption of three-dimensional aggregates in head-on collisions. *Astrophys. J*. **677**, 1296-1308 (2008).
[28] Wada K., Tanaka H., Suyama T., Kimura H., Yamamoto T. Collisional growth conditions for dust aggregates. *Astrophys. J*. **702**,1490-1501 (2009).
[29] Okuzumi S., Tanaka H., Sakagami M.-A. Numerical modeling of the coagulation and porosity evolution of dust aggregates. *ApJ*. **707**, 1247-1264 (2009).
[30] Okuzumi S., Tanaka H., Takeuchu T., Sakagami M.-A. Electrostatic barrier against dust growth in protoplanetary disks.1. Classifying the evolution of size distribution . *ApJ*. **731**. 95 (2011).
[31] Kataoka A., Tanaka H.,Okuzumi S.,Wada, K. Static compression of porous dust aggregates. *Protostars and Planets VI. Heidelberg.. Poster #2B0929* (sм. takzhe arXiv: http:.arxiv.org/abs/ 1307.7984), (2013).
[32] Kataoka A., Tanaka H., Okuzumi S., Wada K. Fluffy dust forms icy planetesimals by static compression. Astronomy & Astrophysics.V. 557. id.L4. 4 p. (sм. takzhe arXiv: http:. arXiv:1307.7984), (2013)
[33] Tarasov V.E. Fractional Dynamics. Applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media. *Berlin: Springer*. 567 p. (2010).
[34] Kolesnichenko A.V., Marov M. Ya. K modelirovaniiu protcesa agregatcii pylevikh frak-tal'nikh klasterov v protoplanetnom laminarnom diske.*Astron. Vestnik*, **47**(2), 92-111 (2013).
[35] Leontovich M.A. Vvedenie v termodinamiku. Statisticheskaia fizika. *Nauka*. 416 (1983).
[36] Kolesnichenko A.V. K postroeniiu entropiinoi transportnoi modeli na osnove formalizma neekstensivnoi statistiki. *Matematicheskoe modelirovanie*. **26**(4) 48-64 (2014).
[37] Boghosian B.M. Thermodynamic description of the relaxation of two-dimensional turbulence using Tsallis statistics. *Phys. Rev*.. E **53**, 4754 (1996).
[38] Arimitsu T., Arimitsu N. Analysis of turbulence by statistics based on generalized Entropies. *Physica*. A **295,** 177 (2001).
[39] Boghosian B.M. Navier-Stokes Equations for Generalized Thermostatistics.*Bras. J. Phys*. **29**(1), 91-107 (1999).
[40] Bogolyubov N.N. Problems of a dynamical theory in statistical physics.*Moskow: Gostekhizdat*. 122. (1946).
[41] Morozov A.G. Dissipativnie effekti v gazjvikh podsistemakh ploskikh galaktik.*Astron.Zhurn*. E.**59**, 864-869 (1982).

[42] Morozov A.G. Lokal'nii kriterii ystoichivosti gasovikh podsistem ploskikh galaktik. *Astron. Zhurn.*. E.**62**, 209-217 (1985).
[43] Fridman A.M., Khoperskov A.V. Fizika galakticheskikh diskov. *M.: FISMATLIT*. 640. (2011).
[44] Gor'kavyi N.N., Fridman A.M. Fizika planetnikh koletc. *M.: Nauka*. 348 (1994).
[45] Fridman A. M., Polyachenko V. L. Physics of gravitating system. *N.Y. Springer-Verlag.* **1**. 468, **2**. 358 (1984).
[46] Morozov A.G.., Torgashin Iu.M., Fridman A. M Turbulentnaia viazkost' gravitiryiushchego gazovogo diska. *Pis'ma v Astron.Zhurn*. **11**, 231-238 (1985).
[47] Fridman A.M., Gor'kavyi N.N. Physics of Planetary Rings. *New York: Springer*. (1999).
[48] Peebles P. J. E. Principles of Physical Cosmology. *Princeton U. Press, Princeton*. (1993).

Поступила в редакцию 20.11.2014.