

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕНЕРАЦИИ ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ УСКОРИТЕЛЯ

М.Е. ЖУКОВСКИЙ<sup>\*</sup>, М.Б. МАРКОВ<sup>\*</sup>, С.В. ПОДОЛЯКО<sup>\*</sup>, Р.В. УСКОВ<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН  
Москва, Россия  
e-mail: [zhuk@kiam.ru](mailto:zhuk@kiam.ru), web page: <http://www.keldysh.ru>

**Ключевые слова:** математическое моделирование, тормозное излучение, гибридное распараллеливание

**Аннотация.** Рассматривается процесс генерации тормозного гамма-излучения при взаимодействии пучка электронов ускорителя с мишенью. Для описания переноса излучения используется модель индивидуальных соударений, которая является удобной для эффективного распараллеливания расчетов на гибридной вычислительной технике. Разработаны статистические алгоритмы для моделирования переноса квантов и электронов в веществе на гибридной вычислительной технике с помощью технологии NVIDIA© CUDA. Представлены примеры расчетов.

## MODELING OF BREMSSTRAHLUNG GENERATION BY ELECTRON BEAM OF ACCELERATOR

M. ZHUKOVSKIY<sup>\*</sup>, M. MARKOV<sup>\*</sup>, S. PODOLYAKO<sup>\*</sup> AND R. USKOV<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> Keldysh Institute for Applied mathematics of RAS  
Moscow, Russia  
e-mail: [zhuk@kiam.ru](mailto:zhuk@kiam.ru), web page: <http://www.keldysh.ru>

**Summary.** The process of bremsstrahlung generation by electron beam of accelerator is considered. The model of individual collisions is used for description of radiation transport. The model is applicable for effective parallelization on hybrid supercomputers. Statistical algorithms are developed for modeling of electron and photon transport in matter on heterogeneous supercomputers by use of NVIDIA© CUDA technology. Some results of calculations are represented.

## 1 ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваются подходы к численному исследованию процессов генерации тормозного излучения релятивистским электронным пучком линейного ускорителя и процессов регистрации этого излучения современными детектирующими устройствами средствами математического моделирования на перспективных вычислительных системах с гибридной архитектурой. Такое исследование актуально для анализа эффективности современных и перспективных источников гамма-излучения, а также для изучения взаимодействия гамма-квантов с веществом конструкционных материалов приборных комплексов, находящихся в экстремальных условиях, например, на борту космических аппаратов. Математическое моделирование зачастую является единственным способом оценки параметров тормозного излучения, поскольку физические эксперименты дороги, а в ряде случаев принципиально не реализуемы. Состояние микроэлектронных изделий в полях ионизирующих излучений невозможно оценить на основе интегральных параметров (поглощенной дозы излучения, мощности дозы), вычисляемых в рамках существующих моделей. Требуется детальный анализ полей излучений на основе прямого моделирования отдельных столкновений частиц. Для этого необходима разработка модели переноса тормозного излучения и вторичных электронов и позитронов в сложной среде, характерные размеры неоднородностей которой сопоставимы с длинами пробега отдельных частиц. Использование гибридных суперкомпьютеров и современных технологий распараллеливания вычислений с использованием потоковых процессоров графических ускорителей (например, NVIDIA© CUDA) позволяет строить модели переноса без использования приближенных теорий многократного рассеяния и непрерывного замедления.

В работе описана модель взаимодействия излучения с веществом, построенная на основе модели индивидуальных соударений<sup>1</sup>. Рассмотрены алгоритмы моделирования процесса генерации тормозного излучения, разработанные на основе весовых модификаций метода Монте-Карло, допускающих эффективное распараллеливание на гибридной вычислительной технике<sup>2</sup>. Методы моделирования процессов регистрации излучения в детектирующих системах учитывают совокупный вклад фотонного и электронного излучений в измеряемую величину, определяемую соответствующим функционалом от решения уравнения переноса. При этом детально учитываются процессы взаимодействия частиц излучения с компонентами системы «объект-детектор», в том числе различные типы переотражений квантов и электронов<sup>3</sup>.

## 2 МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ

Модель взаимодействия гамма-квантов и электронов с веществом построена в соответствии с особенностями технологии гибридного распараллеливания. В состав гетерогенных (или гибридных) вычислительных систем, наряду с центральными многоядерными процессорами, входят графические потоковые процессоры. Они используются в качестве арифметических сопроцессоров. Использование таких суперкомпьютеров для моделирования переноса излучения показало высокую эффективность<sup>4,5</sup>.

Традиционные физические модели переноса излучения строятся на основе усредненных описаний столкновений электронов: теории многократных столкновений<sup>6</sup>, теории энергетических потерь Ландау<sup>7</sup> и др. Реализация таких моделей подразумевает

разработку алгоритмов со сложной логикой, обусловленной необходимостью проверки применимости приближений в процессе вычислений. Кроме того, необходимы итерационные процедуры, когда априорный выбор параметров модели невозможен. Указанные модели трудно реализуемы на гибридной вычислительной технике именно в силу своей сложной внутренней логики.

С другой стороны, вычислительные средства с традиционной архитектурой не дают возможности детального анализа физических процессов в достаточно полных актуальных постановках. К таким задачам относятся, например, исследование генерации тормозного излучения в сложных преградах, изучение процессов радиационной электронной эмиссии с поверхностями объектов, имеющих сложную геометрическую структуру<sup>8</sup>. Физические модели более «низкого» уровня, построенные без использования указанных распространенных приближений, позволяют детально исследовать рассматриваемые явления. Но эти модели трудно реализуемы на многопроцессорных компьютерах с традиционной архитектурой, так как требуют огромных затрат вычислительных ресурсов. Зато такие модели отлично подходят для проведения расчетов на вычислительных средствах с гибридной архитектурой.

Оказывается, что с одной стороны разработка более глубоких физических моделей требует использования вычислительной техники, основанной на гибридной архитектуре. С другой стороны, эксплуатация этой техники на «фундаментальном» уровне гораздо эффективнее, чем на уровне «усредненных», но логически более сложных моделей, реализация которых на компьютерах с традиционной архитектурой показала их высокую эффективность в рамках соответствующей области применимости этих моделей.

## 2.1 Основные уравнения модели переноса излучения

Рассматривается ситуация, когда время изменения мощности источника излучения существенно превышает время жизни частиц в плотном веществе объекта. В этом случае справедливы квазистационарные интегро-дифференциальные уравнения переноса фотонов и электронов. Время при этом рассматривается в качестве параметра. В таких задачах для описания состояния частицы используют переменные  $x = (\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, E)$ , где  $\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, E$  – координаты, направление движения и энергия частицы соответственно. Интегро-дифференциальное уравнение для плотности потока частиц  $\Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, E)$  сводится к интегральному уравнению Фредгольма 2-ого рода<sup>9</sup>:

$$\Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, E) = \Phi_0(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, E) + \int_0^{\infty} d\xi \exp\{-\tau(\mathbf{r} - \xi\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}, E)\} \int d\boldsymbol{\Omega}' \int dE' \mu_s(\mathbf{r} - \xi\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}', E', E) \Phi(\mathbf{r} - \xi\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}', E') \quad (1)$$

В формуле (1)

$$\Phi_0(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, E) = \int_0^{\infty} d\xi \exp\{-\tau(\mathbf{r} - \xi\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}, E)\} S(\mathbf{r} - \xi\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}, E). \quad (2)$$

Формула (2) описывает поток нерассеянных частиц от внешних и внутренних

источников излучения;  $S(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, E)$  - источник;  $\tau(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \varepsilon) = \int_0^\xi \mu(\mathbf{r} - \xi \mathbf{\Omega}, \varepsilon) d\xi'$  - оптическое расстояние (глубина) между точками  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \xi \mathbf{\Omega}$ ;  $\mu, \mu_s$  - полное макроскопическое сечение и дифференциальное сечение рассеяния.

Сложный процесс прохождения частицы через вещество можно представить в виде последовательности элементарных процессов взаимодействия между рассматриваемой частицей и атомами вещества (траектория частицы). К этим процессам относятся рассеяние, торможение или гибель частицы в результате поглощения или вылета из рассматриваемой системы (объекта).

Такое представление удобно для моделирования переноса излучения методом Монте-Карло. Для этого рассматриваемое уравнение переноса преобразуют к виду:

$$Q(x) = Q_1(x) + \int_0^\infty d\xi \cdot \exp\{-\tau(\mathbf{r} - \xi \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}, E)\} \int d\mathbf{\Omega}' \int dE' \mu_s(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}', \mathbf{\Omega}, E', E) \frac{\mu(x)}{\mu(x')} Q(x'). \quad (3)$$

В уравнении (3) величина  $Q_1(x) = \mu(x) \Phi_0(x)$  - плотность первых столкновений. Ядро интегрального оператора  $k = \exp\{-\tau(\mathbf{r} - \xi \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}, E)\} \mu_s(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}', \mathbf{\Omega}, E', E) \frac{\mu(x)}{\mu(x')}$  имеет смысл плотности вероятности перехода  $x' \rightarrow x$ . Величина  $k \cdot d\xi d\mathbf{\Omega}' dE'$  интерпретируется как вероятность перехода из точки  $x' = (\mathbf{r} - \xi \mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}', E')$  в точку  $x = (\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, E)$ .

Задача теории переноса заключается в вычислении показаний детектора  $J$ , помещенного в поле излучения. Искомые величины представляют как показания некоторого детектора и записывают в виде функционалов от решения уравнения переноса  $J = \int Q(x) D(x) dx$ ,  $D$  определяется типом искомой (измеряемой) величины.

Рассматриваются такие регистрирующие устройства (детекторы), показания которых  $J$  равны сумме вкладов отдельных столкновений частиц в чувствительном объеме детектора (аддитивные детекторы).

Для решения уравнения переноса Методом Монте-Карло моделируются случайные траектории частиц. Вклады этих траекторий в детектор суммируются. Построение траектории частицы проводится согласно выбранной физической модели взаимодействия излучения с веществом.

Основными количественными данными модели переноса являются вероятностные распределения характеристик частиц, меняющихся в процессе взаимодействия с веществом. Эти распределения строятся путем обработки сечений (дифференциальных сечений) столкновений.

## 2.2 Распределения физических величин

В процессе взаимодействия с веществом состояние частицы изменяется. Это изменение носит случайный характер и для его описания используют вероятностные распределения.

Пусть  $x$  – значения случайной величины  $\tau$ , характеризующей состояние частицы.

Если известна плотность распределения  $f(x)$  этой величины, то ее распределение  $F(x)$  определяется интегралом  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ . Величина  $F(x)$  равна вероятности того, что значение  $\tau$  будет меньше  $x$ :  $F(x) = P(\tau < x)$ .

Моделирование (разыгрывание) случайной величины  $\xi$  осуществляется методом «обратной функции»<sup>10</sup>. Он основан на теореме об обратной функции: если  $\gamma \in (0,1)$  – равномерно распределенная случайная величина, а значения  $x$  случайной величины  $\xi$  удовлетворяют уравнению

$$\int_{-\infty}^x f(t) dt = \gamma, \quad \gamma \in (0,1), \quad (4)$$

то  $\xi$  имеет плотность распределения  $f(x)$ . Следовательно,  $x$  есть значение функции, обратной к функции  $F(x)$ :  $x = F^{-1}(\gamma)$ .

Сечения процессов взаимодействия частиц с веществом известны в подавляющем большинстве случаев в виде табличных данных. Поэтому для моделирования рассеяния ставится задача табличного задания функций  $x(\gamma)$ , отвечающего следующим требованиям:

- погрешности табличных данных должны соответствовать необходимой точности вычислений;
- использования получаемых распределений в процессе моделирования должно быть удобным;
- объем построенных таблиц должен быть минимален.

Погрешность распределений зависит в первую очередь от точности исходных данных о сечениях и должна оцениваться с учетом дискретизации соответствующих областей фазового пространства, точности интегрирования в левой части уравнения (4) и вычисления значений обратной функции  $F^{-1}(\gamma)$ .

Очевидно, что эффективность использования табличных распределений зависит от способа получения значений в «промежуточных» точках, то есть в точках двумерной области  $(\gamma, x)$ , не совпадающих с узлами таблиц. Наиболее простым способом с прогнозируемой погрешностью является линейная (билинейная) интерполяция. Поэтому естественным представляется табулировать функции от искомым распределений, которые изменяются в соответствующих областях фазового пространства по закону, близкому к линейному. Это достигается анализом функциональных зависимостей сечений процессов. В качестве независимой переменной при табуляции следует выбирать величину, которая позволяет пользоваться равномерными сетками. Степень дискретизации при этом определяется, с одной стороны, минимизацией погрешности табличных данных, а с другой – минимизацией объема таблиц.

### 2.3 Взаимодействие электронов с веществом

Рассматриваются следующие процессы взаимодействия электронов с веществом:

- упругое рассеяние на атомах вещества, приводящее к отклонению электрона от первоначального направления движения;
- возбуждение атомов, сопровождающееся малыми потерями энергии электрона;
- ионизационные столкновения или ударная ионизация с появлением вторичного электрона;
- радиационное торможение в кулоновском поле атома с генерацией фотона тормозного излучения.

Общепринятые схемы моделирования переноса основаны на различных модификациях модели вложенных траекторий (ETRAN<sup>11</sup>, ITS3<sup>12</sup>, EGS4<sup>13</sup>, GEANT<sup>14</sup>). В такой модели для описания параметров электронных потоков, распространяющихся в веществе, применяют различные приближения теории многократных соударений<sup>6</sup> и группировки потерь энергии в неупругих столкновениях<sup>7</sup>.

Упругое рассеяние электронов описывается обычно в рамках приближенной теории многократного рассеяния Гоудсмита-Саундерсона<sup>6</sup>; неупругие взаимодействия электронов с веществом описываются в большинстве известных работ с использованием различных модификаций приближения непрерывного замедления. В этом приближении предполагается, что за пройденный путь  $s$  электрон теряет энергию

$$\Delta E = \int_0^s \kappa(x) dx, \quad \text{где } \kappa(s) = -\frac{dE}{ds} \text{ – линейная тормозная способность электрона,}$$

флуктуации потерь энергии учитываются по теории Ландау<sup>7</sup> с использованием поправок Блунка и Ляйзеганга (Blunck and Leisegang<sup>15</sup>).

Как указывалось выше, реализация распространенных схем моделирования переноса электронов на гибридной вычислительной технике не эффективна из-за сложной внутренней логики этих схем и необходимости в ряде случаев проведения итерационных процедур.

Авторами настоящей статьи разработана модель процессов взаимодействия электронов с веществом<sup>1</sup> на основе обработки табулированных данных для сечений этих процессов без использования указанных выше распространенных приближений. Основным источником этих данных является база данных Национального центра ядерных данных (<http://www.nndc.bnl.gov/sigma/>).

Отметим, вначале, что сечения всех рассматриваемых процессов обратно пропорциональны некоторой степени энергии электрона  $\sigma_v \sim E^a$ ,  $a \leq -1$ . Кроме того, удобно использовать отношение сечения к атомной массе  $\sigma_v/A$ . Поэтому для табулирования электронных характеристик используется функция  $F_v = \lg(\sigma_v/A)$ .

Функция распределения косинуса полярного угла упругого рассеяния  $y = \cos \theta$  строится с использованием данных для плотности распределения этого угла. Для качественного анализа распределения используется формула Резерфорда для дифференциального сечения упругого рассеяния:  $d\sigma/dy \sim 1/E^2(1-y)^2$ . Проводя

интегрирование  $\int_{-1}^y \frac{d\sigma}{dt} dt$  и решая уравнение (4) получим, что  $y \sim E^2 \gamma - 1$  при  $\gamma \rightarrow 0$ .

Такая зависимость не является удобной, т.к. не позволяет использовать одну и ту же

равномерную сетку по  $\gamma \in (0,1)$  для всех энергий электрона. В то же время  $\lg(1+y) \sim \lg E^2 + \lg \gamma$ . В этом случае сетка по величине  $\lg \gamma$  может быть выбрана одна и та же для любой энергии электрона, поскольку производная  $d \lg(1+y)/d \lg \gamma$  не зависит от энергии.

С учетом вышесказанного, для моделирования процесса упругого рассеяния электронов выбрана функция  $F_{el}(y) \equiv \lg(1+y) = F(\lg \gamma)$ . Использование этой функции позволяет строить равномерные по  $\lg \gamma$  сетки, независимо от энергии электрона. Путем обработки табулированных значений величины  $d\sigma_{el}/dy$  были получены соответствующие вероятностные распределения косинуса угла упругого рассеяния.

Когда электрон с энергией  $E_0$  налетает на атом, имеющий  $N_{sh}$  оболочек, он может потерять энергию на ионизацию («отрыв» атомного электрона с оболочки) некоторой оболочки и на передачу части своей кинетической энергии соответствующему атомному электрону. Плотность распределения потери энергии  $f_n(E|E_0)$  налетающим электроном с энергией  $E_0$  на «ионизацию» равна

$$f_n(E|E_0) = \delta(E - E_n) \sigma_n(E_0) / \sum_{n=1}^{N_{sh}} \sigma_n(E_0). \quad (5)$$

Здесь  $\sigma_n(E_0)$  - сечение ионизации на  $n$ -ой оболочке;  $E_n$  - энергия связи;  $E$  - потеря энергии.

Плотность распределения переданной вторичному электрону энергии

$$f_n^{sec}(E|E_0) = \frac{d\sigma_n}{dE} \sigma_n \eta(E_0 - E_n) / \sum_{n=1}^{N_{sh}} \sigma_n. \quad (6)$$

После ионизации образуются два электрона. Вторичным называют электрон с меньшей энергией. Поэтому переданная вторичному электрону энергия может изменяться от 0 до  $(E_0 - E_n)/2$ . Суммируя (5) и (6), и интегрируя по переданной энергии, получим:

$$F_{ion}(E|E_0) = \sum_{n=1}^M \eta(E_0 - E_n) \frac{\sigma_n(E_0)}{S(M)} \left\{ \eta \left( \frac{E_0 - E_n}{2} - E \right) \int_0^E \frac{d\sigma_n}{dt} dt + 1 \right\}. \quad (7)$$

В формуле (7)  $S = \sum_{n=1}^M \sigma_n(E_0)$ , а  $M = \sum_{n=1}^{N_{sh}} \eta(E_0 - E_n)$ ,  $\eta(x) = \{1, x > 0; 0, x < 0\}$  - единичная функция. С помощью (7) построены распределения ионизационных потерь для моделирования процесса переноса электронов.

Дифференциальное по энергии фотона сечение тормозного излучения обратно пропорционально энергии фотона<sup>16</sup>:  $d\sigma_{br}/dE_{ph} \sim 1/E_{ph}$ . Проводя соответствующие преобразования, получим:  $\lg(E_{ph}) \sim \gamma$ . То есть логарифм от потерь энергии электроном на тормозное излучение ведет себя как функция  $\gamma$  по закону, близкому к линейному.

Поэтому моделирование процесса тормозного излучения оказывается удобным проводить с помощью функции  $F_{br} = \lg(E_{ph})$ . На рисунке 1 изображены графики построенной функции  $F_{br}$  от  $\gamma$  для алюминия.

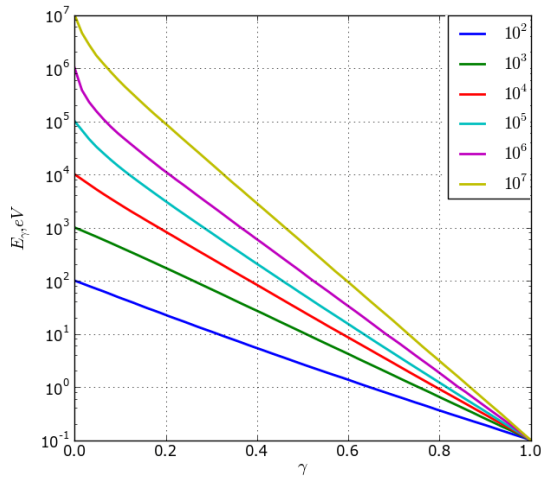


Рис. 1: Вероятностные распределения энергии тормозного фотона в алюминии, энергия электрона справа сверху указана в eV.

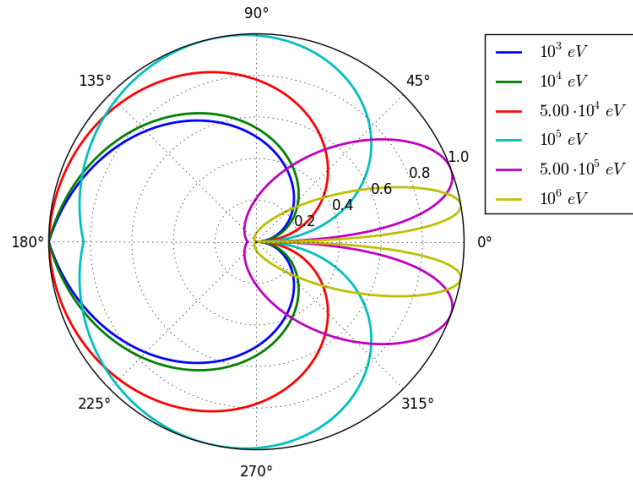


Рис. 2: Индикатриса вылета тормозного гамма-кванта, справа сверху обозначены энергии кванта.

Плотность распределения полярного угла вылета тормозного фотона (по отношению к направлению движения электрона) была получена<sup>17</sup> и аппроксимирована<sup>18</sup> следующей формулой:

$$p(u) = C[u \exp\{-au\} + du \exp\{-3au\}], \quad u \in (0, u_{\max}). \quad (8)$$

Здесь:  $a = 5/8$ ,  $d = 27$ ,  $u = \theta E / m_e c^2$ ,  $u_{\max} = \pi E_{ph} / m_e c^2$ . Распределение азимутального угла изотропно:  $\varphi = 2\pi \cdot \gamma$ ,  $\gamma \in (0, 1)$ .

С помощью (8) построены вероятностные распределения угла вылета тормозного гамма-кванта. На рис.2 изображена индикатриса угла вылета тормозного фотона.

Моделирование переноса тормозного излучения проводится с учетом всех процессов взаимодействия гамма-квантов с веществом.

## 2.4 Взаимодействие тормозного излучения с веществом

Рассматриваются следующие типы столкновительных процессов квантов гамма- и рентгеновского излучения с атомами вещества:

- Когерентное рассеяние;
- Комptonовское (некогерентное) рассеяние;
- Фотопоглощение квантов (фотоионизация атомов);
- Рождение электрон-позитронных пар.

При *когерентном* (или *Рэлеевском*) рассеянии фотон взаимодействует со связанным атомным электроном без возбуждения атома. Энергия налетающего и рассеянного



фотона одна и та же. Дифференциальное по углу сечение когерентного рассеяния приближенно описывается формулой<sup>19</sup>

$$\frac{d\sigma_R}{ds} = \frac{d\sigma_T}{ds} F^2(q, Z). \quad (9)$$

В формуле (9):  $\frac{d\sigma_T}{ds} = \frac{r_e^2}{2}(1+s^2)$  - сечение Томпсона рассеяния фотона на свободном покоящемся электроне;  $s = \cos \theta$ ,  $\theta$  - полярный угол рассеяния,  $r_e$  - классический радиус электрона;  $F(q, Z)$  - атомный форм-фактор<sup>19</sup>;  $q$  - величина переданного импульса.

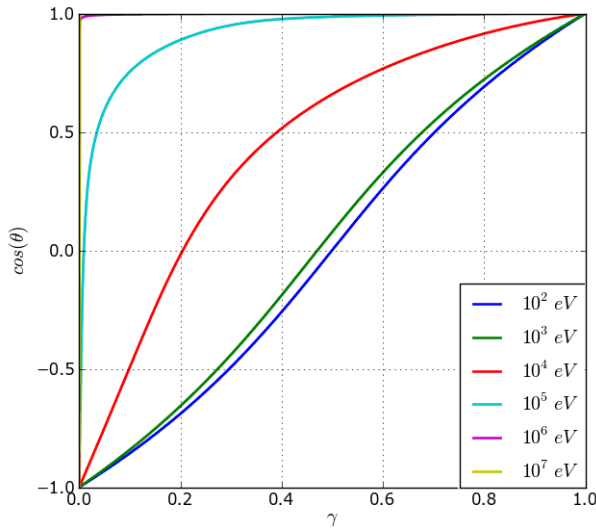


Рис. 3: Вероятностные распределения угла когерентного рассеяния в алюминии.

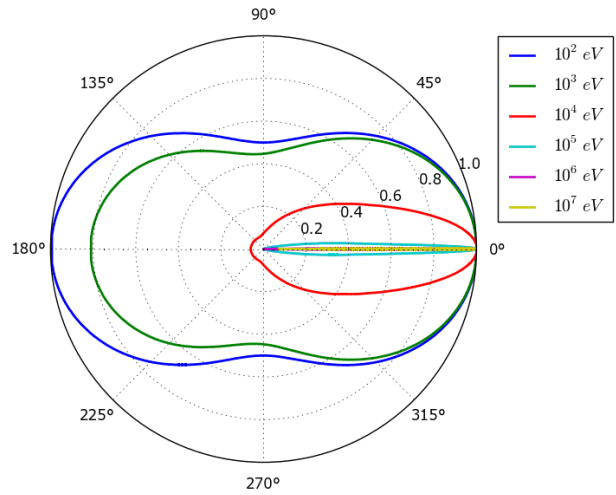


Рис. 4: Индикатриса когерентного рассеяния в алюминии.

Рис. 3 иллюстрирует рассчитанные вероятностные угловые распределения  $\cos \theta(\gamma)$  фотонов при когерентном рассеянии на атомах алюминия; на рис. 4 – соответствующая индикатриса рассеяния. Разными цветами на этих рисунках обозначены графики при различных энергиях кванта.

Комптонское рассеяние фотона на свободном покоящемся электроне описывается дифференциальным сечением Кляйны-Нишины  $\frac{d\sigma_{KN}}{d\theta}$ , а связанность электрона в атоме учитывается путем введения функции рассеяния<sup>20</sup>  $I(q, Z)$ :

$$\frac{d\sigma_C}{d\theta} = \frac{d\sigma_{KN}}{d\theta} I(q, Z). \quad (10)$$

На рис. 5 показаны рассчитанные с помощью (10) вероятностные распределения  $\cos \theta(\gamma)$  комптоновского рассеяния квантов, а на рис. 6 – индикатриса рассеяния.

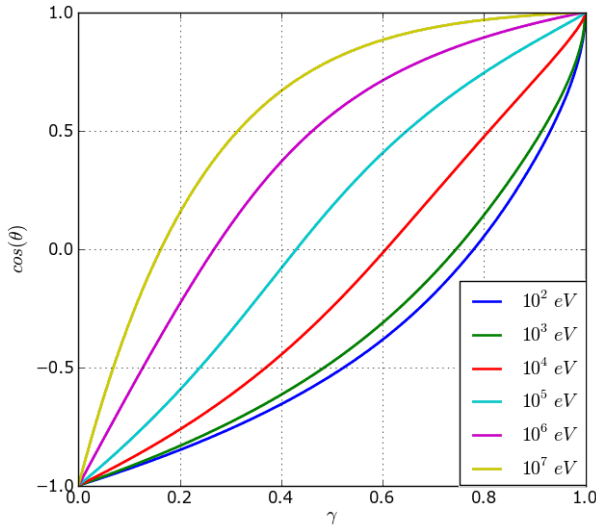


Рис. 5: Вероятностные распределения угла комптоновского рассеяния в алюминии.

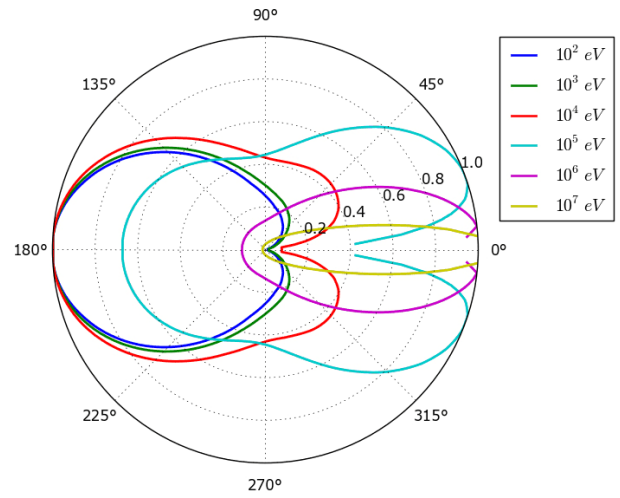


Рис. 6: Индикатриса комптоновского рассеяния гамма-квантов в алюминии.

Процесс *фотоионизации* заключается в ионизации атома путем отрыва электрона, поглотившего фотон, с атомной оболочки. При этом электрон приобретает кинетическую энергию, равную разности энергии фотона и энергии связи электрона в атоме.

При взаимодействии фотона с ядром атома может произойти *рождение электрон-позитронной пары*. Полное сечение этого процесса табулировано<sup>20</sup>. Моделирование рождения пар проводится аналогично<sup>14, 21</sup>. Дифференциальное по энергии частицы преобразованное сечение Бете-Гайтлера<sup>22</sup> записывается в виде:

$$\frac{d\sigma(Z, w)}{dw} = r_e^2 \alpha Z [Z + \eta(\varepsilon_\gamma)] \left\{ [w^2 + (1 - w^2)] (\Phi_1 - 4f_C) + \frac{2}{3} w(1 - w) (\Phi_2 - 4f_C) \right\} \quad (11)$$

В (11):  $Z$  - атомный номер элемента;  $w = E/E_\gamma$ ,  $E$  - полная энергия рожденной частицы,  $E_\gamma$  - энергия фотона;  $\alpha = 1/137$  - постоянная тонкой структуры;  $r_e$  - классический радиус электрона;  $\eta(E_\gamma) = (1 - \exp(-\nu))\eta_0$  - электронная поправка, учитывающая вклад от процесса рождения пар, обусловленного взаимодействием фотона с полем атомного электрона,  $\nu = (0.28 - 0.19a)s(E_\gamma) + (0.11 - 0.22a)s^2(E_\gamma) + \dots$ ,

$s(E_\gamma) = \ln\left(\frac{4m_e c^2}{E_\gamma}\right)$ ,  $a = \alpha Z$ ,  $\eta_0$  - табулировано<sup>17</sup> для каждого  $Z = 1 \div 92$ ;

$$f_C(Z) = (\alpha Z)^2 \left[ \frac{1}{1 + (\alpha Z)^2} + 0.2 - 0.037(\alpha Z)^2 + 0.008(\alpha Z)^4 - \dots \right] -$$

- кулоновская поправка для высоких энергий<sup>17</sup>;

$$\Phi_1(w) = 2 - 2 \ln(1 + b^2) - 4b \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{b}\right) + 4 \ln(\psi(Z));$$

$$\Phi_2(w) = \frac{4}{3} - 2 \ln(1 + b^2) + 2b^2 \left[ 4 - 4b \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{b}\right) - 3 \ln(1 + b^2) \right] + 4 \ln(\psi),$$

$\psi(Z)$  - константа, пропорциональная радиусу экранирования, табулированная<sup>17</sup> для всех  $Z = 1 \div 92$ ;  $b = \psi(Z) \frac{w_{\min}}{2w(1-w)}$ ,  $w_{\min} = \frac{m_e c^2}{E_\gamma}$ . Энергия одной частицы  $E$  может изменяться от  $w_{\min} = \frac{m_e c^2}{E_\gamma}$  до  $w_{\max} = 1 - w_{\min}$ .

Полярные углы вылета рожденных позитрона и электрона разыгрываются следующим образом<sup>21</sup>:

$$\cos \theta_{\pm} = \frac{2\gamma - 1 + \beta_{\pm}}{(2\gamma - 1)\beta_{\pm} + 1}, \quad \gamma \in (0, 1), \quad \beta_{\pm} = \frac{\sqrt{\xi_{\pm}(\xi_{\pm} + 2)}}{\xi_{\pm} + 1}, \quad \xi_{\pm} = \frac{E_{\pm}}{m c^2}.$$

Распределение азимутального угла полагается равномерным в интервале  $(0, 2\pi)$ .

### 3 АЛГОРИТМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГЕНЕРАЦИИ ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Перепишем интегральное уравнение переноса (3) в виде:

$$Q = Q_1 + \int k(x', x) Q(x') dx' = Q_1 + KQ. \quad (12)$$

$K$  - интегральный оператор в уравнении (3).

Алгоритмы статистического моделирования переноса излучения можно построить на основе вероятностной интерпретации ядра интегрального оператора  $k(x', x)$ . То есть, рассматривая ядро  $k(x', x)$  как плотность вероятности перехода из точки  $x'$  в точку  $x$ , можно строить траектории частиц  $T = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$  и подсчитывать вклад этих траекторий в искомую величину<sup>10</sup>.

#### 3.1 Оценка функционалов от решения уравнения переноса методом Монте-Карло

Процесс переноса можно рассматривать как однородную цепь Маркова столкновений частиц с атомами вещества<sup>23</sup>, в результате которых может произойти поглощение или рассеяние с вероятностями  $\frac{\sigma_a}{\sigma}$  и  $\frac{\sigma_s}{\sigma}$  соответственно ( $\sigma, \sigma_a, \sigma_s$  - полное сечение, сечение поглощения и сечение рассеяния). Такое рассмотрение возможно<sup>24</sup>, поскольку условная плотность распределения  $p(x_{n-1}, x_n)$ , являющаяся переходной плотностью из точки  $x_{n-1}$  в точку  $x_n$ , не зависит от предыдущих значений  $x_0, x_1, \dots, x_{n-2}$ .

Траектория частицы  $T = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$  заканчивается в результате поглощения или вылета из рассматриваемой области пространства (объекта). Задачей теории переноса является вычисление измеряемых в эксперименте величин, которые являются функционалами вида:

$$J_h = (f, h) = \int f(x)h(x)dx. \quad (13)$$

Функция  $h(x)$  определяется типом измеряемой величины.

Для оценки функционалов (13) используется метод Монте-Карло. Рассматриваемые далее модификации метода Монте-Карло основаны на представлении решения уравнения (12) рядом Неймана<sup>10</sup>:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} K^n f_0. \quad (14)$$

В формуле (14)  $K^n$  - оператор с итерированным ядром из (12).

Рассмотрим перенос излучения в ограниченной среде (объекте). Пусть известны сечения процессов взаимодействия частиц этого излучения с веществом среды  $\sigma(x) = \sigma_a(x) + \sigma_s(x)$  и, соответственно, макроскопические сечения  $\mu_j = \rho\sigma_j$ ,  $j = a, s$ , а также распределения углов рассеяния  $\cos\theta = F_\theta(\gamma)$  и потерь энергии  $\Delta E = F_{\Delta E}(\gamma)$  ( $\gamma \in (0,1)$ ) в неупругих столкновениях (пункт 2.2).

Построение звена траектории частицы из точки фазового пространства  $x'$  в  $x$  выполняется следующим образом. Реализуется поглощение или рассеяние частицы в соответствии с вероятностями  $p_a = \frac{\mu_a}{\mu}$ ,  $p_s = \frac{\mu_s}{\mu}$ . Если происходит рассеяние, то:

1. Разыгрываются новое направление движения частицы  $\Omega$  по распределению  $F_\theta(\gamma)$ , а затем новая энергия  $E$  по распределению  $F_{\Delta E}(\gamma)$  (пункт 2.2);
2. Определяется длина свободного пробега  $l$  вдоль направления  $\Omega$  соответственно плотности распределения  $p_l = \mu(\mathbf{r}' + \Omega l) \exp(-\tau(\mathbf{r}'; \Omega l))$ ;
3. Вычисляется новая точка взаимодействия  $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \Omega l$ ;
4. Траектория заканчивается, если частица поглотилась или вылетела за пределы объекта.

Пусть  $n$  - номер звена траектории частицы. Обозначим номер построенной траектории через  $t$ . Тогда, если реализуется «прямое» моделирование, описанным выше способом, то оценку искомого функционала (14) можно проводить следующим образом

$$J_h = M \left[ \sum_n h(x_n) \right] \approx \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[ \sum_n h_t(x_n) \right], \quad T - \text{число построенных траекторий.}$$

Символ  $M$  используется здесь для обозначения математического ожидания, а  $h_t$  обозначает значение функции  $h$  на траектории с номером  $t$ .

### 3.2 Весовые модификации метода Монте-Карло

Оценка искомого функционала (измеряемой в эксперименте величины) с помощью прямых испытаний методом Монте-Карло может оказаться неэффективной, когда лишь незначительная часть траекторий несет информацию о решении рассматриваемой задачи. Может оказаться (например, для сильно поглощающих сред), что только малая доля частиц достигает детектора.

В таких ситуациях вместо прямого «аналогового» моделирования для увеличения информационной ценности траекторий частиц можно использовать иной способ построения траекторий с другой плотностью перехода  $q(x', x)$  и другой начальной плотностью  $\varphi(x)$ . Функции  $q(x', x)$  и  $\varphi(x)$  выбираются такими, что  $q(x', x) \neq 0$ ,  $\varphi(x) \neq 0$  там, где  $k(x', x) \neq 0$ ,  $f_0(x) \neq 0$ . При выполнении этих условий «несмещенности» искомой оценки<sup>10</sup> вводятся «веса» по формулам:

$$W_0(x_0) = \frac{f_0(x_0)}{\varphi(x_0)}, \quad W_n(x_n) = W_{n-1}(x_{n-1}) \frac{k(x_{n-1}, x_n)}{q(x_{n-1}, x_n)}.$$

Оценка математического ожидания  $J_h$  записывается в этом случае в виде

$$J_h = M \left[ \sum_n W_n h(x_n) \right]. \quad (15)$$

Рассмотрим, например, *веса, заменяющие розыгрыши поглощения*. В этой модификации метода Монте-Карло вместо того, чтобы путем розыгрыша случайной величины определять приведет ли данный акт взаимодействия к поглощению или к рассеянию частицы, полагают, что она всегда рассеивается с весом, равным вероятности «выживания» частицы  $p_s$ . Этот вес имеет смысл средней доли фотонов, которые не поглотились в данном акте взаимодействия.

Соответственно вес в (15) вычисляется по формуле

$$W_n(x_n) = W_{n-1}(x_{n-1}) p_s(x_n), \quad W_0 = 1.$$

В этом случае происходит формальное увеличение количества источников частиц по сравнению с проведением прямых испытаний, что приводит к уменьшению дисперсии результата.

Еще одна модификация метода Монте-Карло может быть построена с помощью *весов, заменяющие розыгрыши вылета частицы*. При моделировании переноса излучения в ограниченной среде частица может вылететь за границу среды и, тем самым, ее траектория заканчивается. Можно увеличить информационную ценность траекторий, если вместо розыгрыша случайного события – «невывлета» частицы – полагать, что она никогда не покидает рассматриваемую область, но ее «вес» при этом мультипликативно уменьшается на величину, равную вероятности «невывлета». При этом, очевидно, нужно изменить розыгрыш свободного пробега частицы, поскольку закон распределения пробега в рассматриваемой модификации изменяется.

Важная особенность рассмотренных весовых модификаций – уменьшение количества условных переходов в алгоритме, что является важным при разработке

программ для проведения математического моделирования с использованием гибридных вычислительных систем.

Существенное увеличение эффективности моделирования переноса излучения можно получить путем построения весовых модификаций метода Монте-Карло на этапе регистрации (детектирования) излучения, то есть при непосредственном вычислении искомых функционалов (13) от решения уравнения переноса (12).

Основной целью построения таких модификаций является повышение *информационной ценности траекторий*, т.е. увеличение относительного числа не только траекторий частиц, но и их звеньев, дающих вклад в искомую величину. Подходы к построению этих модификаций зависят от физического содержания искомой величины. Подробное рассмотрение этого вопроса выходит за рамки настоящей работы.

#### **4 МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕНЕРАЦИИ ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ГИБРИДНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКЕ**

Статистическая оценка математического ожидания искомого функционала, который соответствует измеряемой в эксперименте величине, с помощью моделирования случайных траекторий частиц методом Монте-Карло подразумевает последовательное независимое моделирование заданного числа случайных траекторий и определение аддитивного вклада каждой из них в общий результат. Вычислительная схема моделирования на каждом «звене» траектории одинакова, различает расчеты лишь состояние частицы в начале звена.

Такие алгоритмы, имеющие большое число независимых вычислительных ветвей (в данном случае траекторий частиц), легко параллелятся и масштабируются (больше фотонных историй — выше точность результатов), причем на любых архитектурах, в том числе на тех, в которых присутствуют лишь минимальные способы взаимодействия между параллельными ветвями. К таковым относится и технология CUDA<sup>4,5</sup>, реализуемая на аппаратных средствах, изначально предназначенных для совершения большого числа независимых однотипных операций.

Отметим вначале основные особенности использования графических процессоров в качестве вычислителей (применение технологий GPGPU).

Первое. В рамках рассматриваемой технологии отсутствуют средства контроля конкурентного доступа к данным. Имеющихся возможностей программирования точек синхронизации часто бывает недостаточно для того, чтобы обеспечить полноценный контроль доступа к разделяемым ресурсам. Следовательно, возникает необходимость декомпозиции данных. Простейший вариант такой декомпозиции — предоставление каждому вычислительному потоку своей области памяти для записи выходных данных.

Второе. Особенности архитектуры графического адаптера таковы, что условные переходы являются самым тяжелым видом операций. Более того, графический процессор в принципе не выполняет условные переходы. Всегда выполняются обе ветви алгоритма, результаты одной из которых затем аннулируются. Эта особенность приводит к необходимости создания максимально линейных алгоритмов или «выпрямления» уже существующих. Например, часто проще рассчитать какие-либо значения всех имеющихся элементов, чем проверять, нужен тот или иной элемент или нет.

Третье. Графические процессоры имеют несколько видов памяти. Каждый имеет свои преимущества и недостатки. Подходы к работе с разными видами памяти заметно отличаются. Эти отличия следует учитывать при разработке алгоритма решения задачи. Необходимо чётко следить за тем, чтобы использовать именно ту память и именно тем способом, который будет наиболее эффективен в данной части алгоритма.

Анализ аппаратной части (возможностей видеоадаптера) и средств программирования, предоставляемых технологией CUDA, позволил разработать эффективную схему построения рассматриваемого алгоритма для использования на гибридных суперкомпьютерах.

В этой схеме можно выделить следующие составные части вычислительного алгоритма и его программной реализации:

- Весовая модификация метода Монте-Карло, в которой моделирование случайной траектории частицы проводится «по столкновениям». То есть предполагается, что в каждой точке взаимодействия частица «выживает» с весом, равным вероятности не поглотиться (для фотона). Такой вариант алгоритма позволяет, во-первых, уменьшить дисперсию результатов и, во-вторых, минимизировать число условных операторов в программной реализации.
- «Многоядерный» вариант кода. В этой схеме каждый этап моделирования отдельного звена траектории частицы (трассировка объекта, моделирование физических процессов, сбор данных) рассчитывается отдельным вычислительным ядром графического процессора. Это дает возможность добиться большой степени однородности потоков вычислительного ядра и, тем самым, максимально упростить обработку данных в пределах одного ядра. С учетом того, что загрузка и выгрузка ядра практически не требует дополнительных ресурсов, такой подход оказывается оптимальным.
- Работа с памятью системы. Обменные операции являются наиболее тяжеловесными при программировании с применением технологии CUDA. Анализ алгоритма и программных, а также аппаратных средств, позволил оптимизировать использование различных видов памяти графического адаптера, что дало более чем десятикратное увеличение эффективности параллельной программы.

Можно выделить четыре более или менее однородные части расчетного алгоритма (рис. 7, слева), для каждой из которых строится соответствующее вычислительное ядро. В левом прямоугольнике на рис. 7 изображено содержание и порядок запуска ядер с центрального процессора на ГПУ.

1. *Генерация фотонов тормозного излучения* — в рамках данного ядра, в каждом из потоков на основе моделирования радиационного рассеяния электрона генерируется квант. Для него определяются положение, направление движения, начальная энергия и статистический вес.
2. *Обработка геометрии* — это ядро, в котором все вычислительные потоки, используя характеристики «текущего» кванта, а также параметры объекта, задаваемые в настройках, рассчитывают набор интервалов пересечения траектории с однородными компонентами объекта.
3. *«Симуляция» физики*. В данном ядре, проводится моделирование процессов взаимодействия квантов (тормозных фотонов) с веществом компонент объекта. В рамках этого моделирования рассчитываются вероятность взаимодействия,

условные вероятности различных типов взаимодействия. В результате моделирования меняются характеристики «текущего» кванта.

4. *Сбор результатов.* В силу особенностей различных видов памяти видеоадаптера, размещение результатов расчетов в процессе моделирования оказывается нетривиальной задачей. Предложен и реализован эффективный алгоритм «сбора» промежуточных результатов моделирования, позволяющий с одной стороны обеспечить бесконфликтный доступ к памяти и, с другой стороны, достичь максимальной скорости обменных операций.

В начале работы необходимо произвести загрузку настроек — на данном этапе загружается информация об объектах, источнике, вероятностные распределения, а также задаются параметры источника электронов. В конце работы ЦПУ собирает информацию с ГПУ и сохраняет результаты расчетов.

Предложенная многоядерная схема вычислений позволяет оптимизировать работу с памятью ГПУ, а также минимизировать количество условных переходов в расчетном алгоритме.

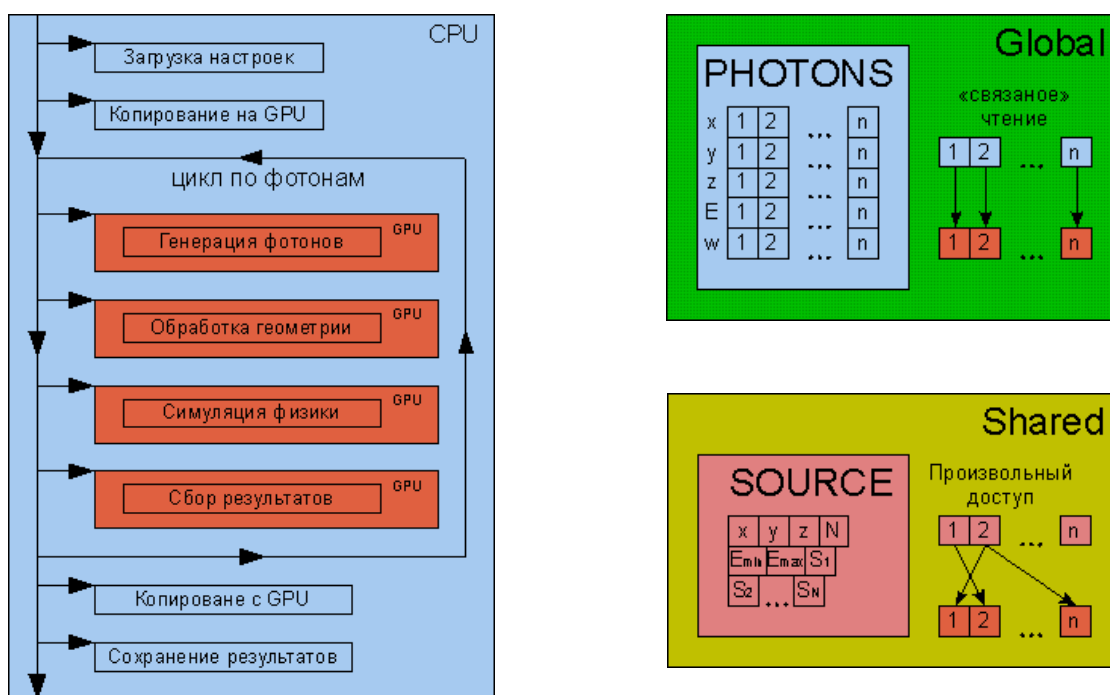


Рис. 7: Схема многоядерной реализации алгоритма

В правой части рис. 7 схематично изображена работа с памятью ГПУ. Анализ исходных данных, а также величин, рассчитываемых в процессе моделирования, позволил условно разбить их на две группы – группа «детерминированных» данных (то есть данных, запрос к которым детерминирован и происходит одновременно для всех потоков) и группа данных со случайным доступом (выбор случайной величины из массива значений и в разное время обращения).

К первой группе данных относятся, например, «фотонные» характеристики - энергия, координаты, статистический вес, направление движения и другие. Эти данные



размещаются в «глобальной» памяти графического ускорителя. При этом они организуются таким образом, чтобы запросы к ним были связанными<sup>4</sup>.

Многоядерная структура алгоритма в совокупности с организацией размещения данных позволяет загружать в быструю память одновременно только те данные, которые необходимы на данном этапе алгоритма (в данном ядре), что существенно добавляет свободы в выборе объемов табличных данных, задании числа компонент объекта и т.п. Это увеличивает потенциальную масштабируемость набора исходной информации.

Важно отметить, что «исходными» данными для моделирования переноса тормозного излучения служат результаты моделирования взаимодействия потока электронов с веществом. Это моделирование проводится на гибридных суперкомпьютерах по аналогичной схеме.

При моделировании каскада частиц (электронов и фотонов) на гибридных вычислительных средствах возникает необходимость реализации одних частей общего алгоритма на центральном процессоре, а других – на графическом. А именно, части алгоритма с высокой плотностью вычислений выполняются на GPU, а с относительно низкой – на CPU. Такое разделение является нетривиальной задачей и требует тщательного анализа плотности вычислений на всех этапах алгоритма решения задачи.

Анализ разработанного метода показал, что одновременное моделирование траекторий фотонов и электронов приводит к сильно неравномерной плотности вычислений на разных этапах расчетного алгоритма. Части алгоритма с низкой плотностью вычислений (моделирование взаимодействия фотона с веществом, рождение комптоновских и фотоэлектронов) чередуются с частями, имеющими высокую вычислительную плотность (трассировка объекта, моделирование траекторий электронов).

С учетом вышесказанного, был разработан алгоритм, адаптированный для моделирования каскадных процессов на графических процессорах, который является эффективным вычислительным методом моделирования переноса частиц на гибридных суперкомпьютерах. В этом алгоритме расчеты с низкой плотностью проводятся на центральном процессоре, а с высокой – на графическом.

## **5 МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ПАРАМЕТРОВ ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ**

С помощью разработанного программного комплекса были проведены вычислительные эксперименты на гибридном вычислительном комплексе К-100 (<http://www.kiam.ru/MVS/resources/k100.html>). Результаты выполненных расчетов сравнивались с результатами экспериментов, проведенных на установке ЛИУ-10 ([http://www.niipriborov.ru/model\\_ustanov.html](http://www.niipriborov.ru/model_ustanov.html)).

Общая схема экспериментов изображена на рис. 8. В опытах по исследованию параметров электронного излучения использовался пучок электронов ускорителя в форме полого цилиндра, падающий на мишень. Измерялась доза излучения в детекторах, отмеченных крестиком на рис. 8. Для исследования параметров тормозного излучения использовался сфокусированный магнитным полем пучок электронов в виде полого усеченного конуса, направленный вершиной на мишень. Измерялась доза тормозного излучения в детекторах, отмеченных кружками на рис. 8.

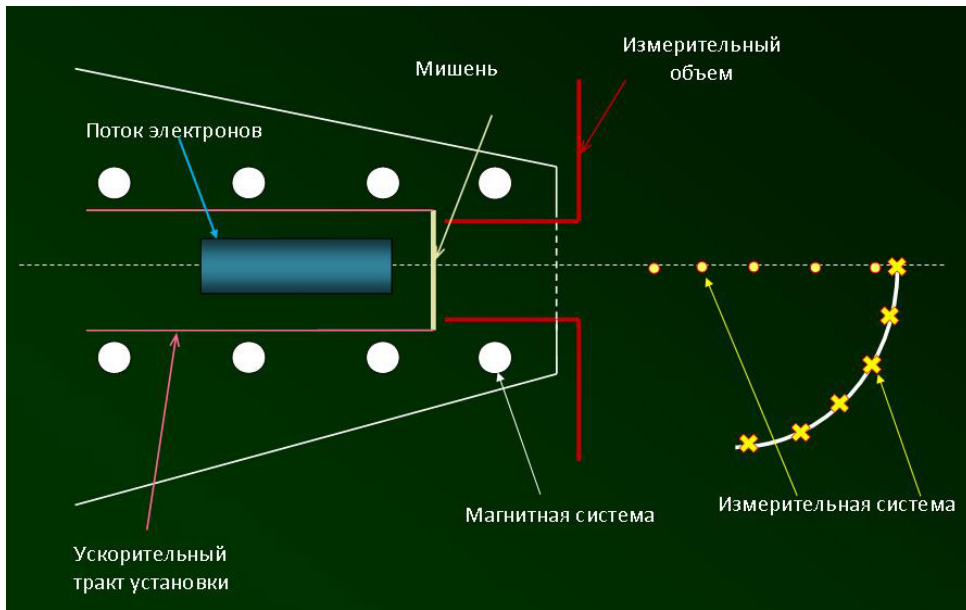


Рис. 8: Схема эксперимента

На рис. 9 показаны результаты сравнения измерений и расчетов дозы электронного излучения. По оси абсцисс отложены координаты детекторов в относительных единицах, по оси ординат – доза в относительных единицах. Черная кривая – эксперимент, красная – результаты расчета.

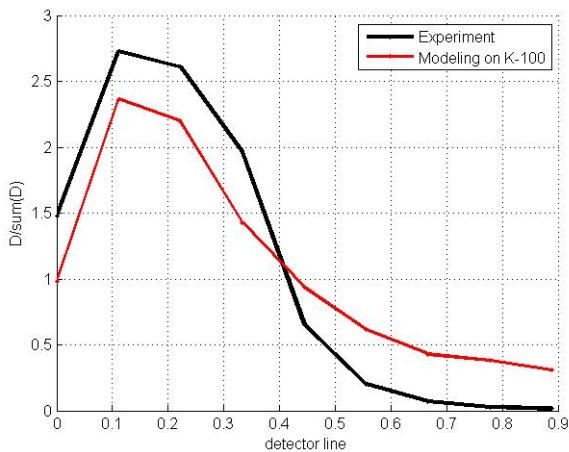


Рис. 9: Доза электронного излучения

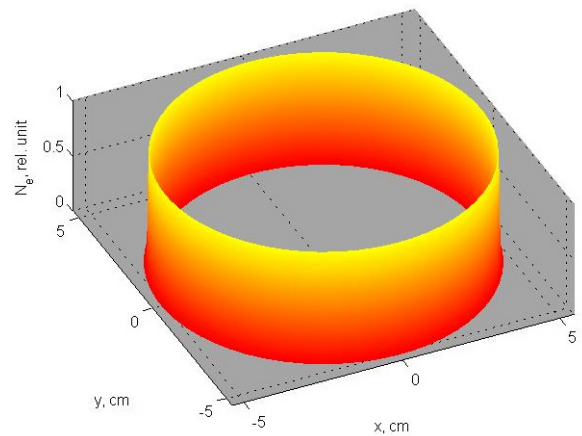


Рис. 10: Интенсивность электронного потока

На рис. 10 изображено рассчитанное объемное распределение плотности электронов, вылетающих с внешней стороны мишени внутрь измерительного объема.

Расхождения результатов обусловлены, главным образом, неопределенностью значений параметров электронного пучка ускорителя.

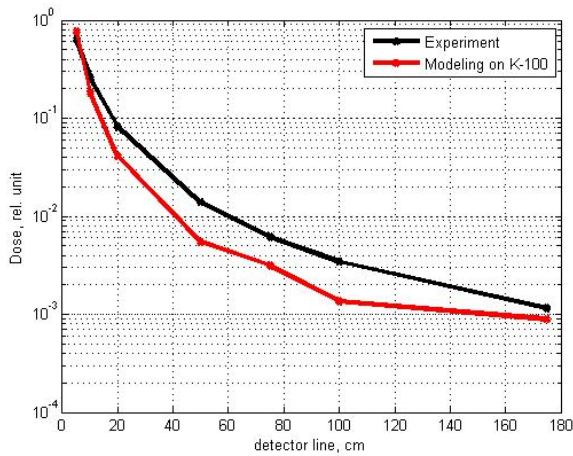


Рис. 11: Доза тормозного излучения.

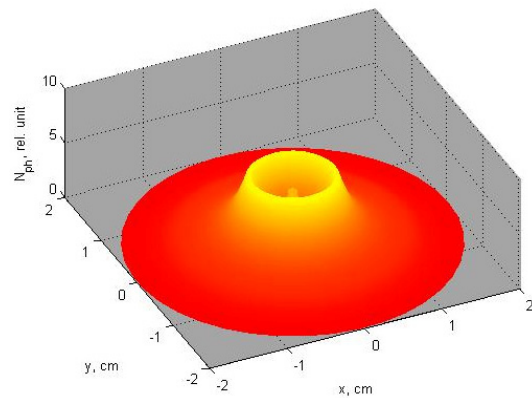


Рис. 12: Интенсивность тормозных квантов

На рис. 10 показаны результаты сравнения измерений и расчетов дозы тормозного излучения. По оси абсцисс отложены координаты детекторов в см, начало координат в плоскости мишени; по оси ординат – доза в относительных единицах. На рис. 11 изображена рассчитанная интенсивность потока квантов тормозного излучения. Черная кривая – эксперимент, красная – результаты расчета.

На рис. 12 изображено рассчитанное объемное распределение плотности фотонов, вылетающих с внешней стороны мишени внутрь измерительного объема.

Результаты сравнения показали удовлетворительное согласие экспериментальных измерений и расчетных данных.

## 6 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведение экспериментальных работ в области исследования характеристик тормозного излучения, генерируемого электронным пучком ускорителя, является чрезвычайно затратным, а зачастую невозможным. В тоже время исследование параметров указанного излучения актуально во многих практических приложениях. Математическое моделирование процессов генерации тормозного фотонного излучения и его взаимодействия с веществом является эффективной альтернативой экспериментальным исследованиям.

Детальный анализ параметров генерируемого излучения и процесса его переноса в веществе возможен только с использованием современной высокопроизводительной вычислительной техники, в том числе с гетерогенной (гибридной) архитектурой. Для применения гибридных суперкомпьютеров необходима разработка не только соответствующих программных кодов, но и построение фундаментальных физических и математических моделей, создание алгоритмов, предназначенных для гибридного распараллеливания.

В представленной статье рассмотрены подходы к решению указанных вопросов. Описана модель взаимодействия фотонного излучения и электронных потоков с веществом. Предложены и реализованы весовые модификации метода Монте-Карло для эффективного вычисления функционалов от решения уравнения переноса, соответствующих измеряемым в опытах величинам. Проведен анализ способов гибридного распараллеливания вычислений, который позволил разработать алгоритм,

основанный на выравнивании вычислительной загрузки центральных и графических процессоров, с учетом основных особенностей технологии NVIDIA© CUDA.

Приведены примеры моделирования экспериментов по исследованию процессов генерации тормозного излучения пучком электронов ускорителя.

## REFERENCES

- [1] M. Zhukovskiy, S. Podoliako, and R. Uskov. *Model of individual collisions for description of electron transport in matter*. [Mathematical Models and Computer Simulations](#) **4**, № 1, 101-109, DOI: 10.1134/S2070048212010140, (2011)
- [2] M. Zhukovskiy, G.-R. Jaenisch, A. Deresch, R. Uskov. *Monte Carlo modeling of electron transport using CUDA technology*. Beitrag zu einem Tagungsband: 18th WCNDT - World conference on nondestructive testing (Proceedings), Paper 89, 1-8 ISBN 978-0-620-52872-6 (2012).
- [3] M. Zhukovskiy, G.-R. Jaenisch, A. Deresch, S. Podoliako. *Mathematical modeling of radiography experiments*. Beitrag zu einem Tagungsband: 18th WCNDT - World conference on nondestructive testing (Proceedings) Paper 305, 1-7 ISBN 978-0-620-52872-6 (2012).
- [4] M. E. Zhukovskiy, R. V. Uskov. *Modeling of gamma-rays interaction with matter by use of hybrid computing systems*. Mathematical modeling, **23**, № 7, 20-32, (2011).
- [5] M. E. Zhukovskiy, S. V. Podolyako and R. V. Uskov. *Modeling of electron transport in matter on hybrid computing systems*. Numerical methods and programming, **12**, №1, 152-159, (2011).
- [6] Goudsmit S. and J.L. Saunderson (a), "Multiple scattering of electrons", Phys. Rev., **57**, 24-29, (1940)
- [7] L. D. Landau. *On ionization energy losses of fast electrons*. Work Collection. **1**. M.: «Nauka», 1969.
- [8] S. O. Vyazmin, A. G. Zhogov, M. E. Zhukovskiy and others. Modeling of experiment for radiative electron emission research. Mathematical modeling, **24**, № 6, 45-56, (2012).
- [9] A. M. Kolchuzhkin, V V. Uchaikin. *Introduction in the theory of particle transmission through matter*. M., Atomizdat, (1978).
- [10] I. M. Sobol. *The Monte Carlo numerical methods*. Численные М., «Nauka», (1973).
- [11] Stephen M. Seltzer, "An Overview of ETRAN Monte Carlo Methods," in *Monte Carlo Transport of Electrons and Photons*, edited by Theodore M. Jenkins, Walter R. Nelson, and Alessandro Rindi, (Plenum Press, New York, 1988) 153.
- [12] Halbleib J.A., R.P. Kensek, T.A. Mehlhom, G.D. Valdez, S.M. Seltzer and M.J. Berger, "ITS version 3.0: the integrated TIGER series of coupled electron/photon Monte Carlo transport codes", Report SAND91-1634 (Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM), (1992).
- [13] Nelson W.R., H. Hirayama and D.W.O. Rogers, "The EGS4 Code System", Report SLAC-265 (Stanford Linear Accelerator Center, Stanford, CA), (1985).
- [14] Physics Reference Manual. Version: geant4 9.2 (19 December, 2008).
- [15] O. Blunck and S. Leisegang, "Zum Energieverlust schneller Elektronen in duennen Schichten," Z. Physik **128**, 500, (1950)
- [16] Stephen M. Seltzer, "Cross Sections for Bremsstrahlung Production and Electron Impact Ionization." in *Monte Carlo Transport of Electrons and Photons*, edited by Theodore M. Jenkins, Walter R. Nelson, and Alessandro Rindi, **81**, Plenum Press, New York, (1988).
- [17] Davies H., H.A. Bethe, "Theory of bremsstrahlung and pair production. II. Integral cross section for pair production" Phys. Rev. **93**, 788-795, (1954).
- [18] Tsai Y.S., "Pair production and bremsstrahlung of charged leptons", Rev. Mod. Phys. **46**, 815-851, (1974).
- [19] Born M. Atomic Physics (Blackie and Son, London), (1969).
- [20] Cullen D.E., Hubbell J.H. and Kissel L.D., EPDL97: the Evaluated Photon Data Library, '97

- Version, UCRL-50400, 6, Rev. 5, Lawrence Livermore National Laboratory (1997).
- [21] PENELOPE – *A Code System for Monte Carlo Simulation of Electron and Photon Transport*. Workshop Proceedings Issy-les-Moulineaux, France 5-7 (November 2001).
- [22] Heitler W. *The quantum theory of radiation*. Oxford University Press. (1957).
- [23] G. A. Mikhailov. Weighted algorithms of statistical modeling. Novosibirsk: IVM and M.G., (2003).
- [24] B. A. Kargin, G. A. Mikhailov. Method and Monte Carlo algorithms for radiation transport problems. In: *Encyclopedia of low-temperature plasma*. Edited by U. P. Popov., **VII-1**. Mathematical modeling in low-temperature plasma. M.: Yanus-K, 540-552, (2008).

Поступила в редакцию 3 ноября 2013 года.