MATHEMATICA MONTISNIGRI
Vol XXVI (2013) 19–28

ДОПОЛНЕНИЕ К МНОГОМЕРНОЙ ТЕОРЕМЕ ХИНЧИНА–ОСТРОВСКОГО И ПРИЛОЖЕНИЯ

В. И. ГАВРИЛОВ, А. В. СУББОТИН

Аннотация. В статье [3] содержится многомерный вариант хорошо известной в одномерной теории граничных свойств аналитических функций теоремы А. Я. Хинчина–А. Островского в усиленной форме, предложенной Г. Ц. Тумаркиным (см. [1, гл. II §7]). Г. Ц. Тумаркину [2] принадлежит также другое усиление одномерной теоремы Хинчина–Островского, многомерный аналог которого составляет основной результат настоящей статьи (теорема 1). Эта теорема используется для уточнения результатов из [3] (теорема 2) и прилагается к доказательству полной характеристики компактных множеств в некотором пространстве голоморфных функций нескольких комплексных переменных (теорема 3).

1. Введение

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, \dots z_n) \mid z_k \in \mathbb{C}, 1 \leqslant k \leqslant n\}$— обычное n-мерное комплексное координатное пространство. Символом G обозначим шар $B_n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 < 1\}$ или поликруг $U^n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_k| < 1, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ в $\mathbb{C}^n$, а символом Γ— границу Шилова–Бергмана области G; в случае $G = B_n$ имеем $\Gamma = S_n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 = 1\}$, и в случае $G = U^n$ имеем $\Gamma = T^n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_k| = 1, 1 \leqslant k \leqslant n\}$. На Γ существует естественная инвариантная вероятностная мера, обозначаемая обычно $\sigma(d\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, совпадающая с нормированной площадью на сфере S_n в случае $\Gamma = S_n$ и представляющая собой прямое произведение нормированных мер Лебега на единичных окружностях, образующих в декартовом произведении тор T^n, в случае $\Gamma = T^n$. Символ $|z|$ для $z \in \mathbb{C}^n$ обозначает евклидову норму $|z| = \sqrt{|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2}$, если $G = B_n$, и поликруговую норму $|z| = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |z_k|$, если $G = U^n$. Для произвольных $\zeta \in \Gamma$ и $\alpha > 1$ множества $D_\alpha(\zeta) = \{z \in B_n \mid |1 - \langle z, \zeta\rangle| < \alpha(1 - |z|)\}$, $\alpha > 1$, где $\langle z, w\rangle$ обозначает обычное эрмитово скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$, называют допустимыми областями по Кораньи в B_n. В случае поликруга U^n для $\zeta = (\zeta_1, \dots \zeta_n) \in T^n$ и $\alpha > 1$ под допустимыми областями понимают множества $D_\alpha(\zeta) = \{z \in D_\alpha(\zeta_1) \times \ldots \times D_\alpha(\zeta_n) \mid 1/\alpha < (1 - |z_k|)/(1 - |z_l|) < \alpha, 1 \leqslant k, l \leqslant n\}$. В одномерном случае, когда $n = 1$, имеем $G = B_n = U^n = U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $\Gamma = S_n = T^n = T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $\sigma(d\zeta) = \dfrac{|d\zeta|}{2\pi}$, $\zeta \in T$.

Функция f, голоморфная в области G и удовлетворяющая условию

$$\sup_{0 \leqslant r < 1} \int\limits_{\Gamma} \ln_+ |f(r\zeta)|\, \sigma(d\zeta) < +\infty,$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 32A40, 46E25.
Ключевые слова. Голоморфная функция нескольких комплексных переменных, инвариантное ядро Пуассона, граничные значения, допустимая максимальная функция, равномерная сходимость.

в котором $\ln_+ a$ при $a > 0$ обозначает $\max(\ln a, 0)$ и $\ln_+ 0 = 0$, называется функцией ограниченного вида в области G; множество всех функций ограниченного вида обозначается $N(G)$ и называется классом Островского–Неванлинны в области G. Известно (см. [4] и [5]), что каждая функция $f(z)$ ограниченного вида обладает почти во всех точках $\zeta \in \Gamma$ конечными пределами $f^*(\zeta)$, когда z стремится к ζ, оставаясь в областях $D_\alpha(\zeta)$, $\alpha > 1$, которые называют допустимыми граничными значениями функции f в точках $\zeta \in \Gamma$ и которые определяют на Γ граничную функцию f^*.

В работе [3] была установлена следующая теорема, являющаяся многомерным вариантом известной теоремы А. Я. Хинчина–А. Островского.

Теорема A. Пусть последовательность (f_k) голоморфных функций в области G удовлетворяет условию

$$\int\limits_{\Gamma} \ln_+ |f_k(r\zeta)|\, \sigma(d\zeta) \leqslant C < +\infty, \quad k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant r < 1, \tag{1}$$

с некоторой постоянной $C \geqslant 0$, и, кроме того, последовательность $\left(f_k^*\right)$ граничных функций для (f_k) сходится по мере на некотором множестве E положительной меры на Γ.

Тогда последовательность (f_k) сходится равномерно на любом компакте из G к некоторой функции f класса $N(G)$, причем граничные функции (f_k^*) сходятся по мере на множестве E к граничной функции f^* для предельной функции f.

Эта теорема допускает следующее дополнение.

Теорема 1. Пусть (f_k)— последовательность функций класса $N(G)$ удовлетворяет условиям теоремы A.

Тогда в (f_k) существует подпоследовательность (f_{k_s}), обладающая свойством: для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\alpha > 1$ в множестве E найдется (замкнутое) подмножество $E_{\varepsilon,\alpha}$, мера которого отличается от меры E меньше, чем на ε, что (f_{k_s}) сходится равномерно в области $G_{\varepsilon,\alpha}$, образованной объединением допустимых областей $D_\alpha(\zeta)$ по всем $\zeta \in E_{\varepsilon,\alpha}$.

Замечание. В одномерном случае ($n = 1$) утверждение теоремы 1 установлено Г. Ц. Тумаркиным в [2].

2. Доказательство теоремы 1

В доказательстве теоремы 1 используем две леммы; первая содержится в [3], вторая служит многомерным аналогом соответствующей леммы из [2].

Лемма 1 ([3]). Пусть последовательность (f_k) удовлетворяет условиям теоремы 1 и для натурального $N > 1$ ограниченная голоморфная в G функция $F_E^N(z)$ обладает свойствами:

а) $|(F_E^N)^*(\zeta)| = N$ почти всюду на некоторой окрестности V множества E;
б) $|(F_E^N)^*(\zeta)| = 1$ почти всюду на дополнении V к Γ; и
в) $\sigma(V \setminus E) < 1/(3 \ln N)$.

Тогда существует постоянная C_1, зависящая только от постоянной C из условия (1), и такое натуральное $K(N)$, что оценка

$$\int\limits_{\Gamma} \ln_+ \left| F_E^N(r\zeta)[f_k(r\zeta) - f_l(r\zeta)] \right| \sigma(d\zeta) \leqslant C_1 \tag{2}$$

справедлива для всех $k, l \geqslant K(N)$ и всех $0 \leqslant r < 1$.

Лемма 2. Для любых $0 < q < 1$ и $\alpha > 1$ существует конечная постоянная $A_{q,\alpha}$, что для любой голоморфной функции f в области G выполнена оценка

$$\int\limits_{\Gamma} \ln_+^q M_\alpha f(\zeta)\,\sigma(d\zeta) \leqslant A_{q,\alpha}\left[\sup_{0\leqslant r<1}\int\limits_{\Gamma} \ln_+|f(r\zeta)|\,\sigma(d\zeta)\right]^q, \tag{3}$$

где $M_\alpha f(\zeta)$ обозначает допустимую максимальную функцию для функции f в точке $\zeta \in \Gamma$, определяемую равенством

$$M_\alpha f(\zeta) = \sup_{z\in D_\alpha(\zeta)} |f(z)|, \quad \zeta \in \Gamma. \tag{4}$$

В свою очередь доказательство леммы 2 использует следующее утверждение.

Лемма 3. Если оператор $\mathfrak{T}$ действует из пространства конечных счетноаддитивных мер на некотором измеримом пространстве $(X, \mathfrak{B})$ в пространство неотрицательных измеримых функций на том же пространстве с некоторой конечной неотрицательной счетноаддитивной мерой σ и $\mathfrak{T}$ имеет оценку слабого типа $(1,1)$, то для любого $0 < q < 1$ существует конечная постоянная A_q, зависящая только от $0 < q < 1$, полной вариации меры σ и от постоянной из слабой оценки, что неравенство

$$\int\limits_X [\mathfrak{T}\mu(x)]^q\,\sigma(dx) \leqslant A_q\|\mu\|^q \tag{5}$$

справедливо для любой конечной счетноаддитивной меры μ, где $\|\mu\|$ обозначает полную вариацию меры μ.

Доказательство леммы 3. Оценка слабого типа $(1,1)$ означает существование конечной постоянной $A \geqslant 0$, с которой неравенство $\sigma\{\mathfrak{T}\mu(x) > t\} \leqslant A\|\mu\|/t$, $t > 0$, выполнено для любой конечной счетноаддитивной меры μ на X. Воспользуемся тем, что для любой измеримой на X функции f справедливо

$$\int\limits_X |f(x)|\,\sigma(dx) = \int\limits_0^\infty \sigma\{|f(x)| > t\}\,dt.$$

Тогда

$$\int\limits_X [\mathfrak{T}\mu(x)]^q\,\sigma(dx) = \int\limits_0^\infty \sigma\{[\mathfrak{T}\mu(x)]^q > t\}\,dt = \int\limits_0^\infty \sigma\{\mathfrak{T}\mu(x) > t^{1/q}\}\,dt.$$

Разобьем последний интеграл на две части: от 0 до некоторого $a > 0$ и от a до $+\infty$. На первом участке имеем тривиальную оценку $a\sigma X$, а на втором воспользуемся оценкой оператора $\mathfrak{T}$ слабого типа $(1,1)$:

$$\int\limits_0^\infty \sigma\{\mathfrak{T}\mu(x) > t^{1/q}\}\,dt \leqslant a\sigma X + A\|\mu\|\int\limits_a^\infty \frac{dt}{t^{1/q}} = a\sigma X + \frac{A\|\mu\|a^{1-1/q}}{1/q-1},$$

где используется $0 < q < 1$, так что последний интеграл сходится. Приравнивая последние два слагаемых друг другу, получаем $a = \Big(\dfrac{A\|\mu\|}{(1/q-1)\sigma X}\Big)^q$, и, следовательно, оценка (5) имеет место с постоянной $A_q = \dfrac{2A^q}{(1/q-1)^q\sigma^{q-1}X}$ (не являющейся, разумеется, наилучшей возможной). $\square$

Доказательство леммы 2. В случае, когда правая часть (3) бесконечна, утверждение леммы очевидно. Предположим, что правая часть неравенства (3) конечна. В этом случае, как показано в [4, теорема 5.6.4] и [6, теорема 3.3.5], функция $\ln_+|f(z)|$ имеет соответственно $\mathscr{M}$-гармоническую (для шара) или n-гармоническую (для поликруга) мажоранту в области G, и наименьшая такая мажоранта представляется в виде интеграла Пуассона

$$u_{\min}(z) = \int\limits_{\Gamma} P(z,\zeta)\,\mu(d\zeta)$$

по некоторой конечной неотрицательной борелевской мере μ на Γ, где $P(z,\zeta)$, $z \in G$, $\zeta \in \Gamma$— инвариантное ядро Пуассона в области G и полная вариация меры μ совпадает с наименьшей верхней гранью в правой части (3). В случае поликруга уже сейчас к неравенству $\ln_+|f(z)| \leqslant u_{\min}(z)$, $z \in G$, можно применить максимальный оператор (4) и воспользоваться теоремой 4 из [7], что завершит доказательство леммы. В случае шара применим в неравенстве $\ln_+|f(z)| \leqslant u_{\min}(z)$, $z \in G$, к левой и правой частям допустимый максимальный оператор (4) и оценим допустимую максимальную функцию интеграла Пуассона, которым представлена функция $u_{\min}$, через граничную максимальную функцию меры μ (см. [4, теорема 5.4.5]). Получим

$$\ln_+ M_\alpha f(\zeta) \leqslant K_\alpha M_\Gamma \mu(\zeta),\ \ \zeta \in \Gamma,$$

где M_Γ обозначает граничный максимальный оператор, действующий на пространстве конечных борелевских мер на S_n, и K_α— конечная постоянная, зависящая только от α и n. Так как граничный максимальный оператор обладает оценкой слабого типа $(1,1)$ (см. [4, теорема 5.2.4]), то возводя полученное неравенство в степень q, $0 < q < 1$, и используя доказанное выше неравенство (5), находим

$$\int\limits_{\Gamma} \ln_+^q M_\alpha f(\zeta)\,\sigma(d\zeta) \leqslant K_\alpha^q \int\limits_{\Gamma} M_\Gamma^q \mu(\zeta)\sigma(d\zeta) \leqslant K_\alpha^q A_q \|\mu\|^q.$$

Учитывая связь между $\|\mu\|$ и точной верхней гранью в (3), получаем отсюда искомое неравенство (3) с постоянной $A_{q,\alpha} = K_\alpha^q A_q$. □

Доказательство теоремы 1. Для любого числа $N > 1$ рассмотрим ограниченную голоморфную функцию F_E^N в области G, удовлетворяющую условиям леммы 1 (такая функция существует согласно [4, теорема 19.1.14] и [6, теорема 3.5.3]). По лемме 1 существует конечная постоянная C_1, зависящая только от постоянной C из условия (1) и не зависящая от $N > 1$, что выполнено неравенство (2). Из него, как следует из леммы 2, вытекает

$$\int\limits_{\Gamma} \ln_+^q M_\alpha[F_E^N(f_k - f_l)](\zeta)\,\sigma(d\zeta) \leqslant A_{q,\alpha} C_1^q, \quad k,l \geqslant K(N), \tag{6}$$

где $A_{q,\alpha}$— конечная постоянная, не зависящая от $N > 1$, и M_α— допустимый максимальный оператор, определяемый равенством (4).

Так как $|F_E^N(z)| \to N$ при $D_\alpha(\zeta) \ni z \to \zeta$ для почти всех $\zeta \in E$, то по теореме Д. Ф. Егорова существует замкнутое множество $E_N \subset E$, мера которого отличается от меры E меньше, чем на $1/N$, и некоторое r_0, $0 \leqslant r_0 < 1$, что $|F_E^N(z)| \geqslant N/2$, когда $z \in D_\alpha(\zeta)$, $|z| > r_0$, $\zeta \in E_N$. Из оценки (6) поэтому следует, что

$$\int\limits_{E_N} \ln_+^q \big[\frac{N}{2} M_\alpha^{(r_0)}(f_k - f_l)(\zeta)\big]\,\sigma(d\zeta) \leqslant \tag{7}$$

$$\leqslant \int\limits_{E_N} \ln_+^q M_\alpha[F_E^N(f_k - f_l)](\zeta)\,\sigma(d\zeta) \leqslant A_{q,\alpha} C_1^q, \quad k,l \geqslant K(N),$$

где символом $M_\alpha^{(r_0)}$ обозначен «урезанный» максимальный оператор

$$(M_\alpha^{(r_0)}g)(\zeta)=\sup_{\substack{z\in D_\alpha(\zeta)\\ |z|>r_0}}|g(z)|,\quad \zeta\in\Gamma,\quad g\in\mathbb{C}^G.$$

Так как последовательность (f_k) сходится равномерно на множестве $|z|\leqslant r_0$ (теорема 1 из [3], т. е., теорема A настоящей статьи), то существует номер $K_1(N)\in\mathbb{N}$, начиная с которого для всех k,l выполнено $\frac{N}{2}|f_k(z)-f_l(z)|<1$ при $|z|\leqslant r_0$, откуда $\ln_+\big[\frac{N}{2}M_\alpha^{(r_0)}(f_k-f_l)(\zeta)\big]=\ln_+\big[\frac{N}{2}M_\alpha(f_k-f_l)(\zeta)\big]$ для всех $\zeta\in\Gamma$. Следовательно, неравенство (7) останется справедливым при замене $M_\alpha^{(r_0)}$ на M_α, начиная, возможно, с некоторого большего, чем $K(N)$, номера $K_2(N)$.

Итак, для любого $N>1$ существует такой номер $K_2(N)\in\mathbb{N}$ и такое замкнутое множество $E_N\subset E$, $\sigma(E\setminus E_N)<\frac{1}{N}$, что

$$\int\limits_{E_N}\ln_+^q\big[\frac{N}{2}M_\alpha(f_k-f_l)(\zeta)\big]\,\sigma(d\zeta)\leqslant A_{q,\alpha}C_1^q\equiv C_2,\quad k,l\geqslant K_2(N),$$

с конечной постоянной C_2, не зависящей от N. Стандартными теоретико-функциональными рассуждениями отсюда выводится существование искомой подпоследовательности.

Действительно, пусть N пробегает последовательные двойные степени двойки $N_s=2^{2^s}$, $s=1,2,\ldots$. Согласно доказанному выше, существует последовательность $K_2(N_s)\in\mathbb{N}$, которую можно считать возрастающей, и последовательность замкнутых множеств $E_{N_s}\subset E$, $\sigma(E\setminus E_{N_s})<\frac{1}{N_s}$, для которых

$$\int\limits_{E_{N_s}}\ln_+^q\big[\frac{N_s}{2}M_\alpha(f_k-f_l)(\zeta)\big]\,\sigma(d\zeta)\leqslant C_2,\quad k,l\geqslant K_2(N_s).\tag{8}$$

Обозначим $K_2(N_s)=k_s$ и докажем, что подпоследовательность (f_{k_s})— искомая.

Так как $\sigma(E\setminus\bigcap\limits_{s=s_0}^{\infty}E_{N_s})\leqslant\sum\limits_{s=s_0}^{\infty}\sigma(E\setminus E_{N_s})<\sum\limits_{s=s_0}^{\infty}\frac{1}{2^{2^s}}$ и ряд $\sum\limits_{s=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2^s}}$ сходится, то существует номер s_0, для которого мера множества $\mathscr{E}_{s_0}=\bigcap\limits_{s\geqslant s_0}E_{N_s}$ отличается от меры всего множества E меньше, чем на $\varepsilon/2$. Далее, согласно неравенству Чебышева и оценке (8), имеем

$$\sigma\big\{\frac{N_s}{2}M_\alpha(f_{k_{s+1}}-f_{k_s})>\sqrt{N_s}\big\}\leqslant\frac{C_2}{\ln_+^q\sqrt{N_s}}\quad\text{или}$$

$$\sigma\big\{M_\alpha(f_{k_{s+1}}-f_{k_s})>\frac{2}{2^{2^{s-1}}}\big\}\leqslant\frac{2^qC_2}{\ln^q 2\,2^{qs}}\quad\text{при}\quad s\in\mathbb{N},\ s\geqslant s_0,\tag{9}$$

где фигурные скобки обозначают множество тех точек множества $\mathscr{E}_{s_0}$, для которых выполнено написанное в скобках неравенство. Кроме того, в силу неравенства треугольника справедливо теоретико-множественное включение

$$\big\{M_\alpha(f_{k_t}-f_{k_s})>\sum_{l=s}^{t-1}\frac{2}{2^{2^{l-1}}}\big\}\subseteq\bigcup_{l=s}^{t-1}\big\{M_\alpha(f_{k_{l+1}}-f_{k_l})>\frac{2}{2^{2^{l-1}}}\big\}$$

при $t>s$, откуда следует

$$\bigcup_{t>s}\big\{M_\alpha(f_{k_t}-f_{k_s})>\sum_{l=s}^{t-1}\frac{2}{2^{2^{l-1}}}\big\}\subseteq\bigcup_{l=s}^{\infty}\big\{M_\alpha(f_{k_{l+1}}-f_{k_l})>\frac{2}{2^{2^{l-1}}}\big\}.\tag{10}$$

На основании (9) и (10), для любого $\nu_0 \in \mathbb{N}$, $\nu_0 \geqslant s_0$, получаем

$$\sigma \bigcup_{s\geqslant\nu_0} \bigcup_{t>s} \Big\{ M_\alpha(f_{k_t} - f_{k_s}) > \sum_{l=s}^{t-1} \frac{2}{2^{2^{l-1}}} \Big\} \leqslant \sum_{s=\nu_0}^{\infty} \sum_{l=s}^{\infty} \sigma \Big\{ M_\alpha(f_{k_{l+1}} - f_{k_l}) > \frac{2}{2^{2^{l-1}}} \Big\}$$
$$\leqslant \sum_{s=\nu_0}^{\infty} \sum_{l=s}^{\infty} \frac{2^q C_2}{\ln^q 2\, 2^{ql}} = \frac{2^q C_2}{\ln^q 2} \sum_{l=\nu_0}^{\infty} \frac{l-\nu_0+1}{2^{ql}} \leqslant \frac{2^q C_2}{\ln^q 2} \sum_{l=\nu_0}^{\infty} \frac{l}{2^{ql}}. \tag{11}$$

В силу сходимости ряда $\sum\limits_{l=1}^{\infty} \dfrac{l}{2^{ql}}$ можно найти номер $\nu_0 \in \mathbb{N}$, $\nu_0 \geqslant s_0$, для которого последняя сумма в (11) меньше $\dfrac{\varepsilon}{2}$. Обозначая дополнение к множеству в левой части (11) через $\mathscr{F}_{\nu_0}$, видим, что мера множества $E_{\varepsilon,\alpha} = \mathscr{F}_{\nu_0}$ отличается от меры множества E меньше, чем на $\dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, причем множества $\mathscr{E}_{s_0}$ и $\mathscr{F}_{\nu_0}$, замкнуты, как пересечения замкнутых множеств и в силу полунепрерывности снизу функций $M_\alpha(f_{k_t} - f_{k_s})$, $t, s \in \mathbb{N}$. При этом на множестве $E_{\varepsilon,\alpha}$ выполнены следующие два свойства: 1) все точки $E_{\varepsilon,\alpha}$ лежат в E_{N_s} при всех $s \geqslant s_0$ (так что выполнены все неравенства (9)); и 2) для всех точек $E_{\varepsilon,\alpha}$ и любых $t > s \geqslant \nu_0$ имеет место неравенство $M_\alpha(f_{k_t} - f_{k_s}) \leqslant \sum\limits_{l=s}^{t-1} \dfrac{2}{2^{2^{l-1}}}$. Выбирая для любого $\delta > 0$ такое $\nu_1 = \nu_1(\delta) \in \mathbb{N}$, $\nu_1 \geqslant \nu_0$, что $\sum\limits_{l=s}^{t-1} \dfrac{2}{2^{2^{l-1}}} < \delta$ при $t > s \geqslant \nu_1$, получаем справедливые для всех $\zeta \in E_{\varepsilon,\alpha}$ и всех $t > s \geqslant \nu_1$ неравенства $M_\alpha(f_{k_t} - f_{k_s}) < \delta$, которые означают равномерную сходимость на $E_{\varepsilon,\alpha}$ функций $M_\alpha(f_{k_t} - f_{k_s})$ к нулю при $t, s \to \infty$.

Приведенное рассуждение годится для доказательства равномерной сходимости некоторой подпоследовательности в областях вида $\bigcup\limits_{\zeta \in E_{\varepsilon,\alpha}} D_\alpha(\zeta)$ с фиксированным $\alpha > 1$ и множествами $E_{\varepsilon,\alpha}$, $\sigma(E \setminus E_{\varepsilon,\alpha}) < \varepsilon$, для любого $\varepsilon > 0$; но нетрудно видеть, применяя диагональный процесс Кантора, что такую подпоследовательность можно выбрать одну и ту же одновременно для всех $\alpha > 1$. □

3. Количественное уточнение теоремы 1

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любых $0 < q < 1$ и $\alpha > 1$

$$\int_E \ln^q\big(1 + M_\alpha(f_k - f_l)(\zeta)\big)\, \sigma(d\zeta) \to 0 \quad \text{при} \quad k, l \to \infty.$$

Замечание. В случае $q = 1$ сходимость может уже не иметь места, даже если допустимую максимальную функцию $M_\alpha(f_k - f_l)(\zeta)$ заменить модулем разности допустимых граничных значений $|f_k^*(\zeta) - f_l^*(\zeta)|$, $\zeta \in \Gamma$. Для примера следует взять любую функцию f из класса Островского–Неванлинны $N(G)$, не входящую в класс Смирнова $N_*(G)$ (см. [4, гл. 19] и [6]), и рассмотреть последовательность $f_k(z) = f(r_k z)$, $z \in G$, с какой-нибудь положительной монотонно возрастающей к единице последовательностью (r_k).

Доказательство теоремы 2. Действительно, если это не так, то существует такая подпоследовательность (f_{k_s}), такие q, $0 < q < 1$, $\alpha > 1$ и число $\delta > 0$, что

$$\int_E \ln^q\big(1 + M_\alpha(f_{k_t} - f_{k_s})(\zeta)\big)\, \sigma(d\zeta) \geqslant \delta, \quad t \neq s.$$

По теореме 1 из (f_{k_s}) можно выделить еще одну подпоследовательность, которую обозначим так же, что $M_\alpha(f_{k_t} - f_{k_s}) \to 0$ при $t, s \to \infty$ почти всюду на E. Кроме того, из условия теоремы и леммы 2 следует, что

$$\int\limits_\Gamma \ln_+^{q'} M_\alpha f_{k_s}(\zeta)\,\sigma(d\zeta) \leqslant A_{q',\alpha} C^{q'}, \quad s \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

для любого q', $0 < q' < 1$, и конечной постоянной $A_{q',\alpha} \geqslant 0$, зависящей только от q' и α (а также от n). Выберем q' так, чтобы $q < q' < 1$. Тогда из оценок (12) следует, что семейство функций $\{\ln_+^q M_\alpha f_{k_s}\}_{s\in\mathbb{N}}$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы на Γ, а вместе с ним и семейство $\{\ln^q\bigl(1 + M_\alpha(f_{k_t} - f_{k_s})\bigr)\}_{t,s\in\mathbb{N}}$, поскольку $\ln^q\bigl(1 + M_\alpha(f_{k_t} - f_{k_s})\bigr) \leqslant 2^{2q}(2\ln^q 2 + \ln_+^q M_\alpha f_{k_t} + \ln_+^q M_\alpha f_{k_s})$, $t, s \in \mathbb{N}$. Согласно общей предельной теореме отсюда следует

$$\int\limits_E \ln^q\bigl(1 + M_\alpha(f_{k_t} - f_{k_s})(\zeta)\bigr)\,\sigma(d\zeta) \to 0 \quad \text{при} \quad t, s \to \infty,$$

что противоречит выбору подпоследовательности (f_{k_s}). □

Следствие 1. Если в условиях теоремы 1 последовательность (f_k) сходится к функции f в области G, то

$$\int\limits_E \ln^q(1 + M_\alpha(f_k - f)(\zeta))\,\sigma(d\zeta) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty$$

для любых $0 < q < 1$ и $\alpha > 1$.

Полученному следствию можно придать следующий метрический смысл. Для любого множества E положительной меры на Γ и любых $0 < q < 1$, $\alpha > 1$ выражения

$$\rho_{q,\alpha,E}(f, g) = \int\limits_E \ln^q(1 + M_\alpha(f - g)(\zeta))\,\sigma(d\zeta), \quad f, g \in N(G),$$

задают метрики в пространстве $N(G)$. Доказанное следствие поэтому означает сходимость последовательности (f_k) к предельной функции f по метрикам $\rho_{q,\alpha,E}$ для каждых $0 < q < 1$, $\alpha > 1$.

Замечание. Теорема 2 является одновременно и уточнением, и усилением многомерных теорем 1 и 2 из [3] и теоремы 1 настоящей статьи. Она является новой и в одномерном случае $n = 1$.

4. Характеристика компактных множеств пространства $M(G)$

В качестве другого приложения основной теоремы 1 получим критерий компактности множеств в некотором пространстве голоморфных функций в G. Для этого понадобятся такие вспомогательные определения и обозначения.

Скажем, что функция f, голоморфная в G, принадлежит классу $M^q(G)$, $q > 0$, если

$$\int\limits_\Gamma \ln_+^q Mf(\zeta)\,\sigma(d\zeta) < +\infty,$$

где $(Mf)(\zeta) = \sup\limits_{0\leqslant r<1} |f(r\zeta)|$, $\zeta \in \Gamma$— радиальная максимальная функция для функции f. Полагая $q = 1$, получаем многомерный класс $M^1(G) \equiv M(G)$, введенный и изученный в одномерном случае Х. О. Кимом в [8]. Некоторые проблемы граничного поведения функций классов $M^q(B_n)$ рассматривались в [9] и [10], а функциональные свойства— в [11]. Естественная метрика в классе $M(G)$ имеет вид

$$\rho(f,g) = \int\limits_{\Gamma} \ln(1 + M(f-g)(\zeta))\, \sigma(d\zeta), \quad f,g \in M(G),$$

и можно доказать (случай шара см. в [11]), что $M(G)$ представляет собой F-алгебру относительно этой метрики; другими словами, метрика ρ инвариантна, полна и операция умножения непрерывна в метрике ρ.

Так как $|f(r\zeta)| \leqslant Mf(\zeta)$, $0 \leqslant r < 1$, $\zeta \in \Gamma$, то $M(G)$ содержится в $N(G)$, поэтому каждая функция $f \in M(G)$ обладает конечными допустимыми граничными пределами $f^*(\zeta)$ почти всюду на Γ. Следующая ниже теорема дает необходимые и достаточные условия относительной компактности множества в $M(G)$ в терминах допустимых граничных функций $f^*(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$.

Теорема 3. Множество L вполне ограничено в пространстве $M(G)$ тогда и только тогда, когда для него выполнены следующие два условия:

1) семейство функций $\{\ln_+ Mf(\zeta),\ \zeta \in \Gamma\}_{f \in L}$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы на Γ; и
2) семейство функций $\{f^*(\zeta),\ \zeta \in \Gamma\}_{f \in L}$ относительно компактно на Γ в топологии сходимости по мере.

Доказательство. Необходимость. 1) Так как из полной ограниченности множества в линейно-топологическом пространстве (каковым является всякая F-алгебра) следует его ограниченность (в линейно-топологическом смысле), то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\alpha_0 > 0$, что из $f \in L$ и $|\alpha| \leqslant \alpha_0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, вытекает $\rho(\alpha f, 0) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Используя неравенство $\ln(1+xy) \leqslant \ln(1+x) + \ln(1+y)$, $x,y \geqslant 0$, получим отсюда для произвольного измеримого множества $E \subseteq \Gamma$

$$\int\limits_E \ln(1 + Mf(\zeta))\, \sigma(d\zeta) \leqslant \int\limits_E \ln\Bigl(1 + \frac{1}{\alpha_0}\Bigr)\, \sigma(d\zeta) + \int\limits_E \ln(1 + \alpha_0 Mf(\zeta))\, \sigma(d\zeta) \leqslant$$

$$\leqslant \ln\Bigl(1 + \frac{1}{\alpha_0}\Bigr)\, \sigma E + \rho(\alpha_0 f, 0) < \sigma E \ln\Bigl(1 + \frac{1}{\alpha_0}\Bigr) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad f \in L.$$

Выбирая $\delta > 0$ так, чтобы $\delta \ln\bigl(1 + \dfrac{1}{\alpha_0}\bigr) = \dfrac{\varepsilon}{2}$, при $\sigma E < \delta$ находим

$$\int\limits_E \ln(1 + Mf(\zeta))\, \sigma(d\zeta) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad f \in L,$$

что и означает равностепенную абсолютную непрерывность интегралов семейства функций $\{\ln(1 + Mf(\zeta)),\ \zeta \in \Gamma\}_{f \in L}$, а значит, и семейства $\{\ln_+ Mf(\zeta),\ \zeta \in \Gamma\}_{f \in L}$, так как $\ln_+ Mf(\zeta) \leqslant \ln(1 + Mf(\zeta))$, $\zeta \in \Gamma$.

2) Теперь воспользуемся тем, что полная ограниченность множества в полном метрическом пространстве равносильна относительной секвенциальной компактности, т. е. тому, что из любой последовательности элементов этого множества можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Пусть $(f_k^*(\zeta))$— произвольная последовательность семейства функций $\{f^*(\zeta),\ \zeta \in \Gamma\}_{f \in L}$. Так как множество L относительно компактно в $M(G)$, то существует подпоследовательность (f_{k_s}) последовательности $(f_k) \subseteq L$, сходящаяся к некоторой функции $f \in M(G)$. Так как $|f_{k_s}^*(\zeta) - f^*(\zeta)| \leqslant M(f_{k_s} - f)(\zeta)$ почти всюду на Γ, то

$$\int\limits_{\Gamma} \ln(1+|f^*_{k_s}(\zeta)-f^*(\zeta)|)\,\sigma(d\zeta) \leqslant \int\limits_{\Gamma} \ln(1+M(f_{k_s}-f)(\zeta))\,\sigma(d\zeta) = \\ = \rho(f_{k_s},f) \to 0 \quad \text{при} \quad s\to\infty.$$

Следовательно, подпоследовательность $(f^*_{k_s}(\zeta))$ последовательности $(f^*_k(\zeta))$ сходится на Γ к $f^*(\zeta)$ в среднем логарифмическом, а значит, согласно неравенству Чебышева, и по мере.

Достаточность. Покажем, что из любой последовательности функций L можно выделить фундаментальную подпоследовательность, что и будет означать полную ограниченность множества L.

Действительно, пусть $(f_k) \subseteq L$. Тогда, согласно условию 2), из $(f_k(\zeta)$ можно выделить подпоследовательность $(f_{k_s}(\zeta))$, сходящуюся по мере. Из условия 1) следует, что множество L имеет равномерно ограниченные характеристики, то-есть

$$\int\limits_{\Gamma} \ln_+|f(r\zeta)|\,\sigma(d\zeta) \leqslant C < +\infty, \quad f\in L, \quad 0\leqslant r<1. \tag{13}$$

(В самом деле, выберем, согласно 1), для $\varepsilon=1$ такое $\delta>0$, что для любого измеримого множества $E\subseteq\Gamma$ с мерой $\sigma E<\delta$ выполнено

$$\int\limits_{E} \ln_+ Mf(\zeta)\,\sigma(d\zeta) < \varepsilon = 1, \quad f\in L.$$

Разбивая Γ на N равных по мере частей $E_1,\dots E_N$, так что $\sigma E_l = \dfrac{1}{N} < \delta$, имеем

$$\int\limits_{\Gamma} \ln_+ Mf(\zeta)\,\sigma(d\zeta) = \sum_{l=1}^{N} \int\limits_{E_l} \ln_+ Mf(\zeta)\,\sigma(d\zeta) < N, \quad f\in L.$$

Так как $|f(r\zeta)|\leqslant Mf(\zeta)$, $0\leqslant r<1$, то отсюда и следует (13) с постоянной $C=N$.)

Поэтому для последовательности (f_{k_s}) выполнены все условия теоремы 1, так что для некоторой подпоследовательности последовательности (f_{k_s}), которую обозначим так же, $M(f_{k_s}-f_{k_t})\to 0$ при $t,s\to\infty$ почти всюду на Γ. Кроме того, согласно неравенству $\ln(1+M(f_{k_t}-f_{k_s}))\leqslant 2\ln 2+\ln_+ Mf_{k_t}+\ln_+ Mf_{k_s}$ и условию 1), двойная последовательность $\ln(1+M(f_{k_t}-f_{k_s}))$, $t,s\in\mathbb{N}$, имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы на Γ. По общей предельной теореме

$$\rho(f_{k_t},f_{k_s}) = \int\limits_{\Gamma} \ln(1+M(f_{k_t}-f_{k_s})(\zeta))\,\sigma(d\zeta) \to 0 \quad \text{при} \quad t,s\to\infty,$$

то-есть, подпоследовательность (f_{k_s}) фундаментальна по метрике ρ. □

Отметим, что основная часть результатов настоящей статьи анонсирована в [12] и включена в выходящую из печати монографию [13].

Список литературы

[1] Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. Москва–Ленинград, ГИТТЛ, 1950.— 336 с.

[2] Тумаркин Г. Ц. О равномерной сходимости некоторых последовательностей функций// *Доклады Академии Наук СССР* **105** (1955), №6, 1151–1154.

[3] Гаврилов В. И., Павичевич Ж., Субботин А. В. Многомерная теорема Хинчина–Островского// *Math. Montisnigri* **XVI** (2003), 3–11.

[4] Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. Москва, Мир, 1984.— 456 стр.— Пер. с англ.

[5] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. II. Москва, Мир, 1965.— Пер. с англ.

[6] Рудин У. Теория функций в поликруге. Москва, Мир, 1974.— 160 стр. — Пер. с англ.

[7] Zygmund A. On the summability of multiple Fourier series// *Amer. J. Math.* **69** (1947), №4, 836–850.
[8] Kim H. O. On an F-algebra of holomorphic functions// *Can. J. Math.* **40** (1988), №3, 718–741.
[9] Kim H. O., Park Y. Y. Maximal functions of plurisubharmonic function// *Tsukuba J. Math.* **16** (1992), №1, 11–18.
[10] Choe B. R., Kim H. O. On the boundary behavior of functions holomorphic on the ball// *Complex Variables* **20** (1992), 53–61.
[11] Гаврилов В. И., Субботин А. В. F-алгебры голоморфных функций в шаре, содержащие класс Неванлинны// *Math. Montisnigri*, **XII** (2000), 17-31.
[12] Гаврилов В. И., Субботин А. В. Максимальный вариант многомерной теоремы Хинчина–Островского и приложения// *Доклады Академии Наук*, **405** (2005) №2, 158–160.
[13] Гаврилов В. И., Субботин А. В., Ефимов Д. А. Граничные свойства аналитических функций (дальнейший вклад). Москва, Издательство Московского университета, 2013.— 264 стр.

Поступила в редакцию 10-ого сентября 2012 г.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет, кафедра математического анализа
119992 Россия, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, мех-мат.
E-mail address: awsubbotin@mail.ru