MATHEMATICA MONTISNIGRI
Vol XXVI (2013) 11-18

О НЕКОТОРЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

С.Л. БЕРБЕРЯН

Аннотация. Статья посвящена изучению множеств $K_*(f)$ и $F_*(f)$ для нормальных непрерывных и гармонических функций.

В дальнейшем будем придерживаться общепринятых обозначений (см., например, [1]). Обозначим через D *и* Γ соответственно единичный круг $|z|<1$ и единичную окружность $|z|=1$. точке $\xi=e^{i\theta}\in\Gamma$. Интерпретируя круг *D*, как модель плоскости в геометрии Лобачевского, обозначим через $\sigma(z_1,z_2)$ неевклидовое расстояние между произвольными точками z_1,z_2 из круга *D*:

$$\sigma(z_1,z_2)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}, \text{ где } u=\left|\frac{z_1-z_2}{1-z_1\overline{z}_2}\right|.$$

Рассмотрим действительнозначную функцию $f(z)$. Для произвольного подмножества S круга D, для которого точка $\xi\in\Gamma$ является предельной точкой, обозначим через $C(f,\xi,S)$ предельное множество функции $f(z)$в точке ξ относительно множества *S*, т.е. $C(f,\xi,S)=\bigcap\overline{f(S\bigcap U(\xi))}$, где пересечение берётся по всем окрестностям $U(\xi)$ точки ξ, а черта означает замыкание множества относительно двухточечной компактификации $\overline{R}$ множества $R=(-\infty,+\infty)$ в виде отрезка посредством добавления к точкам множества R символов $-\infty$ и $+\infty$. Пусть $\Lambda(\xi)$- орицикл круга *D* в точке ξ , т.е. окружность радиуса меньше единицы, касающаяся изнутри окружности Γ в точке ξ . Два орицикла, $\Lambda^1(\xi)$, $\Lambda^2(\xi)$ круга *D* в точке ξ ограничивают некоторую односвязную область, которую называют орициклическим

1991 *Mathematics Subject Classification*. 31A05, 30D45
Ключевые слова: нормальные непрерывные функции, орицикл, орициклический угол, предельные множества, неевклидовое расстояние.

углом и обозначают через $O\Delta(\xi)$. Диаметр круга *D*, проведенный в точку $\xi \in \Gamma$, делит $O\Delta(\xi)$ на две равные части, называемые левым орициклическим углом $O^-\Delta(\xi)$ и правым орициклическим углом $O^+\Delta(\xi)$ в точке $\xi \in \Gamma$.Для гармонической в *D* функции $f(z)$ рассмотрим предельные множества $C(f, \xi, O^+\Delta(\xi))$ и $C(f, \xi, O^-\Delta(\xi))$ в точке $\xi \in \Gamma$ по правому и левому орициклическим углам $O^+\Delta(\xi))$ и $O^-\Delta(\xi))$, и следуя Багемилу (см. [2], [3]), назовем точку $\xi \in \Gamma$ орициклической точкой Фату функции $f(z)$, если множество $UC(f, \xi, O\Delta(\xi))$, в котором объединение берется как по всем правым орициклическим углам $O^+\Delta(\xi)$, так и по всем левым орициклическим углам $O^-\Delta(\xi)$, состоит из единственного значения $\{\alpha\}$, $\alpha \in \overline{R}$. В этом случае скажем, что функция $f(z)$ имеет в точке $\xi \in \Gamma$ орициклический граничный предел α. Через множество $F_*(f)$ обозначим множество орициклических точек Фату для функции $f(z)$. Точку $\xi \in \Gamma$ отнесем к множеству $K_*(f)$ для функции $f(z)$, опреде-лённой в D , если $C(f,\xi,O^1\Delta(\xi)) = C(f,\xi,O^2\Delta(\xi))$ для любых орициклических углов $O^1\Delta(\xi)$ и $O^2\Delta(\xi)$ в точке ξ . Известно (см. [3]) следующее свойство орициклов: для произвольных точек z_1 и z_2, лежащих на орицикле $\Lambda^1(\xi)$ и произвольного другого орицикла $\Lambda^2(\xi)$ имеем $\sigma(z_1, \Lambda^2(\xi)) = \sigma(z_2, \Lambda^2(\xi)) = const.$
Понятие нормальной функции, рассмотренное для мероморфных функций и состоящее в свойстве порождать нормальное семейство на группе T всех конформных автоморфизмов области определения, было затем перенесено на гармонические и субгармонические функции. В случае единичного круга D группа T состоит из элементов

$$\mathrm{T} = \{S(z); S(z) = e^{i\alpha}(z+a)\cdot(1+\overline{a}z)^{-1},$$

a -произвольная точка в D, α -произвольное действительное число $\}$. Скажем, что действительнозначная функция $f(z)$, определенная в D, нормальная, если на группе T всех конформных автоморфизмов единичного круга D порождаемое ею семейство функций $\Phi: \{f(S(z));\ S(z) \in \mathrm{T}\}$ нормально в D в смысле Монтеля, т. е. из любой последовательности $\{f(S_n(z))\}$, семейства Φ , где $S_n(z) \in \mathrm{T}$, можно извлечь подпоследовательность $\{f(S_{n_k}(z))\}$, равномерно сходящуюся на любом компакте K в D или равномерно расходящуюся к $-\infty$ или к $+\infty$ на K.

Последовательность точек $\{z_n\}, z_n \in D, n = 1,2,..., \lim\limits_{n\to\infty}|z_n| = 1,$ следуя (см.[4]) В.И.Гаврилову, называют $P-$ последовательностью, если для любой подпоследовательности $\{z_{n_k}\}$ и любого $\varepsilon > 0$ в объединении $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D(z_{n_k}, \varepsilon)$ неевклидовых кругов $D(z_{n_k}, \varepsilon)$ с неевклидовыми центрами z_{n_k} и неевклидовыми радиусами $\varepsilon > 0$ мероморфная функция $f(z)$ принимает бесконечно часто каждое комплексное значение, за исключением, быть может, двух. Применительно к гармоническим функциям (см. [5]), последовательность точек $\{z_n\}, z_n \in D, n = 1,2,..., \lim\limits_{n\to\infty}|z_n| = 1$, называем P'-последовательностью, если для любой подпоследовательности $\{z_{n_k}\}$ имеет место следующее утверждение: каково бы ни было число $\varepsilon > 0$ в обьединении $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D(z_{n_k}, \varepsilon)$ неевклидовых кругов $D(z_{n_k}, \varepsilon)$ с неевклидовыми центрами z_{n_k} и неевклидовыми радиусами $\varepsilon > 0$ гармоническая функция $f(z)$ принимает бесконечно часто каждое конечное действительное значение.

Теорема 1. *Пусть* $f(z)$ - *нормальная непрерывная в* D *функция. Для того, чтобы точка* $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma$ *была точкой из множества* $K_*(f)$, *необходимо и достаточно совпадение предельных множеств* $C(f, \xi, \Lambda(\xi))$ *для множества орициклов* $\Lambda(\xi)$, *всюду плотных на множестве орициклических углов* $O\Delta(\xi)$.

Предварительно докажем 2 леммы.

Лемма 1. *Пусть* $f(z)$ - *нормальная непрерывная функция в* D *и имеет место совпадение предельных множеств* $C(f, \xi, \Lambda(\xi))$ *для множества орициклов* $\Lambda(\xi)$, *всюду плотных на множестве орициклических углов* $O\Delta(\xi)$ *в точке* $\xi = e^{i\theta}$. *Тогда совпадение предельных множеств* $C(f, \xi, \Lambda(\xi))$ *имеет место для любых орициклов* $\Lambda(\xi)$.

*Доказательство***.** В силу непрерывности функции $f(z)$ и связности орициклов предельные множества $C(f, \xi, \Lambda(\xi))$ для указанных в лемме 1 орициклов $\Lambda(\xi)$ совпадают с некоторым замкнутым промежутком $[\alpha, \beta]$, причем возможно, что $\alpha = -\infty$ или $\beta = -\infty$. Докажем, что и для любого орицикла $\Lambda_1(\xi)$ предельное множество $C(f, \xi, \Lambda_1(\xi))$ совпадает с $[\alpha, \beta]$. Рассмотрим такую последовательность орициклов $\Lambda_n(\xi)$,предельные множества вдоль которых совпадают с $[\alpha, \beta]$ и которые стягиваются к орициклу $\Lambda_1(\xi)$. Пусть γ-произвольное число, принадлежащее промежутку $[\alpha, \beta]$. Тогда на каждом орицикле $\Lambda_n(\xi)$ найдется такая последовательность $\{z_n^k\} \to \xi$ при $k \to \infty$, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_n^k) = \gamma$. Используя свойство орициклов [3], выделим из этого мно-жества последовательностей такую подпоследовательность $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, чтобы $\lim\limits_{\kappa\to\infty} z_{n_\kappa} = \xi,$ $\lim_{k\to\infty} \sigma(z_{n_k}, \Lambda_1(\xi)) = 0$ и $\lim\limits_{\kappa\to\infty} f(z_{n_\kappa}) = \alpha$. Отметим на $\Lambda_1(\xi)$ такую последовательность $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которой

$\sigma(z_{n_k},t_k)=\sigma(z_{n_k},\Lambda_1(\xi)),\ k=1,2,...,$. Следовательно, $\lim_{\kappa\to\infty}\sigma(z_{n_\kappa},t_k)=0$, причем имеем $\lim_{k\to\infty} f(z_{n_\kappa})=\gamma$. Согласно известному свойству нормаль-ных непрерывных функций [6] $\lim_{k\to\infty} f(t_k)=\gamma$ и значит, $\gamma\in C(f,\xi,\Lambda_1(\xi))$. Поэтому полу-чим, в силу произвольности числа γ, что $C(f,\xi,\Lambda_1(\xi))\supset[\alpha,\beta]$. Докажем справед-ливость следующего соотношения:

$$C(f,\xi,\Lambda_1(\xi))=[\alpha,\beta] \tag{1}$$

Без нарушения общности допустим, что $\alpha\neq-\infty$ и $\lambda<\alpha$. Отметим на $\Lambda_1(\xi)$ такую последовательность $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которой

$$\lim_{k\to\infty} f(t_k)=\lambda \tag{2}$$

При любом фиксированном n отметим на $\Lambda_n(\xi)$ такую последовательность $\{z_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$, для которой $\sigma(z_k^{(n)},t_k)=\sigma(z_k^{(n)},\Lambda_1(\xi)),\ k=1,2,...,$. Изменяя n получим множество последовательностей $z_1^{(1)},z_2^{(1)},...,z_k^{(1)},...;z_1^{(2)},z_2^{(2)},...,z_k^{(2)},...;z_1^{(n)},z_2^{(n)},...,z_k^{(n)};...,$. Снова ис-пользуя свойство орициклов, выделим из этого множества последовательностей такую подпоследовательность $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, чтобы $\lim_{\kappa\to\infty} z_{n_\kappa}=\xi,\ \lim_{k\to\infty}\sigma\left(z_{n_k},\Lambda_1(\zeta)\right)=0$ и $\lim_{k\to\infty} f(z_{n_\kappa})=\gamma$.≥α. Сравнивая последний предел с соотношением (2),придем к противоречию со свойством для нормальных непрерывных функций (см. [6]). Полу-ченное противоречие доказывает справедливость соотношения (1) и тем самым утверждение леммы 1 доказано.

Лемма 2. *Для любой точки* $\xi\in K_*(f)$ *произвольной нормальной непрерывной функции* $f(z)$ *справедливо равенство* $C(f,\xi,O\Delta(\xi))=C(f,\xi,\Lambda(\xi))$ *для любого орицикла* $\Lambda(\xi)$ *и любого орициклического угла* $O\Delta(\xi)$.

Доказательство. Допустим противное, т.е. существует такое значение $\alpha\in\overline{R}$, что $\alpha\in C(f,\xi,O\Delta(\xi))$ для любого орициклического угла $O\Delta(\xi)$, но $\alpha\,\overline{\in}\,C(u,\xi,\Lambda(\xi))$. Рассмотрим последовательность орициклических углов

$$O^1\Delta(\xi)\supset O^2\Delta(\xi)\supset\ldots\supset O^n\Delta(\xi)\supset...,$$

стягивающихся к орициклу $\Lambda(\xi)$ и множество последовательностей $z_1^{(1)},z_2^{(1)},...,z_k^{(1)},...;z_1^{(2)},z_2^{(2)},...,z_k^{(2)},...;z_1^{(n)},z_2^{(n)},...,z_k^{(n)};...,$ где при любом фиксированном n последовательность точек $\{z_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$ содержится в орициклическом углу $O^n\Delta(\xi)$, $\lim\limits_{k\to\infty} z_k^{(n)}=\xi$ и $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_k^{(n)})=\alpha$. Используя свойство орициклов, выделим из этого множества последовательностей такую подпоследовательность $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, чтобы $\lim\limits_{\kappa\to\infty} z_{n_\kappa}=\xi,$ $\lim\limits_{\kappa\to\infty}\sigma(z_{n_\kappa},\Lambda(\xi)=0$ и $\lim\limits_{\kappa\to\infty} f(z_{n_\kappa})=\alpha$. Отметим на $\Lambda(\xi)$ такую последова-тельность $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которой $\sigma(z_{n_k},t_k)=\sigma(z_{n_k},\Lambda(\xi)),$ $k=1,2,...,$. Следовательно, $\lim\limits_{\kappa\to\infty}\sigma(z_{n_\kappa},t_k)=0$, причем имеем $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_{n_\kappa})=\alpha$. Снова применяя известную теорему для нормальных непрерывных функций получим, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(t_k)=\alpha$. Поэтому $\alpha\in C(f,\xi,\Lambda(\xi))$, что противоречит предположению. Утверждение леммы 2 доказано.

Доказательство теоремы 1. Необходимость условий теоремы 1 непосредственно следует из утверждения леммы 2. Для доказательства достаточности условий теоремы 1 рассмотрим произвольный орициклический угол $O\Delta(\xi)$ и докажем, что справедливо равенство $C(f,\xi,O\Delta(\xi))=C(f,\xi,\Lambda(\xi))$ для любого орицикла $\Lambda(\xi)$. Тем самым будет доказано утверждение теоремы 1. Возьмем произвольное значение $\alpha\in C(f,\xi,O\Delta(\xi))$. Пусть $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$-такая последовательность точек $O\Delta(\xi)$, что $t_n\to\xi$ при $n\to\infty$ и $\lim\limits_{k\to\infty} f(t_n)=\alpha$. Из этой последовательности можно извлечь подпоследовательность t_{n_k}, неевклидовое расстояние которой до некоторого орицикла $\Lambda_1(\xi)$ стремится к нулю, Отметим на $\Lambda_1(\xi)$ такую последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которой $\sigma(z_k,t_{n_k})=\sigma(t_{n_k},\Lambda_1(\xi)),$ $k=1,2,...,$. Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty}\sigma(z_k,t_{n_k})=0$, Принимая во внимание, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(t_{n_k})=\alpha$,снова в силу свойства нормальных непрерывных функций имеем $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_k)=\alpha$. Следовательно, $\alpha\in C(f,\xi,\Lambda_1(\zeta))$ и, значит, согласно утверждению леммы 1, $\alpha\in C(u,\xi,\Lambda(\xi))$ для любого орицикла $\Lambda(\xi)$. Учитывая произвольность $O\Delta(\xi)$, отсюда получим утверждение теоремы 1.

Следствие. *Пусть $f(z)$ - нормальная непрерывная функция в D . Для того, чтобы функция $f(z)$ имела в точке $\xi=e^{i\theta}$ й предел α , необходимо и достаточно существование равных пределов вдоль орициклов $\Lambda(\xi)$, всюду плотных на множестве орициклических углов $O\Delta(\xi)$ в точке $\xi=e^{i\theta}$.*

Рассуждая по той же схеме, что и при доказательстве теоремы 1 с использованием вместо свойства нормальных непрерывных функций иметь одинаковые пределы на близких в смысле неевклидовой метрики последовательностях точек круга D того же свойства для произвольных гармонических функций при условии $C(f,\xi,O\Delta(\xi))\neq\bar{R}$ (см. [1]), получим следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть* $f(z)$*-произвольная гармоническая функция, определенная в* D *и в некоторой точке* $\xi = e^{i\theta}$ *единичной окружности* Γ *предельные множества* $C(f,\xi,O\Delta(\xi)) \neq \bar{R}$ *для произвольного орициклического угла* $O\Delta(\xi)$. *Тогда для того, чтобы точка* $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma$ *была точкой из множества* $K_*(f)$, *необходимо и достаточно совпадение предельных множеств* $C(f,\xi,\Lambda(\xi))$ *для множества орициклов* $\Lambda(\xi)$, *всюду плотных на множестве орициклических углов* $O\Delta(\xi)$.

Рассмотрим граничное поведение гармонических функций в точках множества $K_*(f)$,

Теорема 3. *Пусть гармоническая в круге* D *функция* $u(z)$ *имеет конечный или бесконечный предел* $\lim_{n\leftarrow\infty} u(z_n) = \alpha$ *по некоторой последовательности точек* $\{z_n\} \in \Lambda(\xi)$, *где* $\Lambda(\xi)$ *-некоторый орицикл,* $\lim_{n\to\infty} z_n = \xi \in K_*(f)$, $\lim_{n\leftarrow\infty} \sigma(z_n, z_{n+1}) = 0$ *и допустим* α *не является орициклическим граничным значением функции* $u(z)$ *в точке* ξ. *Тогда функция* $u(z)$ *обладает в* D *последовательностью* P' *–точек* $\{\xi_n\}$ *и* $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi$.

Доказательство. Положим $\delta_n = \sigma(z_n, z_{n+1})$, где $n = 1,2,....$. Предположим сначала, что существует такая последовательность точек $\{z'_{n_k}\}$, $k = 1,2,...$,

$$z'_{n_k} \in h(\xi,\varphi_0), \lim_{k\to\infty} z'_{n_k} = \xi, \ \lim_{k\to\infty} \sigma(z_{n_k}, z'_{n_k}) = 0,$$

в которых имеют место неравенства

$$\left| u(z'_{n_k}) - \alpha \right| \geq \varepsilon_0, \text{ если } \alpha \text{-конечное,}$$

$$\left| u(z'_{n_k}) \right| \leq \frac{1}{\varepsilon_0}, \text{ если } \alpha \text{-бесконечное,}$$

где $\varepsilon_0 > 0$ – некоторое фиксированное число. Это значит, что удовлетворяются условия теоремы 3 из работы [6]. Поэтому из последовательности $\{z_n\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{z_{n_k}\}$, которая является P'-последовательностью для функции $u(z)$, что и требовалось доказать. Теперь предположим, что $\lim_{\substack{z\to\xi \\ z\in\Lambda(\xi)}} u(z) = \alpha$. Рассмотрим вложенную последовательность орициклических углов

$$O^1\Delta(\xi) \supset O^2\Delta(\xi) \supset \ldots \supset O^n\Delta(\xi) \supset \ldots,$$

стягивающихся к орициклу $\Lambda(\xi)$. Так как, по условию значение α не является орициклическим граничным значением функции $u(z)$ в граничной точке ξ, то существует такое значение $\beta \in \overline{R}$, отличное от α, что в каждом орициклическом углу найдется последовательность $\{t_k^n\}_{k=1}^{\infty}$, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} u(t_k^n) = \beta$. Изменяя n получим множество последовательностей

$$t_1^1, t_2^1, \ldots t_k^1, \ldots; t_1^2, t_2^2, \ldots t_k^2, \ldots; t_1^n, t_2^n, \ldots t_k^n, \ldots; \ldots$$

Из этого множества последовательностей можно выбрать последовательность $\{t_{k_m}^m\}_{m=1}^{\infty}$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(t_{k_m}^m, q_m) = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u(t_{k_m}^m) = \beta$, где q_m – некоторая последовательность точек на орицикле $\Lambda(\xi)$, стремящаяся к ξ. В силу предположения $\lim\limits_{n\to\infty} u(q_m) = \alpha$ и, таким образом, опять выполнены условия теоремы 3 из работы [6]. Еще раз применяя утверждение этой теоремы завершим доказательство теоремы 3.

Замечание. Очевидно, что из существования углового или орициклического граничного значения в произвольной точке $\xi \in \Gamma$ следует отсутствие последовательности P'-точек в любом углу Штольца $\Delta(\xi)$ или соответственно в любом орициклическом углу $O\Delta(\xi)$, так как в противном случае предельные множества вдоль этих углов совпадали с $\overline{R}$, что невозможно.

Из теоремы 3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. *Для того, чтобы гармоническая в* D *функция* $u(z)$ *имела в точке* $\xi \in \mathrm{K}_*(f)$ *орициклическое граничное значение* α *необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный или бесконечный предел* $\lim\limits_{n\leftarrow\infty} u(z_n) = \alpha$ *по некоторой последовательности* $\{z_n\} \in \Lambda(\xi)$, *n=1,2,..., где* $\Lambda(\xi)$ *– некоторый фиксированный орицикл,* $\lim\limits_{n\leftarrow\infty} \sigma(z_n, z_{n+1}) = 0$ *и нет* P'*-последовательностей в любом орициклическом углу* $O\Delta(\xi)$.

Необходимость условий теоремы 4 очевидна.

Достаточность условий теоремы 4 непосредственно следует из утверждения теоремы 3.

Граничному поведению функций посвящены многочисленные работы. Отметим, в частности, работы [7-10].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Берберян С.Л., Гаврилов В.И., *Предельные множества непрерывных и гармонических функций по некасательным граничным путям*, Mathematica Montisnigri, 1993, Vol.1, 17-25.

[2] Bagemihl F., *Horocyclic boundary properties of meromorphic functions*, Annal. Acad. Scien. Fennicae, 1966, Ser. AI, № 385, 1-18.

[3] Гаврилов В.И., *О граничных теоремах единственности*, Изв. АН Арм ССР, 1969, т.4, N3, стр.244-258.

[4] Гаврилов В.И., *О распределении значений мероморфных в единичном круге функций, не являющихся нормальными*, Матем. сбор., 1965, т.67(109), №3, 408-427.

[5] Берберян С.Л., *О распределении значений гармонических функций в единичном круге*, Изв. вузов, математика, 2011, №6, 12-19.

[6] Берберян С.Л., *Об угловых граничных значениях нормальных непрерывных функций*, Изв. вузов, математика,1986, №3, 22-28.

[7] Pavicevic Z., *Meromorphic functions generating normal families in a arbitrary open subset of the unit disc*, New Zeland Journal of Mathematics , 1999 , vol.28, 89-106.

[8] Павичевич Ж., Шушич Е., *Применение циклических свойств динамических систем к изучению граничных пределов произвольных функций*, Доклады РАН, 2002, т. 387, №1, 16-18.

[9] Rung D. C., *Asymptotic values of normal subharmonic functions*, Math. Zeitshr., 1964, vol.84, №1, 9-15.

[10] Dragosh S., *Horociclic cluster sets of functions defined in the unit disc*, Nagoya Math.J., 1969, vol.35, 53-82.

РОССИЙСКО-АРМЯНСКИЙ (СЛОВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ, ЕРЕВАН, АРМЕНИЯ

E-mail address: samvel357@mail.ru

Поступила в редакцию 20-го ноября 2012 г.