MATHEMATICA MONTISNIGRI
Vol XXVI (2013) 5–10

О РАВНОМЕРНЫХ ОЦЕНКАХ ОСТАТКА В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОТ ДРОБНОЙ ДОЛИ АРГУМЕНТА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ МНОГОЧЛЕНОМ РАСТУЩЕЙ СТЕПЕНИ

Г. И. АРХИПОВ, О. В. КОЛПАКОВА

Аннотация. В настоящей статье находится приближение многочленом Фурье экспоненты от линейной функции с растущими коэффициентами от дробной доли вещественного числа с равномерной оценкой остатка.

Задача представления экспоненты от дробной доли вещественного аргумента в виде тригонометрического многочлена с остатком была впервые рассмотрена Дезуйе [1] при оценке тригонометрических сумм от нецелой степени натурального аргумента. Важное значение для приложений имеет правильная оценка порядка остаточного члена. Существенное улучшение результата работы [1] было получено К. Буриевым [2] и О.В. Поповым [3]. Они доказали, что имеет место равенство

$$f(x) = e^{2\pi i\alpha\{x\}} = \sum_{|n|\leqslant N} A_n(\alpha)e^{2\pi i\alpha x} + R_N(x).$$

при условии, что $|\alpha| \leqslant \frac{1}{2}$ и $|R_N| \ll \frac{1}{\sqrt{1+N^2\sin^2\pi x}}$, A_n – коэффициенты ряда Фурье функции $f(x)$.

В некоторых задачах теории чисел требуется получение подобного представления при более широком промежутке изменения параметра α вплоть до значения $|\alpha| \asymp N$. Эта задача существенно сложнее предыдущей, так как очевидно, что при $\alpha = N$ требуемая оценка остатка уже не имеет места. Однако, здесь мы доказываем следующую теорему

Теорема. *Для функции $f(x) = e^{2\pi i\alpha\{x\}}$ при вещественном α с условием $|\alpha| < N/2$ имеет место следующее разложение в ряд Фурье с равномерной по параметру α оценкой остатка*

$$f(x) = \sum_{|n|\leq N} A_n(\alpha)e^{2\pi inx} + R_N(x).$$

Остаток $R_N(x)$ оценивается следующим образом. $|R_N(x)| \leqslant \delta(x)$ при

$$\delta = \frac{50}{\sqrt{1+160N^2\sin^2\pi x}}.$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 11L03.

Ключевые слова. Экспонента дробной доли, равномерная оценка остатка, ряд Фурье, тригонометрические суммы от нецелой степени натурального аргумента.

Коэффициенты $A_n(\alpha)$ имеют вид:

$$A_n(\alpha) = \begin{cases} e^{\pi i\alpha}\frac{\sin \pi\alpha}{\pi(\alpha-n)}, & \text{если } \alpha \neq n; \\ 1, & \text{если } \alpha = n. \end{cases}$$

Для коэффициентов Фурье $a_m(N)$ функции $\delta(x)$ выполняется оценка $|a_m(N)| = |a_{-m}(N)| \leq \frac{\ln Ne^4}{\pi N} e^{-\frac{m}{N}}$, при $m \geq 0$, $N > 1$.

Доказательство. Оценки на коэффициенты $a_m(N)$ приводятся в [4] стр. 601. Поэтому для доказательства теоремы осталось вычислить вид коэффициентов $A_n(\alpha)$ и оценить остаток $R_N(x)$.

По формулам для коэффициентов ряда Фурье имеем

$$A_m(\alpha) = \int\limits_0^1 f(x) e^{-2\pi i m x} dx = \int\limits_0^1 e^{2\pi i(\alpha\{x\} - mx)} dx = \int\limits_0^1 e^{2\pi i x(\alpha - m)} dx,$$

так как при $x \in [0; 1)$ имеет место равенство $\{x\} = x$.

Далее, при $\alpha = m$ имеем $A_m(\alpha) = 1$. Если же $\alpha \neq m$, то

$$A_m(\alpha) = \int\limits_0^1 e^{2\pi i x(\alpha-m)} dx = \left.\frac{e^{2\pi i x(\alpha-m)}}{2\pi i(\alpha - m)}\right|_0^1 = \frac{1}{2\pi i(\alpha - m)} \cdot \left(e^{2\pi i(\alpha-m)} - 1\right) =$$

$$= e^{\pi i(\alpha-m)} \cdot \frac{\sin \pi(\alpha - m)}{\pi(\alpha - m)} = e^{\pi i \alpha} \cdot (-1)^m \cdot \frac{\sin \pi(\alpha - m)}{\pi(\alpha - m)}.$$

Далее, так как $\sin \pi(\alpha - m) = (-1)^m \sin \pi\alpha$, то $A_m(\alpha) = \frac{e^{\pi i\alpha} \sin \pi\alpha}{\pi(\alpha-m)}$. Заметим, что $A_m(\alpha)$ можно также записать в виде:

$$A_m(\alpha) = \begin{cases} e^{\pi i(\alpha-m)}\frac{\sin \pi(\alpha-m)}{\pi(\alpha-m)}, & \text{если } \alpha \neq m; \\ 1, & \text{если } \alpha = m. \end{cases}$$

Займемся оценкой остатка $R_N(x)$. Согласно полученным равенствам имеет место формула

$$S(x, \alpha) = \sum_{|n| \leqslant N} A_n(x) e^{2\pi i n x} = \sum_{|n| \leqslant N} \left(\int\limits_0^1 e^{2\pi i y(\alpha-n)} dy \right) e^{2\pi i n x} =$$

$$= \int\limits_0^1 e^{2\pi i \alpha y} T_n(x - y) dy,$$

где

$$T_n(x - y) = \sum_{|n| \leqslant N} e^{2\pi i n(x-y)} = \frac{\sin\left(\pi(x - y)(2N + 1)\right)}{\sin \pi(x - y)}.$$

Оценим разность

$$|R_N(x)| = \left| e^{2\pi i \alpha x} - \sum_{|n| \leqslant N} A_n(\alpha) e^{2\pi i n x} \right| = \left| e^{2\pi i \alpha x} - \int\limits_0^1 e^{2\pi i \alpha y} \cdot \frac{\sin\left(\pi(x - y)(2N + 1)\right)}{\sin \pi(x - y)} \right| =$$

$$= \left| 1 - \int\limits_0^1 e^{2\pi i \alpha(y-x)} \frac{\sin\left(\pi(x - y)(2N + 1)\right)}{\sin \pi(x - y)} dy \right|.$$

Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^1 e^{2\pi i\alpha(y-x)}\frac{\sin(\pi(x-y)(2N+1))}{\sin\pi(x-y)}dy$ и пусть $t=y-x$, тогда получим

$$A=\int\limits_{-x}^{1-x}e^{2\pi i\alpha t}\frac{\sin\pi(2N+1)t}{\sin\pi t}dt.$$

Далее имеем

$$|R_N(x)|=\left|1-\int\limits_{-x}^{1-x}e^{2\pi i\alpha t}\frac{\sin\pi(2N+1)t}{\sin\pi t}dt\right|=\left|\int\limits_{-x}^{1-x}\left(1-e^{2\pi i\alpha t}\right)\frac{\sin\pi(2N+1)t}{\sin\pi t}dt\right|=$$

$$=\left|\int\limits_{-x}^{1-x}e^{\pi i\alpha t}2i\frac{\sin\pi\alpha t}{\sin\pi t}\sin\pi(2N+1)tdt\right|=|I|.$$

Перепишем интеграл I в следующем виде

$$I=\int\limits_{-x}^{1-x}e^{\pi i\alpha t}\frac{\sin\pi\alpha t}{\sin\pi t}\left(e^{i\pi(2N+1)t}-e^{-i\pi(2N+1)t}\right)dt=\int\limits_{-x}^{1-x}\frac{\sin\pi\alpha t}{\sin\pi t}e^{i\pi t(2N+\alpha+1)}dt-$$

$$-\int\limits_{-x}^{1-x}\frac{\sin\pi\alpha t}{\sin\pi t}e^{-i\pi t(2N-\alpha+1)}dt=I_1-I_2.$$

Интегралы I_1 и I_2 оцениваются одинаково, поэтому оценим I_1. Так как подинтегральная функция аналитична на отрезке $[-x,1-x]$, то интегрирование по отрезку можно заменить на интеграл по контуру E_1,E_2,E_3, где $E_1=[(-x,0);(-x,iH)], E_2=[(-x,iH);(1-x,iH)], E_3=[(1-x,iH);(1-x,0)]$, где H - произвольное положительное число. Сначала оценим интеграл J_2 по отрезку E_2. Рассмотрим подинтегральную функцию $F_1(z)=\frac{\sin\pi\alpha z}{\sin\pi z}e^{i\pi z(2N+\alpha+1)}$, где $z=iH+t$. Так как $|e^{i\pi z(2N+\alpha+1)}|=e^{-\pi(2N+\alpha+1)H}\leqslant e^{-\pi H(2N-|\alpha|+1)}$, и

$$\left|\frac{\sin\pi\alpha z}{\sin\pi z}\right|=\left|\frac{e^{i\pi\alpha(iH+t)}-e^{-i\pi\alpha(iH+t)}}{e^{i\pi(iH+t)}-e^{-i\pi(iH+t)}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{|e^{-\pi\alpha H}|+|e^{\pi\alpha H}|}{|e^{\pi H}|+|e^{-\pi H}|}\right|\leqslant e^{\pi|\alpha|H},\text{если только H достаточно велико,}$$

то подинтегральная функция $F_1(z)$ оценивается следующим образом

$$|F_1(z)|\leqslant e^{-\pi H(2N+1-2|\alpha|)}.$$

Следовательно, $F_1(z)\to 0$ при $H\to+\infty$. Значит, $J_2\to 0$. При оценке интегралов J_1 и J_3 будем считать, что $H\to+\infty$. Тогда получим

$$J_1=\int\limits_{-x}^{-x+i\infty}\frac{\sin\pi\alpha z}{\sin\pi z}e^{i\pi z(2N+\alpha+1)}dz=\int\limits_{-x}^{-x+i\infty}\frac{\sin\pi\alpha(-x+it)}{\sin\pi z}e^{i\pi(-x+it)(2N+\alpha+1)}dz=$$

$$=i\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-i\pi\alpha x-\pi\alpha t}-e^{i\pi\alpha x+\pi\alpha t}}{\sin\pi(-x+it)}e^{-\pi(2N+\alpha+1)(ix+t)}dt=$$

$$=i\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-i\pi\alpha x-\pi\alpha t-i\pi x(2N+\alpha+1)-\pi t(2N+\alpha+1)}-e^{i\pi\alpha x+\pi\alpha t-i\pi x(2N+\alpha+1)-\pi t(2N+\alpha+1)}}{\sin\pi(-x+it)}dt=$$

$$= i \int_{0}^{+\infty} \frac{B}{A} dt.$$

Оценим величины A и B. $|A| = e^{i\pi z} - e^{-i\pi z} = 2|\sin \pi z| \geqslant 2|\sin \pi x|$, так как $|A|^2 = 4|\sin \pi z|^2 = (e^{i\pi z} - e^{-i\pi z})\left(\overline{e^{i\pi z}} - \overline{e^{-i\pi z}}\right) = e^{-2\pi t} + e^{2\pi t} - 2\cos 2\pi x$. Величина $e^{-2\pi t} + e^{2\pi t}$ принимает минимальное значение, равное 2 при $t = 0$. Следовательно, $4|\sin \pi z|^2 \geqslant 2 - 2\cos 2\pi x = 4\sin^2 \pi x$. Оценим величину B.

$$B = e^{-i\pi x(2N+2\alpha+1) - \pi t(2N+2\alpha+1)} - e^{-i\pi x(2N+1) - \pi t(2N+1)} = B_1 - B_2.$$

$$|B| \leqslant |B_1| + |B_2| \leqslant e^{-\pi t(N+1)} + e^{-\pi t(2N+1)} \leqslant 2e^{-\pi t(N+1)}.$$

Отсюда вытекает, что

$$J_1| \leqslant \int_{0}^{+\infty} \frac{2e^{-\pi t(N+1)}}{|\sin \pi x|} dt = \frac{2}{\pi(N+1)|\sin \pi x|}.$$

Такая же оценка выполняется для J_3, следовательно, $|I_1| \leqslant \frac{4}{\pi(N+1)|\sin \pi x|}$. I_2 оценивается аналогично только по симметричному относительно оси абсцисс контуру. Таким образом, получили оценку для I. $|I| \leqslant \frac{8}{\pi(N+1)|\sin \pi x|}$. Полученная оценка достаточно хорошая при x, отделенном от 0. Если x близко к 1 или 0, то покажем, что интеграл I можно оценить единицей. Разобьем отрезок интегрирования на части T_1 и T_2, таким образом, что

$$T_1 = \left[\begin{array}{l} \frac{4}{N+1} \leqslant |x| \leqslant \frac{1}{2}; \\ \frac{4}{N+1} \leqslant |1-x| \leqslant \frac{1}{2}, \end{array} \right.$$

а

$$T_2 = \left[\begin{array}{l} 0 \leqslant |x| \leqslant \frac{4}{N+1}; \\ 0 \leqslant |1-x| \leqslant \frac{4}{N+1}. \end{array} \right.$$

На участке T_1 требуемое неравенство получается из того, что выполнено следующее неравенство $|\sin x| > \frac{2|x|}{\pi}$ для всех x таких, что $0 < |x| < \pi/2$. Исходя из этого неравенства получаем, что $\frac{8}{\pi(N+1)|\sin \pi x|} < \frac{4}{|x|(N+1)} \leqslant 1$. Рассмотрим интеграл I на участке T_2. Оба случая, рассмотренные в T_2, оцениваются одинаково. Рассмотрим случай $0 \leqslant |x| \leqslant \frac{4}{N+1}$ и пусть $\frac{4}{N+1} = a$. Интеграл, который надо оценить имеет вид

$$I_0 = 2\int_{-x}^{1-x} e^{\pi i\alpha t} \sin \pi\alpha t \frac{\sin \pi(2N+1)t}{\sin \pi t} dt = 2\int_{-x}^{1-x} G(t) dt =$$

$$= 2\left(\int_{-x}^{a} G(t)dt + \int_{a}^{1-a} G(t)dt + \int_{1-a}^{1-x} G(t)dt\right) = D_1 + D_2 + D_3.$$

Оценим подинтегральную функцию в интегралах D_1 и D_3. Так как неравенство $\left|\frac{\sin \pi(2N+1)t}{\sin \pi t}\right| < 2N+1$ для любого t [1], а $|e^{\pi i\alpha t}| = 1 = |\sin \pi\alpha t|$, то с учетом коэффициента вклад слагаемых D_1 и D_3 в оценку I_0 можно оценить следующим образом $D_1 + D_3 < 4a(2N+2) = \frac{16}{N+1}(2N+2) < 32$. Осталось оценить вклад в I_0 интеграла D_2. На данном участке интегрирования функция $\frac{1}{\sin \pi t}$ имеет два участка монотонности $(a, 1/2)$ и $(1/2, 1-a)$. Вклад каждого промежутка рассматривается одинаково, поэтому рассмотрим один промежуток, например, $(a, 1/2)$. На нем для функции $G(t) =$

$f(t)g(t)$ применим вторую теорему о среднем, где $f(t) = e^{\pi i\alpha t}\sin\pi\alpha t\sin\pi(2N+1)t$, а $g(t) = \frac{1}{\sin\pi t}$. Тогда получим, что

$$D_2 = 2\int\limits_a^{1/2} f(t)g(t)dt = 2\frac{1}{\sin\pi a}\int\limits_a^{\xi} e^{\pi i\alpha t}\sin\pi\alpha t\sin\pi(2N+1)tdt = 2\frac{1}{\sin\pi a}\int\limits_a^{\xi} e^{\pi i\alpha t}Cdt,$$

где $C = \sin\pi\alpha t\sin\pi(2N+1)t$.

В силу того, что

$$C = \frac{1}{2}\left(\cos\pi t(\alpha - 2N - 1) - \cos\pi t(\alpha + 2N + 1)\right),$$

то

$$Ce^{\pi i\alpha t} = \frac{1}{4}\left(e^{\pi it(2\alpha-2N-1)} + e^{\pi it(2N+1)} + e^{\pi it(2\alpha+2N+1)} + e^{-\pi it(2N+1)}\right).$$

Следовательно,

$$|\int\limits_a^{\xi} e^{\pi i\alpha t}Cdt| \leqslant \frac{1}{4}|\int\limits_a^{\xi} e^{\pi it(2\alpha-2N-1)} + \int\limits_a^{\xi} e^{\pi it(2N+1)} + \int\limits_a^{\xi} e^{\pi it(2\alpha+2N+1)} + \int\limits_a^{\xi} e^{-\pi it(2N+1)},$$

последние интегралы оцениваются одинаково, поэтому оценим только один.

$$\left|\int\limits_a^{\xi} e^{\pi it(2\alpha-2N-1)}dt\right| \leqslant \frac{2}{\pi|2\alpha - 2N - 1|} \leqslant \frac{2}{\pi(2N - 2|\alpha| + 1)} \leqslant \frac{2}{\pi(N+1)}.$$

Таким образом,

$$\left|\int\limits_a^{1/2} G(t)dt\right| \leqslant \frac{2}{|\sin\pi a|\pi(N+1)}.$$

Поскольку, $\int\limits_{1/2}^{1-a} G(t)dt$ оценивается точно также, то в итоге с учетом коэффициента получаем, что

$$|D_2| \leqslant \frac{8}{|\sin\pi a|\pi(N+1)} < \frac{1}{\pi}.$$

Здесь мы снова воспользовались неравенством $\sin x > \frac{2x}{\pi}$ при $x \in (0, \frac{1}{2})$. Наконец, получили искомую оценку для $|I_0|$.

$$|I_0| < 32 + \frac{1}{\pi} < 33.$$

Таким образом имеет место оценка

$$|R_N(x)| \leqslant \min\left(33; \frac{8}{|\sin\pi x|\pi(N+1)}\right).$$

Далее, воспользуемся неравенством $\min(1/x, 1/y) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ при $1/x = 33$ и $1/y = \frac{8}{|\sin\pi x|\pi(N+1)}$ получим, что

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \frac{50}{\sqrt{1 + 160N^2\sin^2\pi x}}.$$

Это означает, что

$$|R_N| \ll \frac{50}{\sqrt{1 + 160N^2\sin^2\pi x}}. \quad \square$$

Список литературы

[1] *Deshonillers J.M. Problems de Varing avec exposant non ntiers. Bull. Soc. Math. France, 1973, T. 101, fage 3. Y. 285-295.*

[2] *Буриев К.* Об исключительном множестве в проблеме Харди-Литлвуда для нецелых степеней. Мат. заметки — 1989, — Том.46, — Вып. 4, — стр. 127–128.

[3] *О.В. Попов.* Арифметические приложения оценок сумм Г. Вейля от многочленов растущей, Дисс. Канд. физ.-матем. наук, М.: МГУ, 1995.

[4] *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* Лекции по математическому анализу М.: Дрофа, 2003.

Поступила в редакцию 7-ого декабря 2012 г.

119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, д. 1
Главное здание, механико-математический факультет
Россия
E-mail address: arhipova@ras.ru

119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, д. 1
Главное здание, механико-математический факультет
Россия
E-mail address: ovkolpakova@yandex.ru